**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2022, 11(10), 7060-7066
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1110749

# 分布格*J*(*mn*)上链多项式的实根性研究

**杨荣涛**

西南大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2022年9月14日；录用日期：2022年10月5日；发布日期：2022年10月14日

## 摘　要

**链多项式是定义在偏序集上的一类重要多项式。本文主要研究分布格*J*(*mn*)上的链多项式的实根性，通过限制*J*(*mn*)中元素的秩得到一个新的偏序集，并且证明了这个新偏序集的链多项式以及h-多项式是实根的。**

## 关键词

**偏序集，h-多项式，链多项式，实根性**

# The Real-Rootedness of Chain Polynomials on Distributive Lattice *J*(*mn*)

**Rongtao Yang**

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: Sep. 14th, 2022; accepted: Oct. 5th, 2022; published: Oct. 14th, 2022

## Abstract

**Chain polynomial is one of the most important polynomials defined on posets. This paper mainly studies the real-rootedness of chain polynomial on distributive lattice *J*(*mn*). We obtain a new poset by limiting the rank of elements in *J*(*mn*), and then prove that the chain polynomial and h-polynomial of this new poset are real-rooted.**

## Keywords

**Poset, h-Polynomial, Chain Polynomial, Real-Rootedness**

文章引用: 杨荣涛. 分布格 *J*(*mn*)上链多项式的实根性研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(10): 7060-7066.
DOI: 10.12677/aam.2022.1110749

## 1. 引言

多项式的零点和方程的根是同一个数学对象的两种不同表达方式，代数学中对方程的根的研究具有非常悠久的历史，早在 1799 年，Gauss 就在其博士论文中给出了代数基本定理的第一个实质性证明。而多项式的实根性能推出序列的对数凹性以及单峰性，因此多项式的实根性研究是单峰型问题中的一个重要的组成部分。单峰型问题是组合学中基本的研究课题之一，长期以来吸引了许多数学研究者对其进行了大量的研究。1989 年 Stanley 在文献[1]中研究了序列是对数凹或单峰的各种方法并给出了具体的例子；1994 年 Brenti 在文献[2]中研究了代数、组合数学和几何中的对数凹和单峰序列；2012 年 Huh (2022 年菲尔兹奖获得者)在文献[3]中证明了图的色多项式系数的对数凹性并发表在四大期刊之一上。2015 年 Branden 在文献[4]中综述了组合数学中单峰性、对数凹性和实根性的最新发展。至今仍有许多数学研究者致力于研究组合数学中多项式的实根性问题。

偏序集是组合数学中最基本的概念之一，也是组合数学连接其他学科的纽带。自从 Rota 提出偏序集的概念后，组合数学有了自己的理论框架，因此许多组合学家都在偏序集上做过大量的研究，由此也衍生出了很多偏序集上十分重要的多项式，比如能以统一的方式处理许多组合数学中的计数问题以及恒等式问题的莫比乌斯函数、在某些特定情况下能对应到图的色多项式的特征多项式、能反映出偏序集本身性质的秩多项式等等，除此之外还有链多项式、f-多项式以及 h-多项式等等。近年来也有许多数学研究者对偏序集上的多项式实根性或单峰性问题进行过研究，比如 Mcconville 等人在文献[5]中研究了相关的猜想；Oguz 和 Ravichandran 在文献[6]中证明了栅栏偏序集的秩多项式是单峰的；Haglund 和 Zhang 在文献[7]中研究了与欧拉多项式相关的实根性问题；此外 Zhang 还在文献[8]中研究了单纯形边细分局部 h-多项式的实根性等等，总之偏序集上的多项式的实根性研究是多项式的零点问题中非常重要且热门的一个部分。

链多项式作为偏序集上的一类重要的多项式，它的实根性引起了许多数学家的兴趣。比如 Stanley 成功证明了“$3+1-$free”偏序集的链多项式是实根的[9]；Neggers 猜想所有有限分配格的链多项式都是实根的[10]，最后由 Stembridge [11]予以反驳，Branden [12]发现了更一般猜想的反例；最近又有人提出猜想所有有限几何格的链多项式是实根的并在子空间格和分拆格上得到了验证。本文主要研究偏序集上的链多项式以及偏序集的序复形的 f-多项式和 h-多项式的实根性。在前人研究的基础上，从 $n$ 元链、直和、序理想等基本概念出发，构造了一个新的偏序集，并且证明了这个新偏序集的链多项式以及它的序复形所对应的 h-多项式是实根的。

