

有遗失边的 k 元 n 立方体在 MM^* 模型下的局部诊断度

王世英, 窦丰, 赵丽娜, 黄瑜

山西师范大学, 数学与计算机科学学院, 山西 太原

收稿日期: 2022年1月16日; 录用日期: 2022年2月14日; 发布日期: 2022年2月21日

摘要

一个多重处理器系统的诊断度是一个非常重要的研究课题, 它是度量多重处理器系统故障诊断的重要参数。作为重要的互连网络拓扑结构, k 元 n 立方体具有许多良好的性质。在本文中, 我们研究了 k 元 n 立方体 Q_n^k ($n \geq 3, k \geq 6$) 在 MM^* 模型下的局部诊断度, 证明了 Q_n^k ($n \geq 3, k \geq 6$) 即使存在 $2n-2$ 条遗失边仍具有强局部诊断性, 并且证明了 $2n-2$ 是最优值。

关键词

互连网络, 局部诊断度, k 元 n 立方体, 延展星结构, MM^* 模型

Local Diagnosability of k -Ary n -Cubes with Missing Edges under the MM^* Model

Shiying Wang, Feng Dou, Lina Zhao, Yu Huang

College of Mathematics and Information Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: Jan. 16th, 2022; accepted: Feb. 14th, 2022; published: Feb. 21st, 2022

Abstract

Diagnosability is an important research subject and parameter in measuring the fault diagnosis of multiprocessor systems. As a celebrated topology structure of interconnection networks, a k -ary n -cube Q_n^k has numerous great properties. In this paper, we study the diagnosability of k -ary n -cubes Q_n^k and demonstrate that Q_n^k ($n \geq 3, k \geq 6$) possesses the strong property even if there exist $2n-2$ missing edges in it under the MM^* model and the result is optimal with respect to the

number of missing edges.

Keywords

Interconnection Networks, Local Diagnosability, k -Ary n -Cubes, Extended Star Structure, MM* Model

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

大部分多重处理器系统都以互连网络作为基本的拓扑结构并且通常用图来表示一个互连网络，其中顶点代表处理器，边代表处理器之间的通信链路。我们用图和网络互换。对于多重处理器系统来说，其网络拓扑性质的研究是非常重要的。诊断度是度量多重处理器系统故障诊断能力的重要参数，它是互连网络中热门的研究课题之一。此外，在系统中，一些处理器可能是故障的。所以，为了保证计算机系统的可靠性，系统中的故障处理器应该被诊断出来，处理故障系统的第一步是故障识别，在多重处理器系统中存在的故障处理器在此步中一一被识别出来，这一识别过程被称为系统的诊断。在之前的研究中，研究者已经提出了许多系统诊断模型，其中被广泛使用的是比较模型(MM 模型)。MM 模型是由 Malek 和 Maeng [1]首次提出的。后来，Sengupta 和 Dahbura [2]提出了 MM*模型，它是 MM 模型的一个特例。Dahbura 和 Masson [3]提出了一个时间复杂度为 $O(n^{2.5})$ 的算法。在故障处理器的数量不超过 t 的情况下，如果所有故障的处理器能够被识别出来并且不被替换，我们就称这个系统是 t -可诊断的。一个系统 G 的诊断度 $t(G)$ 是使得 G 是 t -可诊断的 t 的最大值[4] [5] [6] [7]。

在之前的研究中，人们一直考虑的是一个多重处理器系统的全局诊断度。在文献[8]中，Hsu 和 Tan 首次提出了一种测量多重处理器系统 G 的局部诊断度的概念。这种新的概念研究的是每个处理器的局部性质而不是全局性质。如果我们只考虑全局故障或无故障状态，我们就会失去系统的一些细节。在文献[9]中，Chiang 和 Tan 提出了一种有用的确定系统诊断度的新方法，即延展星结构法。该方法可以保证节点的诊断性，并给出了比较诊断模型(MM 模型)下局部可诊断性的充分条件，他们发现在局部诊断性和传统的诊断性之间存在很强的关系。如果系统 G 中每个点的局部诊断性等于它的度，那么系统 G 具有强局部诊断性。根据这个概念，强局部诊断性被广泛研究。在文献[10]中，Chiang 等人证明了 $n(n \geq 4)$ 维星图的诊断性是 $n-1$ ，且即使它存在 $n-3$ 条遗失边，仍保持强局部诊断性。后来，Cheng 等又研究了置换树生成的 Cayley 图[11]和 (n, k) 星图和 2 树生成的 Cayley 图[12]。在 2018 年，Wang 和 Ma [13]证明了交错群图 AG_n 在 MM*模型下即使存在 $2n-7$ 条遗失边，仍保持强局部诊断性。2020 年，Wang 和 Ma [14]证明了排列图 $A_{n,k}$ 在 MM*模型下即使存在 $(k-1)(n-k)-1$ 条遗失边，仍保持强局部诊断性，且证明了 $(k-1)(n-k)-1$ 是最优值。2020 年，Zhou [15]等人证明了扩展 k 元 n 立方体 XQ_n^k 在比较模型下即使存在 $4n-5$ 条遗失边，仍保持强局部诊断性。2020 年，Feng [16]等人证明了轮图 CW_n 在 MM*模型下即使存在 $2n-4$ 条遗失边，仍保持强局部诊断性，且证明了 $2n-4$ 是最优值。2021 年，Fan [17]等人证明了 Q_n 在 MM*模型下即使存在 $n-2$ 条遗失边仍具有强局部诊断性，并且证明了 $n-2$ 是最优值。同时，他们证明了 FQ_n 在 MM*模型下即使存在 $n-1$ 条遗失边仍具有强局部诊断性，并且证明了 $n-1$ 是最优值。

