

关于图类 $K_n^m \pm G$ 的生成树数目

龚瑜, 朱婧倩

绍兴文理学院数理信息学院, 浙江 绍兴

收稿日期: 2022年10月21日; 录用日期: 2022年11月15日; 发布日期: 2022年11月23日

摘要

记 K_n^m ($n \geq 2, m \geq 1$) 是 n 个顶点的完全多重图, 即任意两个顶点间有且仅有 m 条边相连。 $K_n^m + G$ (或 $K_n^m - G$) 为在 K_n^m 基础上再添加(或从中删除)子图的对应边得到的图。Nikolopoulos和Papadopoulos利用Kirchhoff矩阵-树定理给出了 $K_n^m + G$ 生成树数目 $\tau(K_n^m \pm G) = m(mn)^{n-p-2} \det[mnI_p \pm L(G)]$ 。本文利用线性代数技巧(一个有关矩阵和的行列式计算公式), 对该定理给出了一种新的简洁证法。并给出当 G 为完全图、圈、路、二部图时 $K_n^m \pm G$ 生成数目的计算公式。

关键词

重图, 生成树, Kirchhoff矩阵-树定理, 特征值

On the Number of Spanning Trees of Graphs $K_n^m \pm G$

Yu Gong, Jingqian Zhu

School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Oct. 21st, 2022; accepted: Nov. 15th, 2022; published: Nov. 23rd, 2022

Abstract

Let K_n^m ($n \geq 2, m \geq 1$) be the complete multigraph n vertices, where any two different vertices, are connected by exactly m edges. $K_n^m + G$ (or $K_n^m - G$) is defined as the resulting graph obtained from K_n^m by adding (or removing) all edges of a subgraph G in K_n^m . Based on Kirchhoff's celebrated matrix-tree theorem, Nikolopoulos and Papadopoulos, obtained the number of spanning

trees of $K_n^m \pm G$ as follows: $\tau(K_n^m \pm G) = m(mn)^{n-p-2} \det[mnI_p \pm L(G)]$. In this paper, by using some linear algebra techniques (a special formula on a determinant of two matrices), a new simple proof for above-mentioned counting formula was given. Furthermore, some new results on $\tau(K_n^m \pm G)$ were also shown when G is the complete graph, the cycle, the path and the complete bipartite graph respectively.

Keywords

Multigraph, Spanning Tree, Kirchhoff Matrix-Tree Theorem, Eigenvalue

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图的生成树数目是图的一个同构不变量, 它不仅是图论和组合学的重要研究对象, 而且在计算机科学、统计物理、理论化学领域有一定的应用背景。例如, 生成树数目是一个重要的度量网络稳定性的指标, 人们一般认为生成树较多的网络更具有稳定性[1]; 另外生成树计数还与许多组合最优化问题有关[2]。关于图的生成树数目的刻画, 一个组合计数公式是 Feussner 组合公式[3]: $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$, 图 G 的生成树数目等于图 G 删除一条边 e 后得到的子图 $G-e$ 的生成树数目加上图 G 收缩该边 e 得到的子图 G/e 的生成树数目; 一个经典的代数方法 Kirchhoff 矩阵 - 树定理[4]。它是通过求 n 阶图的 $n-1$ 阶代数余子式达到求图的生成树的数目, 其优点是把图的生成树的计数问题转化成纯代数问题; 此外, 图 G 的生成树数目也等于图 G 的 Tutte 多项式在点(1, 1)处的特别值[5]。