## 2. 预备知识

偏序集 $P$ 是一个集合，连同一个记为≤的二元关系，满足下面三条公理：

1) 自反性：对所有的 $x\in P$， $x\le x$。

2) 反对称性：如果 $x\le y$ 且 $y\le x$，则 $x=y$。

3) 传递性：如果 $x\le y$ 且 $y\le z$，则 $x\le z$。

我们使用下面一些含义明显的记号：$x\ge y$ 表示 $y\le x$，$x<y$ 表示 $x\le y$ 且 $x\ne y$，而 $x>y$ 表示 $y<x$。如果偏序集 $P$，$Q$ 之间存在一个保持序关系的双射 $\phi: P\to Q$ 使得它的逆也保持序关系，则称这两个偏序

集 $P$ 和 $Q$ 同构，即在 $P$ 中 $x \le y$ 当且仅当在 $Q$ 中 $\phi(x) \le \phi(y)$。$P$ 的子偏序集是指 $P$ 的子集 $Q$ 连同 $Q$ 上的偏序关系：对 $x, y \in Q$，有在 $Q$ 中 $x \le y$ 当且仅当在 $P$ 中 $x \le y$。$P$ 的一类特殊子偏序集是对任意 $x \le y$ 定义的闭区间 $[x, y] = \{z \in P \mid x \le z \le y\}$。

设 $x, y \in P$，若 $x < y$ 且不存在 $z \in P$ 使得 $x < z < y$，则称 $y$ 覆盖 $x$，记为 $x \prec y$。若存在某个元素 $\hat{0} \in P$ 使得对所有的 $x \in P$ 都有 $x \ge \hat{0}$，则称 $P$ 具有 $\hat{0}$。类似地，若存在某个元素 $\hat{1} \in P$ 使得对所有的 $x \in P$ 都有 $x \le \hat{1}$，则称 $P$ 具有 $\hat{1}$。

链是任意两个元素都能比较大小的偏序集。由 $n$ 个元素构成的链称为一条 $n$ 元链，记为 $\boldsymbol{n}$。有限链 $C$ 的长度 $l(C)$ 定义为 $l(C) = |C| - 1$。若偏序集 $P$ 的所有极大链都具有相同长度 $n$，则称 $P$ 是秩为 $n$ 的分次偏序集。此时，存在唯一的秩函数 $\rho : P \to \{0, 1, \cdots, n\}$ 满足：若 $x$ 是 $P$ 的极小元，则 $\rho(x) = 0$；若在 $P$ 中 $y$ 覆盖 $x$，则 $\rho(y) = \rho(x) + 1$。

$P$ 的序理想是指满足下面条件的 $P$ 的子集 $I$：若 $x \in I$ 且 $y \le x$，则 $y \in I$。$P$ 的所有序理想按照包含关系排序，构成一个偏序集，记为 $J(P)$。

如果 $P$ 和 $Q$ 为在不相交集合上的偏序集，则 $P$ 和 $Q$ 的直和为 $P \cup Q$ 上的偏序集 $P + Q$，使得在 $P + Q$ 中 $x \le y$，即满足(a) $x, y \in P$ 且在 $P$ 中 $x \le y$，或者(b) $x, y \in Q$ 且在 $Q$ 中 $x \le y$。$P$ 和自身的 $m$ 次直和记为 $mP$，特别地，$m$ 条 $n$ 元链 $\boldsymbol{n}$ 的直和记为 $m\boldsymbol{n}$。

