Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(11), 8026-8031**
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111850

加权Sasaki空间的曲率形式和测地线

王昱丹，王　剑*

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2022年10月21日；录用日期：2022年11月15日；发布日期：2022年11月22日

摘　要

本文给出了加权Sasaki度量的局部表示，利用Kozul公式研究了加权Sasaki空间的切丛几何性质，建立了加权Sasaki空间形式中具有常截面曲率的测地线结构。

关键词

切丛，加权Sasaki度量

Curvature Form and Geodesics on the Weighted Sasaki Space

Yudan Wang, Jian Wang*

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Oct. 21st, 2022; accepted: Nov. 15h, 2022; published: Nov. 22nd, 2022

Abstract

In this paper, the local representation of the weighted Sasaki metric is given, the geometric properties of the tangent bundle equipped with weighted Sasaki metric is studied by using Kozul formula, and the geodesic structure with constant sectional curvature in the weighted Sasaki space form is established.

Keywords

Tangent Bundle, Weighted Sasaki Metric

*通讯作者。

文章引用: 王昱丹, 王剑. 加权 Sasaki 空间的曲率形式和测地线[J]. 应用数学进展, 2022, 11(11): 8026-8031.
DOI: 10.12677/aam.2022.1111850

1. 引言

有关切丛上几何与拓扑的研究一直受到众多数学家的注意，有了许多重要的结果。在文献[1]和[2]中，为了刻画一般黎曼流形的切丛和单位切向量组成的切球面丛上的几何结构，Sasaki 引入了切丛和切球面丛上的典型黎曼度量(称之为 Sasaki 度量)，已成为微分几何中的一种重要度量结构。进一步，在文献[3]中，作者详细研究了切球面丛上的几何性质及其表示方法，并给出了配置 Sasaki 度量下的切丛上的曲率形式。另一方面，在文献[3] [4] [5]中，作者刻画了切丛和切球面丛上的几何性质和测地线的结构。进一步，Gudmundsson 和 Kappos 等作者考虑了带有 Sasaki 度量的切丛上的几何性质，并给出了李括号、Levi-Civita 联络以及黎曼曲率的计算方法[6] [7] [8] [9] [10]。

基于这些研究，本文主要考虑加权 Sasaki 空间的曲率形式和测地线结构。首先，给出加权 Sasaki 度量的基本定义和相关理论；其次，利用 Kozul 公式刻画了加权 Sasaki 空间的曲率形式，建立了加权 Sasaki 空间形式中具有常截面曲率的测地线结构。

2. 加权 Sasaki 度量基本形式

本节主要介绍黎曼流形(M,g)的切丛 TM 上的加权 Sasaki 度量。给定 m 维的光滑流形 M，其光滑结构为 $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,x_\alpha)|\alpha\in I\}$。对于点 $p\in M$，设 T_pM 为 M 在 p 处的切空间。对于 M 在点 p 的局部坐标系 (U,x) 和 $p\in U$，定义

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p : f\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)=\partial_{e_k}\left(f\circ x^{-1}\right)(x(p)), \tag{2.1}$$

其中 $\{e_k|k=1,\cdots,m\}$ 是 m 维欧式空间的标准基底，则 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \middle| k=1,\cdots,m\right\}$ 是 T_pM 的一组基底。集合 $TM=\{(p,u)|p\in M,u\in T_pM\}$ 称为 M 的切丛，光滑映射 $\pi:TM\to M$ 为丛投影。对于局部坐标系 $(U,x)\in\mathcal{A}$，定义 $\bar{x}:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^m$ 满足

$$\bar{x}:\left(p,\sum_{k=1}^m u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\right)\mapsto\left(p,(u_1,\cdots,u_m)\right). \tag{2.2}$$

在切空间 T_pM 上的限制 $\bar{x}_p=\bar{x}\big|_{T_pM}:T_pM\to\{p\}\times\mathbb{R}^m$ 满足

$$\bar{x}_p:\sum_{k=1}^m u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\mapsto(u_1,\cdots,u_m). \tag{2.3}$$