k 元 n 立方体 Q_n^k 有许多良好的性质。比如点传递性[18]，边传递性[19]，小直径[20] [21]等。在这篇

文章中, 我们证明了 Q_n^k 的诊断度是 $2n$, 且在 MM*模型下即使存在 $2n-2$ 条遗失边, 仍保持强局部诊断性并且是最优的。

2. 基本概念

多重处理器系统被表示为一个无向的简单图 $G=(V, E)$, 其中 $V=V(G)$, $E=E(G)$, 分别表示图 G 的顶点集和边集, 且顶点集 $V(G)$ 代表处理器, 边集 $E(G)$ 代表处理器之间的通信链路。对于任意的非空顶点子集 $V' \subset V$, 则以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图, 称为 V' 在 G 中的导出子图, 记作 $G[V']$ 。 $d_G(v)$ 是指 G 中与 v 关联的边的数目, $\delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度。对于 G 中任意一个顶点 v , 都有 $d_G(v)=k$, 则称图 G 是 k -正则的。对于任意 $v \in V$, $N_G(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的所有顶点组成的集合。对于 $u \in N_G(v)$, u 称为 v 的一个邻点。对于邻集、度等这些概念, 在没有歧义产生时, 我们通常省略图的下标。 G 的一条途径是指一个有限非空序列 $P=v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_nv_n$, 它的项交替地为顶点和边, 使得对 $1 \leq i \leq n$, e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i , 称 P 是从 v_0 到 v_n 的一条途径。 v_0 和 v_n 分别称为 P 的起点和终点, 整数 n 称为 P 的长。若途径 P 的顶点 v_0, v_1, \dots, v_n 互不相同, 则 P 称为路。我们用 $P=\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ 表示一条长为 n 的起点是 v_0 , 终点是 v_n 的路。如果把 G 的点集任意划分为两个非空子集 X 和 Y , 总存在一条边满足其中一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 那么 G 是连通的。一个图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 分别是把图 G 变成一个不连通图或仅一个点所需移除的点和边的最小数量。一个二部图是一个点集能分解成两个子集 X 和 Y 的图, 使得每条边都有一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 这样的划分 (X, Y) 被称为图的一个二分类。一个图 G_1 与另一个图 G_2 同构(记为 $G_1 \cong G_2$) 当且仅当存在一个双射 $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ 使得对于任意两个顶点 $u, v \in V(G_1)$, $uv \in E(G_1)$, $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2)$ 。文中其他未定义而直接使用的符号和术语参见文献[22]。

3. MM*模型

在 MM 模型中, 一个处理器发送同样的任务给一对不同的邻点, 然后比较它们的反应结果。一个系统 $G=(V(G), E(G))$ 的比较方案被建模为一个多重图, 用 $M=(V(G), L)$ 表示, 其中 L 是被标记的边集。一条被标记的边 $(u, v)_w \in L$ 代表用一个顶点 w 去比较两个相邻顶点 u 和 v , 这意味着 $uw, vw \in E(G)$ 。如果节点 w 是非故障的(故障的), 那么测试结果是可靠的(不可靠的)。如果 $u, v \in F$ 且 $w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $u \in F$ 且 $v, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $v \in F$ 且 $u, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $u, v, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 0$ 。 $M=(V(G), L)$ 中所有比较结果的集合称为诊断的症候, 用 σ 表示。如果比较 $(u, v)_w$ 的结果不一致, 则 $\sigma((u, v)_w)=1$; 否则, $\sigma((u, v)_w)=0$ 。因此, 一个症候是从 L 到 $\{0, 1\}$ 的一个函数。MM*中每个节点必须测试其任意一对相邻节点。即如果 $uw, vw \in E(G)$, 则 $(u, v)_w \in L$ 。在系统中, 所有故障处理器的集合叫做一个故障集, 它可以是 $V(G)$ 的任意一个子集。在 MM*模型下, 对于一个给定的症候 σ , 如果对任意的 $(u, v)_w \in L$ 满足 $w \in V \setminus F$, $\sigma((u, v)_w)=1$ 当且仅当 $u, v \in F$ 或 $u \in F$ 或 $v \in F$, 则我们称故障子集 $F \subseteq V(G)$ 和 σ 是一致的。我们用 $\sigma(F)$ 表示和 F 一致的所有症候的集合。设 F_1 和 F_2 是 $V(G)$ 中两个不同的子集。如果 $\sigma(F_1) \cap \sigma(F_2) \neq \emptyset$, 则 (F_1, F_2) 是不可区分对; 否则, (F_1, F_2) 是可区分对。

定义 3.1 [15] 一个系统 $G=(V, E)$ 是 t -可诊断的, 当且仅当 V 中每一对不同的故障子集 F_1 和 F_2 , 其中 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, (F_1, F_2) 是可区分对。

设 F_1, F_2 是 $G=(V, E)$ 中两个不同子集, 对称差 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$ 。

定理 3.1 [2] [3] 一个系统 $G=(V, E)$ 在 MM*模型下是 t -可诊断的, 当且仅当对于 V 的每一对不同的故障集 F_1 和 F_2 , 其中 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, 满足下列条件之一(见图 1):

- 1) 存在 $u, w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$ 满足 $uw \in E, vw \in E$ 。
- 2) 存在 $u, v \in F_1 \setminus F_2$ 和 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 满足 $uw \in E, vw \in E$ 。
- 3) 存在 $u, v \in F_2 \setminus F_1$ 和 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 满足 $uw \in E, vw \in E$ 。

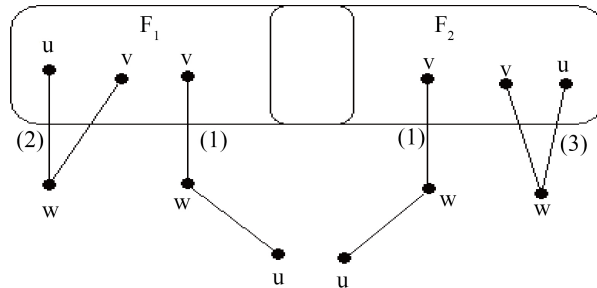


Figure 1. Illustration of a distinguishable pair under the MM* model

图 1. 在 MM*模型下可区分

4. 局部诊断度

引理 4.1 [10] 系统 $G = (V, E)$ 在 x 点处是局部 t -可诊断的, 如果给定一个测试症候 σ_F , 它是由系统在一组包含 x 的故障顶点集 F 的情况下产生的, $|F| \leq t$, 那么故障顶点集 F' 的每一个集合与 σ_F 一致, 且 $|F'| \leq t$ 必须包含顶点 x 。