在一个顶点集 $V$ 上的单纯复形为 $V$ 的子集族 $\Delta$ 满足(a) 如果 $x \in V$，则 $\{x\} \in \Delta$；(b) 如果 $S \in \Delta$ 且 $T \subseteq S$，则 $T \in \Delta$。元素 $S \in \Delta$ 称为 $\Delta$ 的面，$S$ 的维数 $\dim S$ 定义为 $|S| - 1$。特别地，$\varnothing$ 总是 $\Delta$ 的面(只要 $\Delta \ne \varnothing$)，维数为−1。我们还定义 $\Delta$ 的维数为 $\dim \Delta = \max_{F \in \Delta} (\dim F)$。如果 $\Delta$ 是有限的，则令 $f_i$ 表示 $\Delta$ 的 $i$ 维面的个数。

有限偏序集 $L$ 的链多项式定义为

$$p_L(x) \coloneqq \sum_{k \ge 0} c_k(L) x^k,$$

其中 $c_k(L)$ 表示 $L$ 中 $k$ 元链的条数。给定 $n-1$ 维单纯复形 $\Delta$，它的 f-多项式以及 h-多项式定义为

$$f(\Delta, x) = \sum_{i=0}^{n} f_{i-1}(\Delta) x^i,$$

$$h(\Delta, x) = (1-x)^n f\left(\Delta, \frac{x}{1-x}\right) = \sum_{i=0}^{n} f_{i-1}(\Delta) x^i (1-x)^{n-i},$$

其中 $f_{i-1}(\Delta)$ 表示 $\Delta$ 的 $i-1$ 维面的数目。容易看出 $f(\Delta, x)$ 只有实根当且仅当 $h(\Delta, x)$ 只有实根。我们主要对偏序集的序复形感兴趣。由有限偏序集 $L$ 中所有的链组成的单纯复形 $\Delta(L)$ 称为 $L$ 的序复形([13] 3.8 节)。因此按照定义我们有 $f(\Delta(L), x) = p_L(x)$。本文中记 $h_L(x) = h(\Delta(L), x)$，则有

$$h_L(x) = (1-x)^n p_L\left(\frac{x}{1-x}\right), \tag{1}$$

其中 $n$ 是 $L$ 中链的最大基数。

假设秩为 $n$ 的有限分次偏序集 $L$ 有最小元 $\hat{0}$ 和最大元 $\hat{1}$，并且秩函数为 $\rho$。若 $S \subseteq [n-1]$，记 $L$ 的子偏序集 $\{t \in L \mid \rho(t) \in S\} \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ 的极大链个数为 $\alpha_L(S)$，设

$$\beta_L(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \alpha_L(T),$$

则由([13] 3.13)节知，

$$h_L(x) = \sum_{S \subseteq [n-1]} \beta_L(S) x^{|S|}.$$

我们用 $C(L)$和 $M(L)$分别表示由 $L$ 中的所有覆盖关系和所有极大链组成的集合。称映射 $\lambda : C(L) \to \mathbb{Z}$ 是 $L$ 上的一个边标记。对于 $L$ 中任意一条极大链 $C : \hat{0} = c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_n = \hat{1}$，定义边标记序列

$$\lambda(C) = \left(\lambda(c_0, c_1), \lambda(c_1, c_2), \cdots, \lambda(c_{n-1}, c_n)\right).$$

设 $Des_\lambda(C) = \left\{ i \in [n-1] \mid \lambda(c_{i-1}, c_i) \geq \lambda(c_i, c_{i+1}) \right\}$，并且称 $C$ 是关于 $\lambda$ 严格递增的如果 $Des_\lambda(C) = \varnothing$。通过限制 $\lambda$，所有这些定义都适用于 $L$ 中的闭区间。我们称 $\lambda$ 是 $L$ 上的一个严格 R-标记，如果 $L$ 中的每个闭区间都存在唯一一个关于 $\lambda$ 严格递增的极大链。当 $\lambda$ 是一个严格 R-标记时，对任意 $S \subseteq [n-1]$，我们有

$$\beta_L(S) = \left| \left\{ C \in M(L) \mid Des_\lambda(C) = S \right\} \right|.$$

一个实系数多项式 $f(x)$ 称为实根的，如果 $f(x)$ 的根都是实根或者 $f(x) \equiv 0$。对于两个实根多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，如果它们的根分别为 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots$ 和 $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots$，并且满足 $\cdots \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$，则称 $f(x)$ 交错 $g(x)$。我们规定零多项式交错每个实根多项式，也被每个实根多项式交错。