切空间 $T_{(p,u)}TM$ 在点(p,u)处分解为水平子空间 $H_{(p,u)}$ 和垂直子空间 $V_{(p,u)}$ 两部分:

$$T_{(p,u)}TM=H_{(p,u)}\oplus V_{(p,u)}. \tag{2.4}$$

对于向量 $X\in T_pM$，X 到点$(p,u)\in TM$ 的水平提升对应向量 $X^h\in H_{(p,u)}$，满足 $\pi_*X^h=X$；垂直提升对应向量 $X^v\in V_{(p,u)}$，使得对所有 M 上的光滑函数 f，$X^v(df)=Xf$。

根据文献[3]，对于 TM 上包含垂直提升的向量场的运算，我们得到

$$\text{i)}\quad \left[X^h, Y^h\right] = [X, Y]^h - \left(R(X, Y)u\right)^v, \tag{2.5}$$

$$\text{ii)}\quad \left[X^h, Y^v\right] = \left(\nabla_X Y\right)^v, \tag{2.6}$$

$$\text{iii)}\quad \left[X^v, Y^v\right] = 0. \tag{2.7}$$

下面给出加权 Sasaki 度量的基本形式。

定义 2.1. 设(M, g)是一个黎曼流形，对应切丛上任意点$(p, u) \in TM$ 的 Sasaki 度量 $\hat{g}$ 定义为

$$\text{i)}\quad \hat{g}_{(p,u)}\left(X^h, Y^h\right) = g_p(X, Y), \tag{2.8}$$

$$\text{ii)}\quad \hat{g}_{(p,u)}\left(X^h, Y^v\right) = 0, \tag{2.9}$$

$$\text{iii)}\quad \hat{g}_{(p,u)}\left(X^v, Y^v\right) = g_p(X, Y), \tag{2.10}$$

对于任意的向量场 $X, Y \in C^\infty(TM)$ 和$(p, u) \in TM$ 。

定义 2.2. 设(M, g)是黎曼流形。设 $f_1 > 0$， $f_2 > 0$， $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$。则 M 上切丛 TM 的加权 Sasaki 度量 $\hat{g}^f$ 定义如下

$$\text{i)}\quad \hat{g}_{(x,u)}^{f_1,f_2}\left(X^h, Y^h\right) = f_1(p) g_p(X, Y), \tag{2.11}$$

$$\text{ii)}\quad \hat{g}_{(x,u)}^{f_1,f_2}\left(X^v, Y^h\right) = 0, \tag{2.12}$$

$$\text{iii)}\quad \hat{g}_{(x,u)}^{f_1,f_2}\left(X^v, Y^v\right) = f_2(p) g_p(X, Y), \tag{2.13}$$

对于任意的向量场 $X, Y \in C^\infty(TM)$。

3. 加权 Sasaki 空间的切丛几何性质

设 g 是流形 M 上的黎曼度量，记∇ 为对应的 Levi-Civita 联络。下面给出相关引理:

引理 3.1. 设(M, g)是黎曼流形， $\hat{\nabla}^{f_1,f_2}$ 是带有加权 Sasaki 度量 $\hat{g}^{f_1,f_2}$ 的切丛 TM 的 Levi-Civita 联络。那么

$$\begin{aligned}\text{i)}\quad \left(\hat{\nabla}_{X^h}^{f_1,f_2} Y^h\right)_{(p,u)} &= \left(\nabla_X Y\right)_{(p,u)}^h + \frac{1}{2 f_1(p)}\left(X(f_1)Y + Y(f_1)X - g(X, Y)\circ\pi\left(d\left(f_1\circ\pi\right)\right)^*\right)_p^h \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(R_p(X, Y)u\right)^v,\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{ii)}\quad \left(\hat{\nabla}_{X^h}^{f_1,f_2} Y^v\right)_{(p,u)} = \frac{X(f_2)}{2 f_2(p)} Y^v + \left(\nabla_X Y\right)_{(p,u)}^v + \frac{f_2}{2 f_1(p)}\left(R_p(u, Y)X\right)^h, \tag{3.2}$$