引理 4.2 [9] 系统 $G = (V, E)$ 中, 如果 $x \in F_1 \Delta F_2$ 且对于 V 的每一对不同的故障子集 F_1 和 F_2 是可区分的, 其中 $|F_1| \leq t, |F_2| \leq t$, 则点 x 是局部 t -可诊断的。

引理 4.1 和引理 4.2 是等价的。

引理 4.3 [10] 一个系统 $G = (V, E)$ 是 t -可诊断的当且仅当 G 中每个点都是局部 t -可诊断的。

引理 4.4 [10] 一个系统 $G = (V, E)$ 中, G 中 x 点是局部 t -可诊断的 t 的最大值被定义为点 x 的局部诊断度 $t_l(x)$, 即 $t_l(x) = \max \{t: G \text{ 在 } x \text{ 点是局部 } t\text{-可诊断的}\}$ 。

引理 4.5 [10] 一个系统 $G = (V, E)$ 的诊断度 $t(G)$ 等于 G 中每个点的局部诊断度的最小值, 即 $t(G) = \min \{t_l(x): \text{对于所有的 } x \in V(G)\}$ 。

定义 4.1 [10] 设 x 是一个图 $G = (V, E)$ 中的一个点。若 $d_G(x) \geq n$, 我们定义一个延展星图 $ES(x; n)$, 其中 $d_{ES(x;n)}(x) = n$, 点集 $V(ES(x; n)) = \{x\} \cup \{v_{ij}: i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3, 4\}$, 边集 $E(ES(x; n)) = \{(x, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), (v_{i2}, v_{i3}), (v_{i3}, v_{i4}): i = 1, 2, \dots, n\}$ 。

注意到 x 称为 $ES(x; n)$ 的根。

引理 4.6 [10] 设 x 是系统 $G = (V, E)$ 中的一个点且 $d_G(x) = n$ 。如果点 x 在 G 中存在一个延展星图 $ES(x; n)$, 则 x 的局部诊断度是 n 。

引理 4.7 [23] 设 G 是一个系统的图表示, 那么在 MM*模型下, 诊断度 $t(G) \leq \delta(G)$ 。

引理 4.8 [10] 设 x 是图 $G = (V, E)$ 中的一个点。如果 x 的局部诊断度等于它在 G 中的度, 即 $t_l(x) = d_G(x)$, 则这个点 x 有强局部诊断性。

引理 4.9 [10] 设 $G = (V, E)$ 是一个图。如果 G 中每个点的局部诊断度都等于它在 G 中的度, 即对于所有的 $x \in V(G)$ 都有 $t_l(x) = d_G(x)$, 则 G 有强局部诊断性。

5. k 元 n 立方体 Q_n^k

定义 5.1 [24] k 元 n 立方体 $Q_n^k (n \geq 1, k \geq 3)$ 是一个有 k^n 个顶点和 nk^n 条边的 $2n$ 正则图。 k 元 n 立方体

Q_n^k 的顶点 u 用长为 n 的二进制字符串表示, 如 $u = u_0u_1 \cdots u_{n-1}$, 其中 $0 \leq u_i \leq k-1, i = 0, 1, \dots, n-1$ 。两个顶点 $u = u_0u_1 \cdots u_{n-1}$ 和 $v = v_0v_1 \cdots v_{n-1}$ 相邻当且仅当存在一个整数 $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 使得 $u_j = v_j \pm 1 \pmod{k}$, 同时 $u_l = v_l$ 对于 $l \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{j\}$ 。为了陈述清晰, 我们在后文中省略了类似“(mod k)”的表达形式。

我们将 Q_n^k 划分为 k 个互不相交的子图 $Q_n^k[0], Q_n^k[1], \dots, Q_n^k[k-1]$ (在不产生歧义的前提下可以缩写为 $Q[0], Q[1], \dots, Q[k-1]$), 各子图内每个顶点 $u = u_0u_1 \cdots u_{n-1} \in V(Q_n^k)$ 在最后一个位置 u_{n-1} 上有一个固定的整数 i , 其中 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ 。显然, $Q[i]$ 同构于 Q_{n-1}^k , 对于 $0 \leq i \leq k-1$ 。6 元 1 立方体, 5 元 2 立方体如图 2 所示。设 $u \in V(Q[i])$, 那么 $N(u) \setminus V(Q[i])$ 称为 u 的外邻点集。连接来自不同子图 $Q[i]$ 和 $Q[j]$ 的顶点的边称为外部边, 而将连接来自相同子图 $Q[i]$ 的顶点的边称为内部边。

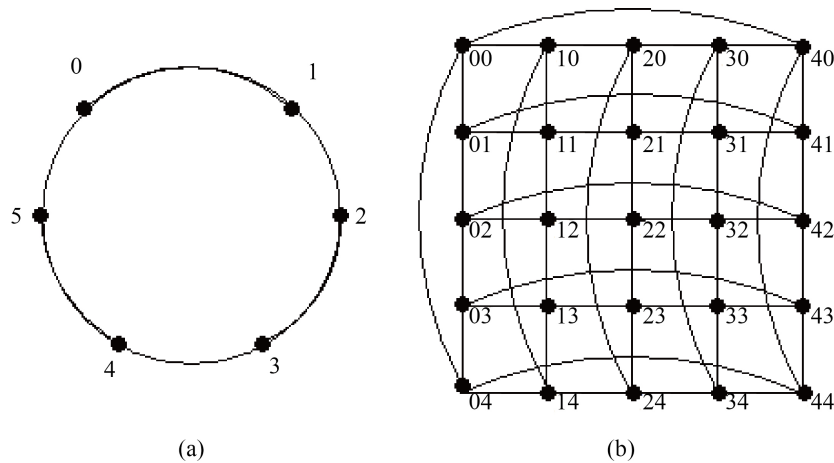


Figure 2. (a) Q_1^6 ; (b) Q_2^5
图 2. (a) 6 元 1 立方体; (b) 5 元 2 立方体

引理 5.1 [18] [19] k 元 n 立方体 $Q_n^k (k \geq 3)$ 是点传递和边传递的。

引理 5.2 [18] k 元 n 立方体 Q_n^k 是二部图当且仅当 k 为偶数。

引理 5.3 [18] k 元 n 立方体 $Q_n^k (n \geq 2, k \geq 3)$ 有下列性质:

- (1) $\kappa(Q_n^k) = \lambda(Q_n^k) = 2n$ 。
- (2) $Q[i]$ 中每个点与 $2n-2$ 条内部边关联, 与 2 条外部边关联。
- (3) $Q[i]$ 中每个点的两个外邻点在不同的子图中。

6. k 元 n 立方体 Q_n^k 的诊断度

引理 6.1 对于 k 元 n 立方体 $Q_n^k (n \geq 3, k \geq 6)$ 中任意一点 x , 在 x 点处存在一个延展星图 $ES(x; 2n)$ 。

证明 我们可以在 x 点处找到一个延展星图 $ES(x; 2n)$ 作为 k 元 n 立方体 Q_n^k 的子图。由引理 5.1, Q_n^k 是点传递的。不失一般性, 设 $x = 000 \cdots 00 = (0)$ 是延展星图 $ES(x; 2n)$ 的根。当 $n = 3, k \geq 6$ 时, 我们可以在 x 点处找到一个延展星图 $ES(x; 6)$ (见图 3)。显然, $ES(x; 6)$ 中的各点均不相同。

假设这个结论对于 $Q_{n-1}^k (n \geq 4, k \geq 6)$ 成立, 即在 Q_{n-1}^k 中存在一个延展星图 $ES(x; 2n-2)$ 。现在我们证明这个结论对于 Q_n^k 也成立, 即在 $Q_n^k (n \geq 4, k \geq 6)$ 中存在一个延展星图 $ES(x; 2n)$ 。我们根据最右边的位置将 Q_n^k 划分为 $Q[0], Q[1], \dots, Q[k-1]$, 那么 $Q[i] (0 \leq i \leq k-1)$ 同构于 Q_{n-1}^k 。由归纳假设, 在 $Q[0]$ 中存在一个延展星图 $ES(x; 2n-2)$ 。由引理 5.3, 点 $x = 000 \cdots 00 = (0) \in V(Q[0])$, 它有两个外部邻点在不同的 $Q[j]$ 中, 分别为: $000 \cdots 01 \in V(Q[1])$ 和 $000 \cdots 0(k-1) \in V(Q[k-1])$ 。记

$P_1 = \langle 000 \cdots 01, 100 \cdots 01, 200 \cdots 01, 210 \cdots 01 \rangle$ 是 $Q[1]$ 中的一条 3 长路,
 $P_2 = \langle 000 \cdots 0(k-1), 100 \cdots 0(k-1), 200 \cdots 0(k-1), 300 \cdots 0(k-1) \rangle$ 是 $Q[k-1]$ 中的一条 3 长路。我们将 P_1 和 P_2 都连接到 x 点, 并且将它们与 $ES(x; 2n-2)$ 相结合。因此, 我们可以在 Q_n^k 中 x 点处得到一个延展星图 $ES(x; 2n)$, 即在 Q_n^k 中 x 点处存在一个延展星图 $ES(x; 2n)$ 。

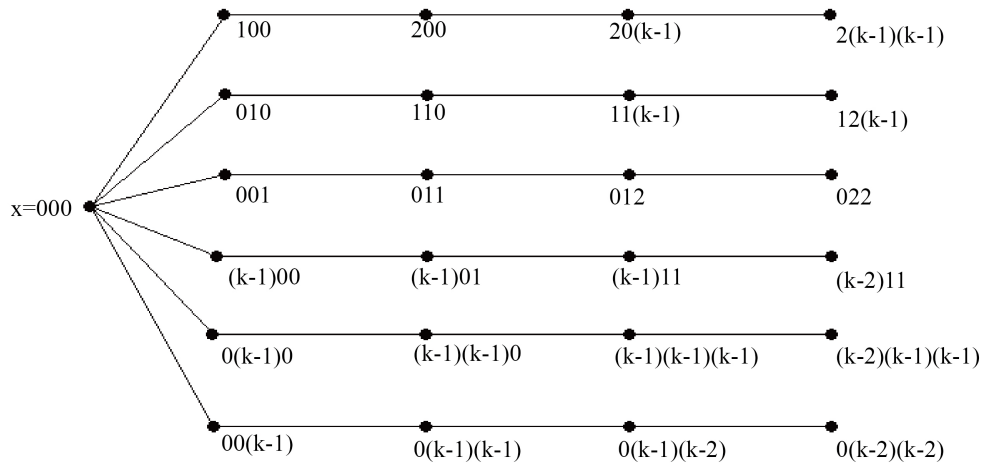


Figure 3. The first $ES(x; 6)$ in Q_3^k
图 3. Q_3^k 的第一个延展星图 $ES(x; 6)$

定理 6.1 设 Q_n^k 是一个 k 元 n 立方体且 $n \geq 3, k \geq 6$, 则 Q_n^k 的诊断度是 $2n$, 即 $t(Q_n^k) = 2n$ 且 Q_n^k 有强局部诊断性。

证明 通过引理 4.6 和引理 6.1, Q_n^k 中每个点 x 的局部诊断度是 $2n$ 。由引理 4.3, Q_n^k 是 $2n$ -可诊断的。由 Q_n^k 的定义可知, $\delta(Q_n^k) = 2n$ 。由引理 4.3 和引理 4.7, $t(Q_n^k) = 2n$, 即 Q_n^k 的诊断度是 $2n$ 。因为 Q_n^k 中每个点 x 的度是 $2n$, Q_n^k 中每个点的局部诊断度等于它的度。由引理 4.8, Q_n^k 中每个点 x 有强局部诊断性。由引理 4.9, Q_n^k 有强局部诊断性。