实根多项式序列 $\left(f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)\right)$ 称为交错的，如果对任意 $0 \leq i < j \leq m$， $f_i(x)$ 交错 $f_j(x)$。下面的引理将在本文中应用。

**引理 2.1.** ([14]，定理 2.3)设 $\left(f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)\right)$ 是一个交错序列且首项系数均为正，则有

a) 对任意实数 $c_0, c_1, \cdots, c_m$，多项式 $f(x) = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \cdots + c_m f_m(x)$ 都是实根的，并且 $f_0(x)$ 交错 $f(x)$， $f(x)$ 交错 $f_m(x)$。

b) 对 $k \in \{0, 1, \cdots, m+1\}$，令

$$g_k(x) = x \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x) + \sum_{i=k}^{m} f_i(x),$$

则序列 $\left(g_0(x), g_1(x), \cdots, g_{m+1}(x)\right)$ 交错。

## 3. 主要结果

设 $m \geq 1$，$\boldsymbol{n}$ 表示一条 $n$ 元链，定义偏序集

$$J_{m,n} = \left\{ I \in J(m\boldsymbol{n}) \mid \rho(I) \leq n \right\} \cup \left\{ \hat{1} \right\},$$

即 $J_{m,n}$ 是 $m\boldsymbol{n}$ 的基数不超过 $n$ 的所有序理想按照包含关系再添加最大元 $\hat{1}$ 得到的偏序集，不失一般性，设 $m\boldsymbol{n}$ 为集合 $\{1, 2, \cdots, mn\}$ 上的偏序集，它的 $m$ 条 $n$ 元链分别记为 $L_1, L_2, \cdots, L_m$，其中 $L_i : (i-1)n+1 \prec (i-1)n+2 \prec \cdots \prec in$，$1 \leq i \leq m$。则有下面的定理。

**定理 3.1.** 对任意 $m, n \geq 1$， $h_{J_{m,n}}(x)$ 是实根的且 $h_{J_{m,n}}(x)$ 交错 $h_{J_{m,n+1}}(x)$。

**证明：** $J_{m,n}$ 中任一覆盖关系 $I_1 \prec I_2$ 称为一条边，记为 $(I_1, I_2)$。设 $(I_1, I_2) \in C(J_{m,n})$，若 $I_2 \neq \hat{1}$，则存在唯一元素 $a \in m\boldsymbol{n}$，使得 $a \in I_2 \setminus I_1$，定义边标记

$$\lambda(I_1, I_2) = \begin{cases} a, & I_2 \neq \hat{1} \\ n+1, & I_2 = \hat{1} \end{cases},$$

则 $\lambda$ 是一个严格 R-标记。因为对于 $J_{m,n}$ 中的闭区间 $[I_1, I_2]$，若 $I_2 \neq \hat{1}$，不妨设 $I_2 \setminus I_1 = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$，则 $[I_1, I_2]$ 存在唯一关于 $\lambda$ 严格递增的极大链 $I_1 \prec I_1 \cup \{a_1\} \prec I_1 \cup \{a_1, a_2\} \prec \cdots \prec I_1 \cup \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} = I_2$；若 $I_2 = \hat{1}$，设 $|I_1| = r$ 且 $|I_1 \cap L_1| = s$，则 $s \leq r \leq n$ 且 $I_1 \cap L_1 = \{1, 2, \cdots, s\}$，由 $\lambda$ 的定义知，$[I_1, I_2]$ 中任一条极大链 $C$ 的最后一条边的边标记为 $n+1$，因此容易验证，将 $L_1 \setminus I_1$ 中的最小的 $n-r$ 个元素依次添加进 $I_1$ 得到的极大链：

$I_1 \prec I_1 \cup \{s+1\} \prec I_1 \cup \{s+1,s+2\} \prec \cdots \prec I_1 \cup \{s+1,s+2,\cdots,s+n-r\} \prec \hat{1}$ 为 $[I_1,I_2]$ 中唯一一条关于 $\lambda$ 严格递增的极大链。因此 $\lambda$ 是 $J_{m,n}$ 上的一个严格 R-标记。易知 $J_{m,n}$ 是秩为 $n+1$ 的分次偏序集，则有

$$h_{J_{m,n}}(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \beta_{J_{m,n}}(S) x^{|S|}.$$