本文讨论的图均为无向连通图, 且允许重边, 但忽略自环。给定图 $G = (V(G), E(G))$, $V(G)$ (简记 V) 为 G 的顶点集, $E(G)$ (简记 E) 为 G 的边集。若 G 的子图 T 是一个包含 V 中所有顶点的连通无圈子图, 则称 T 为图 G 的一棵生成树。图 $G = (V, E)$ 的两棵生成树 T_1, T_2 是不同的, 当且仅当 T_1, T_2 不同构或 $T_1 \cong T_2$ (同构), 但他们顶点标号不同。用 $\tau(G)$ 表示图 G 生成树数目; $G \cup H$ 表示图 G 和图 H 的并图; $G \vee H$ 表示图 G 和图 H 的联图, 即在并图 $G \cup H$ 的基础上将 G 的每一个顶点与 H 的每一个顶点相连所得到的图。记 K_n, C_n, P_n 分别表示 n 个顶点的完全图、圈、路; sK_2 表示 s 条平行边(不交边); $K_{p,q}$ 表示顶点集 $V(K_{p,q})$ 划分为 $V_1(|V_1|=p)$ 和 $V_2(|V_2|=q)$ 的完全二部图; $K_n^m (n \geq 2, m \geq 1)$ 表示 n 个顶点的完全多重图, 即任意两个顶点间有且仅有 m 条边相连。设 $G = (V, E)$ 是 p 个顶点的重图, 且 $V \subseteq V(K_n^m), E \subseteq E(K_n^m), K_n^m + G$ (或 $K_n^m - G$) 定义为 K_n^m 基础上再添加(或从中删除) K_n^m 的子图 G 的对应边得到的图。特别地, 当 $m=1$ 时, $K_n^m \pm G = K_n \pm G$, 这里, G 为 K_n 的某个子图, $K_n + G$ 表示再 K_n 的基础上添加子图 G 中所有的边所得到的重图。 $K_n - G$ 表示从 K_n 中去除子图 G 中的所有边所形成的图, 称其为 G 在 K_n 下的补图。当 $|V|=n$ 时, $K_n - G \cong \bar{G}$ (G 的补图)。当 $G = K_n, C_n, P_n$ 时, $K_n - G$ 的生成树数目 $\tau(K_n - G)$ 已被研究。设 G 是 p 个顶点的重图, 且 $V(G) \subseteq V(K_n^m), E(G) \subseteq E(K_n^m)$, 文献[6]中利用到 Kirchhoff 矩阵 - 树定理, 通过复杂的行列式(列)运算性质分析, 给出了 $K_n^m \pm G$ 生成树数的计算公式

$\tau(K_n^m \pm G) = m(mn)^{n-p-2} \det[mnI_p \pm L(G)]$ 。本文基于矩阵 - 树定理, 将利用一种加项行列式技巧(也就

是, 如果 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$, $D(x) = |a_{ij} + x|$ 是 D 的每一个元素加上 x 后获得的 n 阶新行列式(加项行列式), 那么 $D(x) = D + x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$, 这里 A_{ij} 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式[7]给出上式的一个新证明, 我们的证明清晰简单, 其方法或许可用于计算一些其他特别图类的生成树数目问题。同时, 当 G 取特殊图时, 给出 $K_n^m \pm G$ 生成树数目的一些新结果。

2. 相关定理与引理

记 $G = (V, E)$, 且 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。对 $\forall v_i, v_j \in V$, 若 v_i, v_j 相邻, 则记为 $v_i \sim v_j$ 。
 $N_G(v_i) = \{v_j \in V \mid v_i \sim v_j\}$, $d_i = d_G(v_i) = |N_G(v_i)|$ 。图的拉普拉斯矩阵定义如下,

$$L(G) = \begin{cases} d_i & i = j, \\ -1 & i \neq j, \text{ 且 } v_i \sim v_j, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (1)$$

Kirchhoff 矩阵树 - 定理表明 $L(G)$ 中任意元素的代数余子式就是图 G 的生成树数目, 即 $\tau(G) = (-1)^{i+j} \det(L_{i,j}(G))$ 其中 $L_{i,j}(G)$ 表示从 $L(G)$ 中删除第 i 行和第 j 列后得到的余子矩阵。由此, 容易得到生成树数目的另一表达式 $\tau(G) = (u_1(G) \cdots u_n(G)) / n$, 其中 $u_1(G) \geq u_2(G) \geq \dots \geq u_{n-1}(G) \geq u_n(G) = 0$ 为 $L(G)$ 的特征值, 即 G 的拉普拉斯特征值。

注意到图的拉普拉斯矩阵的任意元素的代数余子式相等且等于图的生成树数目, 简单运用引言提及的加项行列式技巧立即可得到 $\det[L(G) + aJ_n] = an^2 \tau(G)$, 一个更一般性的结果见如下引理。

引理 2.1. ([8]) 设 $G = (V, E)$, $\mathbf{u} = (u_i)$, $\mathbf{v} = (v_i)$ 是 $\mathbf{R}^{|V|}$ 中的列向量, 其中 $i \in V$, 则有

$$\det(L(G) + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \left(\sum_{i \in V} u_i \right) \left(\sum_{i \in V} v_i \right) \tau(G) \quad (2)$$

引理 2.2. ([9]) 设 G 是一个有 n 个顶点的图, \bar{G} 是 G 的补图。如果 G 的拉普拉斯矩阵的特征值为 $\mu_1(G), \mu_2(G), \dots, \mu_{n-1}(G), 0$, 那么 \bar{G} 对应的特征值为 $n - \mu_1(G), n - \mu_2(G), \dots, n - \mu_{n-1}(G), 0$, 即 $K_n - G$ 的特征值; $K_n + G$ 的特征值为 $n + \mu_1(G), n + \mu_2(G), \dots, n + \mu_{n-1}(G), 0$ 。