引理 6.2 设 F_e 是 $Q_n^k (n \geq 3, k \geq 6)$ 中任意的遗失边集, $|F_e| \leq 2n-2$ 。 $Q_n^k - F_e$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$, 其中 $x \in V(Q_n^k)$ 。

证明 由引理 5.1, Q_n^k 是一个点传递图, 不失一般性, 设 $x = 00 \cdots 00 = (0)$ 是延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 的根。我们通过对 n 进行归纳来证明这个引理。当 $n = 3$ 时, 我们可以找到五个延展星图 $ES(x; 6)$, 它们的边除了与 x 关联的边之外均不相同, 其中第一个延展星图与引理 6.1 的证明中提到的相同(见图 3), 另外四个延展星图分别如图 4~7 所示。

因为 $|F_e| \leq 2n-2 = 2 \times 3 - 2 = 4$, 我们只需要考虑有四条遗失边的情况。设 $t (0 \leq t \leq 4)$ 是与 x 相关联的遗失边的数目, 那么 $4-t$ 就是不与 x 相关联的遗失边的数目。如果 $t = 0$, 那么 $4-t = 4$, 则存在四条遗失边不与 x 相关联。由于我们已经找到了五个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x; 6)$, 所以我们可以从五个延展星图 $ES(x; 6)$ 中找到一个不包含遗失边的延展星图 $ES(x; 6)$ 。如果 $t \neq 0$, 我们再分情况讨论。当 $t = 1$ 时, 则 $4-t = 3$ 。如上所述, 我们已经找到了五个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x; 6)$, 我们可以从这五个当中至少找到四个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x; 5)$, 这样我们就可以找到一个不包含遗失边的延展星图 $ES(x; 5)$ 。当 $t = 2$ 时, 则 $4-t = 2$ 。情况类似, 我们从已经找到的五个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x; 6)$ 当中至少找到三个除了与 x 关联的边

之外都不同的延展星图 $ES(x;4)$ ，这样我们又可以找到一个不包含遗失边的延展星图 $ES(x;4)$ 。当 $t=3$ 时，则 $4-t=1$ 。情况类似，我们从已经找到的五个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x;6)$ 当中至少找到两个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x;3)$ ，这样我们又可以找到一个不包含遗失边的延展星图 $ES(x;3)$ 。当 $t=4$ 时，则 $4-t=0$ 。情况类似，我们从已经找到的五个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x;6)$ 当中至少找到一个除了与 x 关联的边之外都不同的延展星图 $ES(x;2)$ ，这样我们又可以找到一个不包含遗失边的延展星图 $ES(x;2)$ 。由此我们可以得出结论：在具有遗失边 F_e 的 $Q_3^k - F_e$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_3^k - F_e}(x))$ ，其中 $|F_e| \leq 4$ 。