又 $\lambda$ 是 $J_{m,n}$ 上的严格 R-标记，因此对任意 $S \subseteq [n]$，

$$\beta_{J_{m,n}}(S) = \left|\left\{C \in M(J_{m,n}) \mid Des_\lambda(C) = S\right\}\right|.$$

对任意 $(I_1,I_2) \in C(J_{m,n})$，若 $I_2 \neq \hat{1}$，则存在唯一元素 $a \in m\boldsymbol{n}$，使得 $a \in I_2 \setminus I_1$，定义映射

$$\varphi(I_1,I_2) = \begin{cases} 1, & I_2 = \hat{1} \\ i, & a \in L_i \end{cases},$$

对于 $J_{m,n}$ 中任意一条极大链 $C: \hat{0} = I_0 \prec I_1 \prec \cdots \prec I_n = \hat{1}$，定义映射

$$\tilde{\varphi}(C) = \left(\varphi(I_0,I_1), \varphi(I_1,I_2), \cdots, \varphi(I_{n-1},I_n)\right),$$

容易看出 $\tilde{\varphi}$ 是从 $M(J_{m,n})$ 到

$$A_n^* = \underbrace{\{1,2,\cdots,m\} \times \{1,2,\cdots,m\} \times \cdots \times \{1,2,\cdots,m\}}_{n个} \times \{1\}$$

的双射。对任意 $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n+1}) \in A_n^*$，定义 $Des^*(\sigma) = \{i \in [n] \mid \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$。

下证对任意 $C \in M(J_{m,n})$，$Des_\lambda(C) = Des^*(\tilde{\varphi}(C))$。只需验证对于任意的 $(I_1,I_2),(I_2,I_3) \in C(J_{m,n})$，$\lambda(I_1,I_2) \geq \lambda(I_2,I_3)$ 当且仅当 $\varphi(I_1,I_2) > \varphi(I_2,I_3)$：

当 $I_3 \neq \hat{1}$ 时，设 $I_2 \setminus I_1 = \{a\}$，$I_3 \setminus I_2 = \{b\}$，其中 $a \in L_i$，$b \in L_j$，则有

$\lambda(I_1,I_2) \geq \lambda(I_2,I_3)$ 当且仅当 $a > b$ 当且仅当 $i > j$ 当且仅当 $\varphi(I_1,I_2) > \varphi(I_2,I_3)$；

当 $I_3 = \hat{1}$ 时，设 $I_2 \setminus I_1 = \{a\}$，此时 $\lambda(I_2,I_3) = n+1$，$\varphi(I_2,I_3) = 1$，则有

$\lambda(I_1,I_2) \geq \lambda(I_2,I_3) = n+1$ 当且仅当 $a \in L_i$ 且 $i \geq 2$ 当且仅当 $\varphi(I_1,I_2) = i > 1 = \varphi(I_2,I_3)$。

因此对任意的 $C \in M(J_{m,n})$，$Des_\lambda(C) = Des^*(\tilde{\varphi}(C))$。

再证对任意的 $S \subseteq [n]$，

$$\left|\left\{C \in M(J_{m,n}) \mid Des_\lambda(C) = S\right\}\right| = \left|\left\{\sigma \in A_n^* \mid Des^*(\sigma) = S\right\}\right|.$$

只需说明 $\tilde{\varphi}$ 是这两个集合之间的双射：

对任意的 $C \in \left\{C \in M(J_{m,n}) \mid Des_\lambda(C) = S\right\}$，我们有

$\tilde{\varphi}(C) \in A_n^*$ 且 $Des^*(\tilde{\varphi}(C)) = Des_\lambda(C) = S$。

因此 $\tilde{\varphi}(C) \in \left\{\sigma \in A_n^* \mid Des^*(\sigma) = S\right\}$。