引理 2.3. ([10])

- 1) $L(K_n)$ 的特征值为 n 和 0 , 且重数分别为 $n-1$ 和 1 ;
 - 2) $L(C_n)$ 的特征值为 $2 - 2\cos \frac{2i\pi}{n}, i = 1, \dots, n$;
 - 3) $L(P_n)$ 的特征值为 $2 - 2\cos \frac{i\pi}{n}, i = 1, \dots, n$;
 - 4) 当 $K_{p,q}$ 的 $p = q$ 时, 其为正则图, 故 $L(K_{p,q}) = D - A = pI - A$, 所以特征值为 $0, 2p, p$, 并且 p 的重数为 $p+q-2$;
 - 5) 如果 $G = K_n - sK_2 (n \geq 2s > 0)$, 那么 $L(G)$ 的特征值为 $n-2, n, 0$, 并且重数分别为 $s, n-s-1$ 和 1 。
- 下面引理容易从基本的线性代数方法推导得到, 证明从略。

引理 2.4. 设 G 是一个有 n 个顶点的图, 则有

$$\det(L(G) + sI_n + tJ_n) = (s + nt) \prod_{i=1}^{n-1} [\mu_i(G) + s] \quad (3)$$

其中 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵, J_n 表示 $n \times n$ 全一矩阵。

3. 一个新证明

在文献[6], 作者 Nikolopoulos 和 Papadopoulos 利用到 Kirchhoff 矩阵 - 树定理和复杂的行列式行(列)运算, 证明了如下定理。

定理 3.1 K_n^m 为 m 完全重图, G 为任意图, 且 $V(G) \subseteq V(K_n^m), E(G) \subseteq E(K_n^m)$, 则有

$$\tau(K_n^m \pm G) = m(mn)^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} [mn \pm \mu_i(G)] \tag{4}$$

定理 3.1 的新证明: 只证明 $K_n^m + G$ 的情况即可($K_n^m - G$ 的情况证明类似), 由引理 2.1 可知, 取 \mathbf{u}, \mathbf{v} 为 $n \times 1$ 列向量时, 有如下等式成立:

$$\det[L(K_n^m + G) + \mathbf{u}\mathbf{v}^T] = \left(\sum_{i \in V} u_i\right) \left(\sum_{i \in V} v_i\right) \tau(K_n^m + G) \tag{5}$$

进一步, 令 \mathbf{u} 中元素全为 m , \mathbf{v} 中元素全为 1 时, 则上式简化为

$$\det[L(K_n^m + G) + mJ_n] = mn^2 \tau(K_n^m + G) \tag{6}$$

若对 $L(K_n^m + G) + mJ_n$ 适当分块, 则

$$L(K_n^m + G) + mJ_n = \begin{bmatrix} L(K_p^m + G) + m(n-p)I_p + mJ_p & O_{p \times (n-p)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ O_{(n-p) \times p} & L(K_{n-p}^m) + mpI_{n-p} + mJ_{n-p} \end{bmatrix}$$

其中, $O_{p \times (n-p)}$ 表示 $p \times (n-p)$ 的零矩阵, 从而,

$$\det[L(K_n^m + G) + mJ_n] = \det[L(K_p^m + G) + m(n-p)I_p + mJ_p] \cdot \det[L(K_{n-p}^m) + mpI_{n-p} + mJ_{n-p}] \tag{7}$$

注意到 $\mu_i(K_p^m + G) = mp + \mu_i(G)$, $\mu_i(K_{n-p}^m) + mp = mn$ 由引理 2.2 及引理 2.4 可知,

$$\begin{aligned} & \det[L(K_p^m + G) + m(n-p)I_p + mJ_p] \cdot \det[L(K_{n-p}^m) + mpI_{n-p} + mJ_{n-p}] \\ &= [m(n-p) + mp] \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_i(K_p^m + G) + m(n-p)] \cdot [mp + m(n-p)] \prod_{i=1}^{n-p-1} [\mu_i(K_{n-p}^m) + mp] \\ &= mn \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_i(K_p^m + G) + mn - mp] \cdot mn \prod_{i=1}^{n-p-1} [\mu_i(K_{n-p}^m) + mp] \\ &= (mn)^2 \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_i(K_p^m + G) + mn - mp] \cdot \prod_{i=1}^{n-p-1} [\mu_i(K_{n-p}^m) + mp] \\ &= (mn)^{n-p+1} \prod_{i=1}^{p-1} [mn + \mu_i(G)] \end{aligned}$$