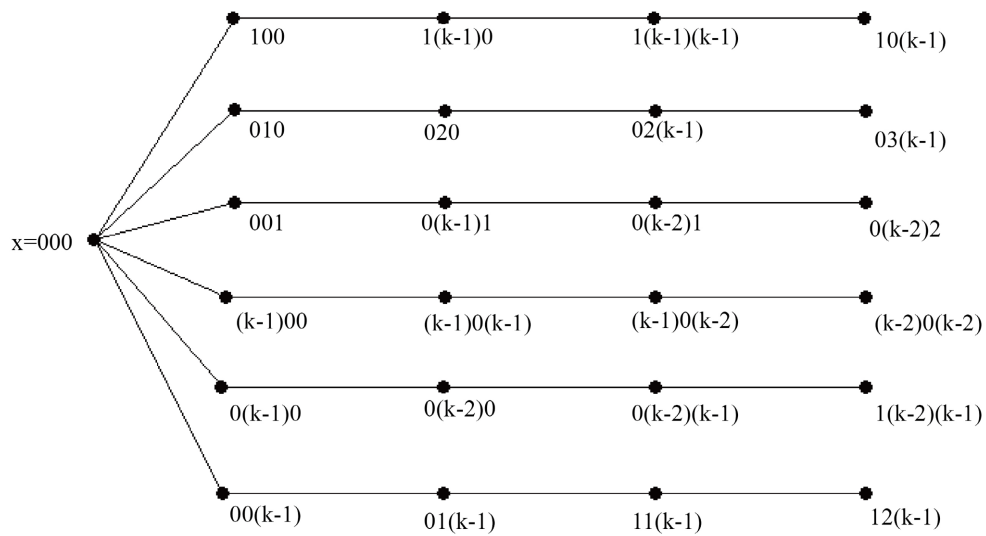


Figure 4. The second $ES(x;6)$ in Q_3^k

图 4. Q_3^k 的第二个延展星图 $ES(x;6)$

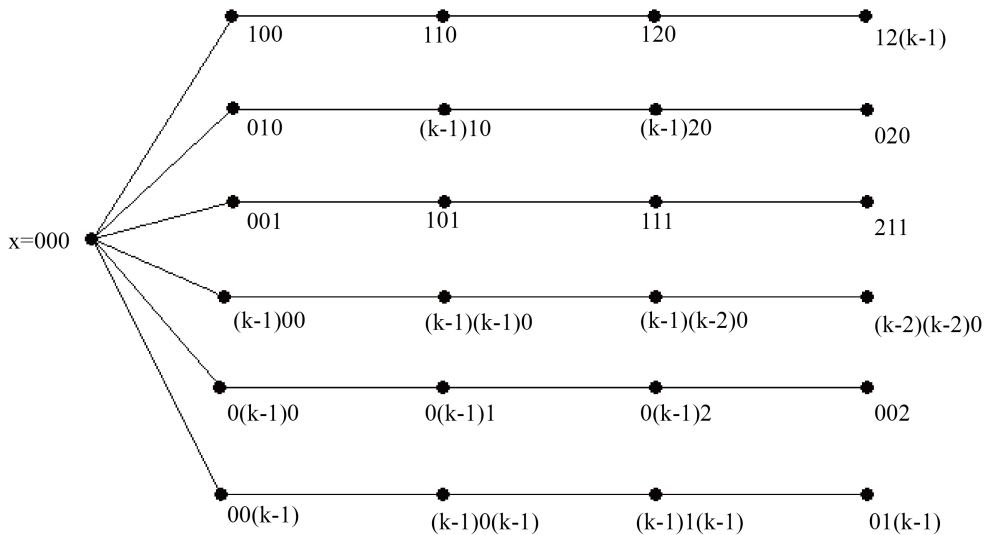


Figure 5. The third $ES(x;6)$ in Q_3^k

图 5. Q_3^k 的第三个延展星图 $ES(x;6)$

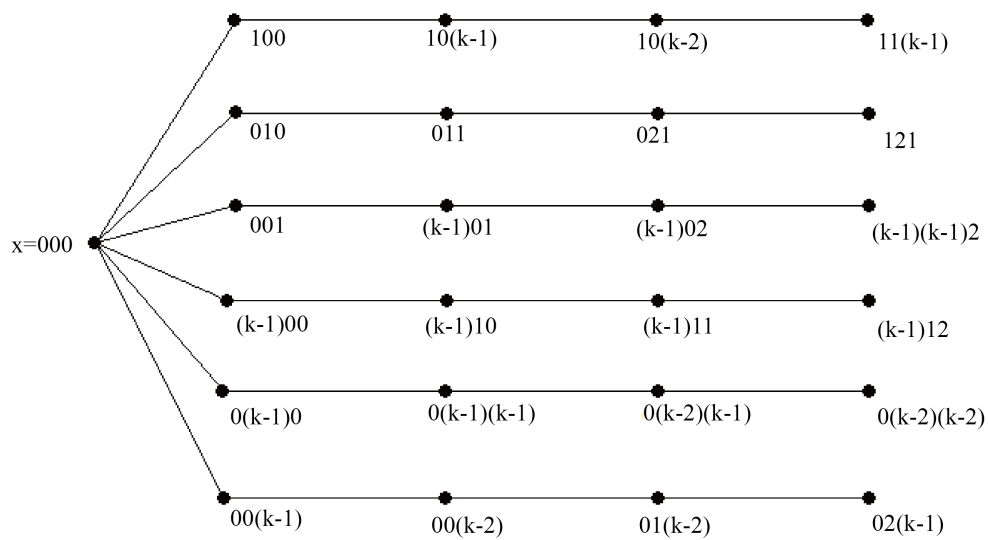


Figure 6. The fourth $ES(x;6)$ in Q_3^k

图 6. Q_3^k 的第四个扩展星图 $ES(x;6)$

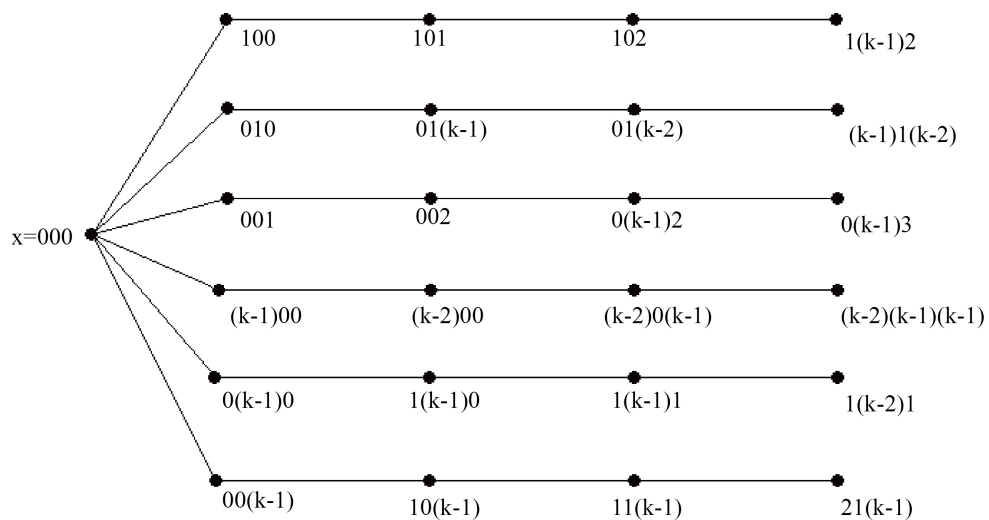


Figure 7. The fifth $ES(x;6)$ in Q_3^k

图 7. Q_3^k 的第五个扩展星图 $ES(x;6)$

假设这个引理对于 $Q_{n-1}^k (n \geq 4, k \geq 6)$ 成立, 即在 $Q_{n-1}^k - F_e$ 中存在一个扩展星图 $ES(x; d_{Q_{n-1}^k - F_e}(x))$, 其中 F_e 是遗失边集且 $|F_e| \leq 2(n-1) - 2 = 2n - 4$ 。现在我们证明这个结论对于 $Q_n^k (n \geq 4, k \geq 6)$ 也成立, 即在 $Q_n^k - F_e$ 中存在一个扩展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$, 其中 F_e 是遗失边集且 $|F_e| \leq 2n - 2$ 。设 $Q[i]$ 是由 Q_n^k 的顶点最后一个位置 $i (0 \leq i \leq k-1)$ 诱导的子图, 则 $Q[i]$ 同构于 Q_{n-1}^k 。设 $x = 00 \dots 00 = (0)$, 记 (0) 点在 $Q[0]$ 中。由引理 5.3, (0) 与两个外部邻点相邻: $00 \dots 01$ 和 $00 \dots 0(k-1)$ 。设 $y = 00 \dots 01$, $z = 00 \dots 0(k-1)$, 它们分别在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 之中。设 $F_e^i = F_e \cap E(Q[i])$, 其中 $0 \leq i \leq k-1$, $F^* = F_e \cap (E(Q_n^k) \setminus \sum_{i=0}^{k-1} E(Q[i]))$, 那么 $F_e = F^* \cup F_e^0 \cup \dots \cup F_e^{k-1}$ 。注意到 $|F_e| \leq 2n - 2$, 我们有 $|F_e^i| \leq 2n - 2$, 其中 $0 \leq i \leq k-1$ 。为了证明这