对于任意的 $\sigma \in \left\{\sigma \in A_n^* \mid Des^*(\sigma) = S\right\}$，由 $\tilde{\varphi}$ 是从 $M(J_{m,n})$ 到 $A_n^*$ 的双射，因此存在唯一的 $C \in M(J_{m,n})$ 使得 $\sigma = \tilde{\varphi}(C)$，又因为 $Des_\lambda(C) = Des^*(\tilde{\varphi}(C)) = Des^*(\sigma) = S$，故 $C \in \left\{C \in M(J_{m,n}) \mid Des_\lambda(C) = S\right\}$。

综上可得 $\tilde{\varphi}$ 是从 $\left\{C \in M(J_{m,n}) \mid Des_\lambda(C) = S\right\}$ 到 $\left\{\sigma \in A_n^* \mid Des^*(\sigma) = S\right\}$ 的双射，因此它们的基数相同。

接下来我们定义集合

$$A_n = \{m-1\} \times \{1,2,\cdots,m\} \times \{2,3,\cdots,m+1\} \times \cdots \times \{n,n+1,\cdots,m+n-1\},$$

则存在 $A_n \to A_n^*$ 的双射：

$$(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n+1}) \mapsto (m+n-\sigma_{n+1}, m+n-1-\sigma_n, \cdots, m-\sigma_1).$$

我们用 $Des(\sigma)$ 表示集合 $\{i \in [n] \mid \sigma_i \geq \sigma_{i+1}\}$，其中 $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n+1}) \in A_n$。由于 $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$ 当且仅当

$m+i-\sigma_{i+1}>m+i-1-\sigma_i$，因此对于任意的 $S\subseteq[n]$，有

$$\left|\left\{\sigma\in A_n^*\mid Des^*(\sigma)=S\right\}\right|=\left|\left\{\sigma\in A_n\mid Des(\sigma)=n+1-S\right\}\right|,$$

且

$$\begin{aligned}\beta_{J_{m,n}}(S)&=\left|\left\{C\in M(J_{m,n})\mid Des_\lambda(C)=S\right\}\right|\\&=\left|\left\{\sigma\in A_n^*\mid Des^*(\sigma)=S\right\}\right|\\&=\left|\left\{\sigma\in A_n\mid Des(\sigma)=n+1-S\right\}\right|\end{aligned},$$

则

$$h_{J_{m,n}}(x)=\sum_{S\subseteq[n]}\beta_{J_{m,n}}(S)x^{|S|}=\sum_{S\subseteq[n]}\sum_{\substack{\sigma\in A_n\\Des(\sigma)=n+1-S}}x^{|S|}=\sum_{\sigma\in A_n}x^{des(\sigma)},$$

其中 $des(\sigma)=|Des(\sigma)|$。

设

$$h_{m,n,k}(x)=\sum_{\substack{\sigma\in A_n\\\sigma_{n+1}=k}}x^{des(\sigma)},$$

则有

$$h_{J_{m,n}}(x)=\sum_{k=n}^{m+n-1}h_{m,n,k}(x),$$

$$h_{m,n,k}(x)=\sum_{i=n-1}^{k-1}h_{m,n-1,i}(x)+x\sum_{i=k}^{m+n-2}h_{m,n-1,i}(x).$$

最后，我们用数学归纳法证明 $(h_{m,n,m+n-1},h_{m,n,m+n-2},\cdots,h_{m,n,n})$ 是首项系数均为正的交错序列：

当 $n=1$ 时，

$$(h_{m,n,m+n-1},h_{m,n,m+n-2},\cdots,h_{m,n,n})=(h_{m,1,m},h_{m,1,m-1},\cdots,h_{m,1,1})=(1,x,\cdots,x)$$

是首项系数均为正的交错序列。

假设 $n-1$ 时命题成立，即

$$(h_{m,n-1,m+n-2},h_{m,n-1,m+n-3},\cdots,h_{m,n-1,n-1})$$

是首项系数均为正的交错序列，则由引理 2.1。(b) 可知 $(h_{m,n,m+n-1},h_{m,n,m+n-2},\cdots,h_{m,n,n})$ 是首项系数均为正的交错序列。又由引理 2.1。(a) 可知 $h_{J_{m,n}}(x)$ 是实根的且