从而, $mn^2 \tau(K_n^m + G) = (mn)^{n-p+1} \prod_{i=1}^{p-1} [mn + \mu_i(G)]$, 即 $\tau(K_n^m + G) = m(mn)^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} [mn + \mu_i(G)]$ 。同

理可得 $\tau(K_n^m - G) = m(mn)^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} [mn - \mu_i(G)]$ 。

因此

$$\tau(K_n^m \pm G) = m(mn)^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} [mn \pm \mu_i(G)] \tag{8}$$

特别地, 当 $m=1$ 时, 有

$$\tau(K_n \pm G) = n^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} [n \pm \mu_i(G)] \tag{9}$$

推论 1. 当 $G = K_p (p \leq n)$ 时, $\tau(K_n^m \pm K_p) = m(mn)^{n-p-1} (mn \pm p)^{p-1}$ 。

推论 2. 当 $G = C_p (p \leq n)$ 时, $\tau(K_n^m \pm C_p) = m(mn)^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} \left[mn \pm \left(2 - 2 \cos \frac{2i\pi}{p} \right) \right]$ 。

推论 3. 当 $G = P_p (p \leq n)$ 时, $\tau(K_n^m \pm P_p) = m(mn)^{n-p-1} \prod_{i=1}^{p-1} \left[mn \pm \left(2 - 2 \cos \frac{i\pi}{p} \right) \right]$ 。

推论 4. 当 $G = K_{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}} (p \leq n)$ 时, $\tau(K_n^m \pm K_{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}}) = m(mn)^{n-p-1} \left(mn \pm \frac{p}{2} \right)^{p-2} (mn \pm p)$ 。

推论 5. 当 $G = K_p - qK_2 (p \geq 2q)$ 时, $\tau(K_n^m \pm G) = m(mn)^{n-p-1} [mn \pm (p-2)]^q (mn \pm p)^{p-q-1}$ 。

4. 总结

本文主要研究了组合图 $K_n^m \pm G$ 的生成树计数问题。我们的计算方法离不开一个基本原理: 矩阵 - 树定理, 这个定理一般将生成树的计算问题转换为一个行列式计算问题, 而高阶行列式计算常常是困难问题。对这类图 $K_n^m \pm G$ 的生成树计数, 本文运用了线性代数理论中的一种加项行列式计算技巧 $D(x) = D + x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$, (这里 $D(x) = |a_{ij} + x|$, 是 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的每一个元素加上 x 后获得的行列式 (加项行列式), A_{ij} 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式), 给出了文献[6]主要定理的一个新证明, 本文的证明方法或许具备可推广性。此外, 给出了当 G 为完全图、圈、路、二部图时, $K_n^m \pm G$ 生成树数目的一些具体结果。

致 谢

感谢指导老师对课题的指导, 本论文发表受省一流线下课程《高等代数》建设、省自然科学基金(Y21A010028)资助。

参考文献

- [1] Boesch, F.T. (1986) On Unreliability Polynomials and Graph Connectivity in Reliable Network Synthesis. *Journal of Graph Theory*, **10**, 339-325. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190100311>
- [2] Wu, B.Y. and Chao, K.M. (2004) *Spanning Trees and Optimization Problems*. Chapman and Hall/CRC, New York. <https://doi.org/10.1201/9780203497289>
- [3] Feussner, W. (1902) Über Stromberzeugung in Netzformigen Leitern. *Annalen der Physik*, **314**, 1304-1329. <https://doi.org/10.1002/andp.19023141320>
- [4] Biggs, N. (1993) *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, London.
- [5] Tutte, W.T. (1954) A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, **6**, 80-91. <https://doi.org/10.4153/CJM-1954-010-9>
- [6] Nikolopoulos, S.D. and Papadopoulos, C. (2006) On the Number of Spanning Trees of $K_n^m \pm G$ Graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **8**, 235-248. <https://doi.org/10.46298/dmtcs.364>

- [7] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第五版. 王萼芳, 石生明, 修订. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [8] Klee, S. and Stamps, M.T. (2020) Linear Algebraic Techniques for Spanning Tree Enumeration. *The American Mathematica Monthly*, **127**, 297-307. <https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1708171>
- [9] Kelmans, A.K. and Chelnokov, V.M. (1974) A Certain Polynomial of a Graph and Graphs with an Extremal Number of Trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **16**, 197-214. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90065-3](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90065-3)
- [10] Bapat, R.B. 图与矩阵[M]. 吴少川, 译. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014: 64-68.