个引理, 我们首先需要在 $Q[0]-F_e^0$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$, 然后找到两条分别处在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 中的 3 长路 P_y 和 P_z , 我们连接 P_y 和 P_z 到 x , 然后将它们与 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合, 这样我们就在 $Q_n^k - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。我们再考虑以下情形。

情形 1 $|F_e^0| \leq 2n-4$ 。

由归纳假设, 在 $Q[0]-F_e^0 (n \geq 3, k \geq 6)$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 。为方便起见, 我们假设 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x)) = A$ 。如果 $xy \in F_e$, 那么我们就需要通过 xy 扩展 A 。如果 $xy \notin F_e$, 由引理 5.3 可知, $\kappa(Q[1]) = 2n-2$ 。我们再考虑下列情形。

情形 1.1 $|F_e^1| = 2n-2$ 。

在这种情形下, $|F^*| = |F_e^0| = |F_e^2| = \dots = |F_e^{k-1}| = 0$ 。 y 有两个外部邻点 $00\dots02$ 和 $00\dots00$ 。注意到 $00\dots00 = (0) = x$, $00\dots02 \in V(Q[2])$ 。设 $P_y = \langle 0000\dots01, 0000\dots02, 0100\dots02, 01(k-1)0\dots02 \rangle$, $P_z = \langle 0000\dots0(k-1), 0100\dots0(k-1), 0110\dots0(k-1), 1110\dots0(k-1) \rangle$ 。因为 $|F_e^2| = |F_e^{k-1}| = 0$, 我们有 $V(P_y) \cap V(P_z) = \emptyset$ 且 P_y 和 P_z 不包含遗失边。我们连接 P_y 和 P_z 到 x , 然后将它们与 A 相结合, 这样我们在 $Q_n^k - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 1.2 $|F_e^1| < 2n-2$ 。

由引理 5.3, $\lambda(Q[1]) = 2n-2 > |F_e^1|$, 因此, 我们可以得到 $Q[1]-F_e^1$ 是连通的。 $|V(Q[1]-F_e^1)| = |V(Q[1])| = k^{n-1} \geq 216 (n \geq 4, k \geq 6)$, 我们可以在 $Q[1]-F_e^1$ 中找到一条以 y 开头的 3 长路 P_y , 然后将它通过 xy 扩展 A 。如果 $|F_e^{k-1}| < 2n-2$, 该情况与之类似, 于是我们可以在 $Q[k-1]-F_e^{k-1}$ 中找到一条以 z 开头的 3 长路 P_z , 然后将它通过 xz 扩展 A 。如果 $|F_e^{k-1}| = 2n-2$, 那么 $|F_e^1| = 0$, 情况与情形 1.1 类似, 我们可以找到两条 3 长路 P_y 和 P_z 。

情形 2 $|F_e^0| = 2n-3$ 且 $|F_e^1| = 2n-3$ 。

在这种情形下, $|F^*| + |F_e^1| + \dots + |F_e^{k-1}| = 0$ 。设 $y = 0000\dots01$, $z = 0000\dots0(k-1)$, 它们分别在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 中。我们可以找到两条不同的分别以 y 和 z 开头的 3 长路:

$$P_y^1 = \langle 0000\dots01, 0100\dots01, 01(k-1)0\dots01, 02(k-1)0\dots01 \rangle,$$

$$P_y^2 = \langle 0000\dots01, 0(k-1)00\dots01, 0(k-1)(k-1)0\dots01, 1(k-1)(k-1)0\dots01 \rangle,$$

$$P_z^1 = \langle 0000\dots0(k-1), 0100\dots0(k-1), 0110\dots0(k-1), 1110\dots0(k-1) \rangle,$$

$$P_z^2 = \langle 0000\dots0(k-1), 0(k-1)00\dots0(k-1), 0(k-1)(k-1)0\dots0(k-1), 1(k-1)(k-1)0\dots0(k-1) \rangle。$$

很显然, P_y^1, P_y^2, P_z^1 和 P_z^2 中除了 y 和 z 之外没有公共点。因为 $|F^*| + |F_e^1| + \dots + |F_e^{k-1}| = 0$, 所以在 $Q[0]$ 外部不存在 F_e 中的边, 因此我们可以从 P_y^1, P_y^2, P_z^1 和 P_z^2 中选择两条不包含遗失边的 3 长路 P_y 和 P_z 。设 f 是 F_e^0 中任意一个元素, 并且 $F_e' = F_e^0 \setminus \{f\}$, 那么 $|F_e'| = 2n-4$ 。由归纳假设, 在 $Q[0]-F_e'$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e'}(x))$ 。设 $ES(x; d_{Q[0]-F_e'}(x)) = A$ 。如果 A 中不包含 f , 那么我们可以在 $Q[0]-F_e^0$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 。下面我们讨论 $f \in E(A)$ 。

情形 2.1 f 与 x 相关联。

在这种情形下, 我们通过删除 A 中包含 f 的路得到延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 。因为

$|F^*| + |F_e^1| + \dots + |F_e^{k-1}| = 0$, 则我们可以从 P_y^1, P_y^2, P_z^1 和 P_z^2 中选择两条不包含遗失边的 3 长路 P_y 和 P_z 。

我们连接 P_y 和 P_z 到 x , 然后将它们与 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合, 因此, 我们在 $Q_n^k - F_e$ 中就得到了一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 2.2 f 不与 x 相关联。

设 P_u 是一条以 u 开头的 3 长路, 同时假设它包含 f , 那么 u 与 x 相邻。由定义 5.1, 记 $N_{Q_n^k}(x) = \{u_0u_1 \cdots (u_i+1) \cdots u_{n-1}, u_0u_1 \cdots (u_i-1) \cdots u_{n-1} \mid u_i = 0, 0 \leq i \leq n-1\}$, 并且 $u \in V(Q[0])$ 。不失一般性, 设 $u = 100 \cdots 00$ 。由引理 5.3, u 有两个外部邻点 $100 \cdots 01$ 和 $100 \cdots 0(k-1)$, 它们分别在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 中。因为在 $Q[0]$ 外部不存在 F_e 中的边, 所以存在一个点 u' 使得 u' 是 u 的外部邻点, 同时 $uu' \notin F_e$ 。因此我们只需要找到一条以 u' 开头的 2 长路。不失一般性, 假设 $u' \in V(Q[1])$ 或者 $u' \in V(Q[k-1])$ 。