$$h_{J_{m,n-1}}(x)=\sum_{k=n-1}^{m+n-2}h_{m,n-1,k}(x)=h_{m,n,m+n-1}(x)$$

交错 $h_{J_{m,n}}(x)$。□

**推论 3.2.** $J_{m,n}$ 的链多项式 $p_{J_{m,n}}(x)$ 是实根的。

**证明：** 由等式(1)可知 $p_{J_{m,n}}(x)$ 和 $h_{J_{m,n}}(x)$ 的实根性相同，因此由定理 3.1。得 $p_{J_{m,n}}(x)$ 是实根的。□

**推论 3.3.** 对任意的 $m\ge1$，$n\ge0$，偏序集

$$K_{m,n}=\left\{x\in\underbrace{(\mathbf{n+1})\times(\mathbf{n+1})\times\cdots\times(\mathbf{n+1})}_{m个}\mid\rho(x)\le n\right\}\cup\{\hat{1}\}$$

的链多项式 $p_{K_{m,n}}(x)$ 是实根的。

**证明：** 当 $n=0$ 时， $p_{K_{m,0}}(x)=1+2x+x^2$ 是实根的；当 $n\geq 1$ 时，偏序集

$$\underbrace{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\times(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\times\cdots\times(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}_{m个}$$

同构于 $J(m\boldsymbol{n})$ ([13], 3.4 节)，因此 $K_{m,n}$ 与 $J_{m,n}$ 同构，它们的链多项式实根性相同。□

## 4. 总结与展望

本文将研究偏序集上链多项式的实根性问题的一种比较新颖的方法应用到了 $J(m\boldsymbol{n})$中的自定义偏序集 $J_{m,n}$ 上，并且证明了它的链多项式的实根性，从而使得分布格 $J(m\boldsymbol{n})$的链多项式的实根性问题得到了部分解决，在今后的研究中将以此为基础，改进方法进行进一步探索，最终期望彻底解决分布格 $J(m\boldsymbol{n})$上链多项式的实根性问题。

## 参考文献


[1] Stanley, R.P. (1989) Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, Andgeometry. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **576**, 500-535. https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1989.tb16434.x

[2] Brenti, F. (1994) Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry: An Update. Jerusalem Combinatorics'93. *Contemporary Mathematics*, **178**, 71-89. https://doi.org/10.1090/conm/178/01893

[3] Huh, J. (2012) Milnor Numbers of Projective Hypersurfaces and the Chromatic Polynomial of Graphs. *Journal of the American Mathematical Society*, **25**, 907-927. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-2012-00731-0

[4] Branden, P. (2015) Unimodality, Log-Concavity, Real-Rootedness and Beyond. *Mathematics*, 437-483.

[5] Mcconville, T., Sagan, B. and Smyth, C. (2021) On a Rank-Unimodality Conjecture of Morier-Genoud and Ovsienko. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112483. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112483

[6] Oguz, E.K. and Ravichandran, M. (2021) Rank Polynomials of Fence Posets Are Unimodal. Arxiv: 2112.00518vl.

[7] Haglund, J. and Zhang, P.B. (2019) Real-Rootedness of Variations of Eulerian Polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, **109**, 38-54. https://doi.org/10.1016/j.aam.2019.05.001

[8] Zhang, P.B. (2016) On the Real-Rootedness of the Local *h*-Polynomials of Edgewise Subdivisions. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **26**.

[9] Stanley, R.P. (1998) Graph Colorings and Related Symmetric Functions: Ideas and Applications: A Description of Results, Interesting Applications & Notable Open Problems. *Discrete Mathematics*, **193**, 267-286. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00146-0

[10] Neggers, J. (1978) Representations of Finite Partially Ordered Sets. *Information Systems*, **3**, 113-133.

[11] Stembridge, J.R. (2007) Counterexamples to the Poset Conjectures of Neggers, Stanley, and Stembridge. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 1115-1128. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04271-1

[12] Branden, P. (2004) Counterexamples to the Neggers-Stanley Conjecture. *American Mathematical Society*, **10**, 115-158. https://doi.org/10.1090/S1079-6762-04-00140-4

[13] Stanley, R. (2011) Enumerative Combinatorics (Volume 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49). 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[14] Savage, C.D. and Visontai, M. (2015) The s-Eulerian Polynomials Have Only Real Roots. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 1441-1446. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06256-9