$$\text{iii)}\quad \left(\hat{\nabla}_{X^v}^{f_1,f_2} Y^h\right)_{(p,u)} = \frac{Y(f_2)}{2 f_2(p)} X^v + \frac{f_2}{2 f_1(p)}\left(R_p(u, X)Y\right)^h, \tag{3.3}$$

$$\text{iv)}\quad \left(\hat{\nabla}_{X^v}^{f_1,f_2} Y^v\right)_{(p,u)} = \frac{-g(X, Y)}{2 f_1(p)}\left(grad f_2\right)^h, \tag{3.4}$$

对于任意的 $X, Y \in C^\infty(TM), \xi = (p, u) \in TM$ 。

下面考虑带有加权 Sasaki 度量的切丛 TM 的黎曼曲率张量 $\hat{R}^{f_1,f_2}$ 。

命题 3.2. 设(M, g)是黎曼流形，$\hat{R}^{f_1,f_2}$ 是带有加权 Sasaki 度量 $\hat{g}^{f_1,f_2}$ 的切丛$\left(TM, \hat{g}^{f_1,f_2}\right)$的黎曼曲率张

量。那么下面的公式成立

i)
$$\hat{R}^{f_1,f_2}_{(p,u)}\left(X^v,Y^v\right)Z^v=\frac{-g(Y,Z)}{2f_1}\left(\frac{gradf_2\left(f_2\right)X^v}{2f_2}+\frac{f_2}{2f_1}\left(R_p\left(U,X\right)gradf_2\right)^h\right)+\frac{g(X,Z)}{2f_1}\left(\frac{gradf_2\left(f_2\right)Y^v}{2f_2}+\frac{f_2}{2f_1}\left(R_p(U,Y)gradf_2\right)^h\right),\tag{3.5}$$

ii)
$$\begin{aligned}\hat{R}^{f_1,f_2}_{(p,u)}\left(X^h,Y^h\right)Z^h=&\nabla_X\left(\nabla_YZ+A_{f_1}(Y,Z)\right)^h+A_{f_1}\left(X,\nabla_YZ+A_{f_1}(Y,Z)\right)^h-\frac{1}{2}\left(R_p\left(X,\nabla_YZ+A_{f_1}(Y,Z)\right)u\right)^v\\&-\nabla_Y\left(\nabla_XZ+A_{f_1}(X,Z)\right)^h-A_{f_1}\left(Y,\nabla_XZ+A_{f_1}(X,Z)\right)^h+\frac{1}{2}\left(R_p\left(Y,\nabla_XZ+A_{f_1}(X,Z)\right)u\right)^v\\&-\frac{X\left(f_2\right)}{4f_2}\left(R_p(Y,Z)u\right)^v-\left(\nabla_X\left(\frac{1}{2}R_p(Y,Z)u\right)\right)^v-\frac{f_2}{2f_1}\left(R_p\left(u,\frac{1}{2}\left(R_p(Y,Z)u\right)X\right)\right)^h\\&+\frac{Y\left(f_2\right)}{4f_2}\left(R_p(X,Z)u\right)^v+\left(\nabla_Y\left(\frac{1}{2}R_p(X,Z)u\right)\right)^v+\frac{f_2}{2f_1}\left(R_p\left(u,\frac{1}{2}\left(R_p(X,Z)u\right)Y\right)\right)^h\\&-\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^h+\frac{1}{2}\left(R_p([X,Y],Z)u\right)^v-A_{f_1}([X,Y],Z)^h+\frac{Z\left(f_2\right)}{2f_2}\left(R_p(X,Y)u\right)^v\\&+\frac{f_2}{2f_1}\left(R_p\left(u,R_p(X,Y)u\right)Z\right)^h,\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $A_{f_1}(X,Y)=\frac{1}{2f_1}\left(X\left(f_1\right)Y+Y\left(f_1\right)X-g(X,Y)\circ\pi\left(d\left(f_1\circ\pi\right)\right)^*\right)^h$， $X,Y,Z\in T_pM$ 。

定理 3.3. 设 (M,g) 是黎曼流形，TM 是带加权 Sasaki 度量 $\hat{g}^{f_1,f_2}$ 的切丛。那么 TM 是平坦的当且仅当 M 是平坦的且 $f_1=C$ （常数）。

证明：根据命题 3.2 和 $A_{f_1}=0$，我们有

$$X\left(f_1\right)Y+Y\left(f_1\right)X-g(X,Y)\circ\pi\left(d\left(f_1\circ\pi\right)\right)^*=0,\tag{3.7}$$

根据黎曼曲率为零得到 $\hat{R}^{f_1,f_2}\equiv 0$。反之假设 $\hat{R}^{f_1,f_2}\equiv 0$ 并计算三个水平向量场在 $(p,0)$ 的黎曼曲率张量，可得

$$\begin{aligned}\hat{R}^{f_1,f_2}_{(p,0)}\left(X^h,Y^h\right)Z^h=&R_{(p,0)}(X,Y)Z+A_{f_1}(Y,Z)\big|_{(p,0)}-A_{f_1}(X,Z)\big|_{(p,0)}+A_{f_1}\left(X,\nabla_YZ+A_{f_1}(Y,Z)\right)\big|_{(p,0)}\\&-A_{f_1}\left(Y,\nabla_XZ+A_{f_1}(X,Z)\right)\big|_{(p,0)}-A_{f_1}([X,Y],Z)\big|_{(p,0)}\\=&0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

则 $R=0$ 且 $f_1=C$ (常数)。

推论 3.4. 设 (M,g) 是黎曼流形，TM 是其带加权 Sasaki 度量 $\hat{g}^{f_1,f_2}$ 的切丛。如果 $f_1\neq C$ （常数），则 $\left(TM,\hat{g}^{f_1,f_2}\right)$ 不平坦。

4. 加权 Sasaki 空间的测地线

本节主要考虑 $\left(TM,\hat{g}^{f_1,f_2}\right)$ 上的测地线结构。

首先定义向量空间中一个点的邻域的概念。假设 $\left\{x^1,x^2,\cdots,x^n\right\}$ 是 M 的一组基，$\left\{y^1,y^2,\cdots,y^n\right\}$ 是每个切空间 $T_p(M)$ 和 $p\in M$ 关于自然基 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的笛卡尔坐标。给定基底对应开单位球 $\mathcal{B}\left\{x^1,x^2,\cdots,x^n\right\}$ 为

$$\mathcal{B}\left\{x^1, x^2, \cdots, x^n\right\} = \left\{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n : \alpha_j \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 < 1\right\}. \tag{4.1}$$

那么包含 $\mathcal{B}\left\{x^1, x^2, \cdots, x^n\right\}$ 的 $U(p)$ 称为点 p 的邻域，直观上表示在向量空间中完全包含给定点的集合。定义投影 π 为

$$\pi\left(x^i, y^i\right) = \left(x^i\right), i, j = 1, 2, \cdots, 2n, \tag{4.2}$$

其中局部坐标 $\left(x^i, y^i\right)$ 在开集 $\pi^{-1}(U) \subset TM$ 中。

切丛中的任何曲线 $\hat{\gamma} = (x(t), V(t))$ 都可以被视为基流形 M 中的曲线 $x(t)$ 以及沿其的单位向量场 $V(t)$。如果我们用带有加权 Sasaki 度量 $\hat{g}^{f_1, f_2}$ 的 *TM*，那么曲线 $\hat{\gamma} = (x(t), V(t))$ 是 *TM* 的测地线当且仅当 $\nabla_{x'} x' = 0$。结合 $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ 中的诱导坐标 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$，可以得到切向量场的基本表示:

$$T = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = x'^h + \left(\nabla_{x'} y\right)^v. \tag{4.3}$$

对应测地线 γ 可以说是 *TM* 上测地线 $\hat{\gamma}$ 的 π 下的图像。设 $\pi \circ \hat{\gamma}$ 是 M 上的浸入测地线，则 $\hat{\nabla}_T^{f_1, f_2} T = 0$。利用这个条件，我们得到

$$\left(\nabla_{x'} x'\right)^h = \frac{g\left(\nabla_{x'} y, \nabla_{x'} y\right)}{2 f_1} \left(gradf_2\right)^h - \frac{f_2}{f_1}\left(R\left(u, \nabla_{x'} y\right) x'\right)^h - \frac{x'\left(f_2\right)}{f_2}\left(\nabla_{x'} y\right)^v - A_{f_1}\left(x', x'\right)^h, \tag{4.4}$$

且

$$\nabla_{x'} \nabla_{x'} y = 0. \tag{4.5}$$

假设 $\left\langle A_{f_1}\left(x', x'\right), x'\right\rangle = 0$，我们得到

$$2x'\left(f_1\right) g\left(x', x'\right) - g\left(x', x'\right) \circ \pi\left(d\left(f_1 \circ \pi\right)\right)^* = 0. \tag{4.6}$$

从而

$$x'\left(f_1\right) = 0, \text{ i.e. } \frac{\mathrm{d}f_1\left(x(t)\right)}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4.7}$$

对应 M 上的任何测地线满足条件 $f_1 = c$ （常数)。最后，我们得到了

定理 3.10. 如果 $(x(t), y(t))$ 是测地线且 $|y(t)| = c$ （常数)，则 $\nabla_{x'} x' = -A_{f_1}\left(x', x'\right)$。

定理 3.11. 设 γ_1 和 γ_2 是 M_n 上从同一任意点出发的两个测地线，且它们最初的切向量是不平行的。如果 M 上两个测地线的提升是带有度量 $\hat{g}^{f_1, f_2}$ 的 *TM* 的测地线，那么 $f_1 = c$ （常数)。

5. 结论

本文主要对加权 Sasaki 空间的曲率形式和测地线结构进行讨论。给出加权 Sasaki 度量的局部表示，利用 Kozul 公式刻画了加权 Sasaki 空间的曲率形式，并建立了加权 Sasaki 空间形式中具有常截面曲率的测地线结构。在微分几何中对加权 Sasaki 空间的研究，对微分流形的切丛在数学和物理学的研究有促进意义。

参考文献

[1] Sasaki, S. (1958) On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, **10**, 338-354. https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668

[2] Sasaki, S. (1962) On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds II. *Tohoku Mathematical Journal*, **14**, 146-155. https://doi.org/10.2748/tmj/1178244169

[3] Kowalski, O. (1971) Curvature of the Induced Riemannian Metric on the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **1971**, 124-129. https://doi.org/10.1515/crll.1971.250.124

[4] Musso, E. and Tricerri, F. (1988) Riemannian Metrics on Tangent Bundles. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **150**, 1-19. https://doi.org/10.1007/BF01761461

[5] 王新民, 张宗劳. 矢量丛的微分几何[J]. 数学季刊: 英文版, 1990, 5(3): 90-96.

[6] Gudmundsson, S. and Kappos, E. (2002) On the Geometry of Tangent Bundles. *Expositiones Mathematicae*, **20**, 1-41. https://doi.org/10.1016/S0723-0869(02)80027-5

[7] Gudmundsson, S. and Kappos, E. (2002) On the Geometry of the Tangent Bundle with the Cheeger-Gromoll Metric, *Tokyo Journal of Mathematics*, **25**, 75-83. https://doi.org/10.3836/tjm/1244208938

[8] Oproiu, V. and Papaghiuc, N. (2009) General Natural Einstein Kähler Structures on Tangent Bundles. *Differential Geometry and its Applications*, **27**, 384-392. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.10.017

[9] Salimov, A. and Gezer, A. (2011) On the Geometry of the (1, 1)-Tensor Bundle with Sasaki Type Metric. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **32**, 369-386. https://doi.org/10.1007/s11401-011-0646-3

[10] Albuquerque, R. (2019) Notes on the Sasaki Metric. *Expositiones Mathematicae*, **37**, 207-224. https://doi.org/10.1016/j.exmath.2018.10.005