情形 2.2.1 $u' \in V(Q[1])$ 。

在这种情形下, $u' = 100 \cdots 01$ 。注意到 $P_y^1 = \langle 0000 \cdots 01, 0100 \cdots 01, 01(k-1)0 \cdots 01, 02(k-1)0 \cdots 01 \rangle$, $|F_e^1| = 0$, 于是我们可以从 $Q[1]$ 中找到一条以 u' 开头的不包含遗失边的 2 长路: $P_{u'} = \langle 100 \cdots 01, 1(k-1)0 \cdots 01, 2(k-1)0 \cdots 01 \rangle$ 。注意到 $y \notin V(P_{u'})$, 且 $V(P_y^1) \cap V(P_{u'}) = \emptyset$, 因此我们连接 $P_{u'}$ 到 u 即可得到一条 3 长路 P_u , 然后连接 P_u , P_y^1 和 P_z 到 x , 然后将它们与 A 相结合, 于是可以在 $Q_n^k - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 2.2.2 $u' \in V(Q[k-1])$ 。

在这种情形下, $u' = 100 \cdots 0(k-1)$ 。注意到 $P_z^1 = \langle 0000 \cdots 0(k-1), 0100 \cdots 0(k-1), 0110 \cdots 0(k-1), 1110 \cdots 0(k-1) \rangle$, $|F_e^{k-1}| = 0$, 于是我们可以从 $Q[k-1]$ 中找到一条以 u' 开头的不包含遗失边的 2 长路: $P_{u'} = \langle 100 \cdots 0(k-1), 1(k-1)0 \cdots 0(k-1), 2(k-1)0 \cdots 0(k-1) \rangle$ 。注意到 $z \notin V(P_{u'})$, 且 P_z^1 与 $P_{u'}$ 之间没有公共点。因此我们连接 $P_{u'}$ 到 u 即可得到一条 3 长路 P_u , 然后连接 P_u , P_y 和 P_z^1 到 x , 然后将它们与 A 相结合, 于是可以在 $Q_n^k - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 3 $|F_e^0| = 2n-3$ 且 $|F_e| = 2n-2$ 。

注意到 $|F^*| + |F_e^1| + \cdots + |F_e^{k-1}| = 1$ 。设 $y = 000 \cdots 01$, $z = 000 \cdots 0(k-1)$, 它们分别在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 中。我们可以找到两条不同的分别以 y 和 z 开头的 3 长路:

$$P_y^1 = \langle 0000 \cdots 01, 0100 \cdots 01, 01(k-1)0 \cdots 01, 02(k-1)0 \cdots 01 \rangle,$$

$$P_y^2 = \langle 0000 \cdots 01, 0(k-1)00 \cdots 01, 0(k-1)(k-1)0 \cdots 01, 1(k-1)(k-1)0 \cdots 01 \rangle,$$

$$P_z^1 = \langle 0000 \cdots 0(k-1), 0100 \cdots 0(k-1), 0110 \cdots 0(k-1), 1110 \cdots 0(k-1) \rangle,$$

$$P_z^2 = \langle 0000 \cdots 0(k-1), 0(k-1)00 \cdots 0(k-1), 0(k-1)(k-1)0 \cdots 0(k-1), 1(k-1)(k-1)0 \cdots 0(k-1) \rangle。$$

很显然, P_y^1 , P_y^2 , P_z^1 和 P_z^2 之间除了 y 和 z 之外没有公共点。如果 $|F_e^1| + |F_e^2| + \cdots + |F_e^{k-1}| = 1$, 则在 $Q_n^k - V(Q[0])$ 中最多存在 F_e 中的一条边。因此, 我们可以从 P_y^1 , P_y^2 , P_z^1 和 P_z^2 中选择两条不包含遗失边的 3 长路。如果 $|F^*| = 1$, 那么 $|F_e^1| + \cdots + |F_e^{k-1}| = 0$ 。在这种情形下, 如果 $|F^* \cap \{xy, xz\}| = 0$, 那么我们从 $Q_n^k[V(P_y^1) \cup \{x\}]$, $Q_n^k[V(P_y^2) \cup \{x\}]$, $Q_n^k[V(P_z^1) \cup \{x\}]$ 和 $Q_n^k[V(P_z^2) \cup \{x\}]$ 中选择两条不包含遗失边的

3 长路。如果 $|F^* \cap \{xy, xz\}| = 1$, 那么我们从 $Q_n^k[V(P_y^1) \cup \{x\}]$, $Q_n^k[V(P_y^2) \cup \{x\}]$, $Q_n^k[V(P_z^1) \cup \{x\}]$ 和 $Q_n^k[V(P_z^2) \cup \{x\}]$ 中选择一条不包含遗失边的 3 长路。设 f 是 F_e^0 中任意一个元素, 且设 $F'_e = F_e^0 \setminus \{f\}$, 那

么 $|F_e^i| = 2n - 4$ 。由归纳假设, 在 $Q[0] - F_e^i$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^i}(x))$ 。设 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^i}(x)) = A$ 。如果 A 中不包含 f , 那么我们可以在 $Q[0] - F_e^0$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x)) = A$ 。下面我们讨论 $f \in E(A)$ 。

情形 3.1 f 与 x 相关联。

我们通过删除包含 f 的路得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 。假设 $|F^*| = 0$, 那么 $xy \notin F_e, xz \notin F_e$ 。因为 $|F^*| + |F_e^1| + \dots + |F_e^{k-1}| = 1$, 我们从 P_y^1, P_y^2, P_z^1 和 P_z^2 中选择两条不包含遗失边的 3 长路 P_y 和 P_z 。我们连接 P_y 和 P_z 到 x , 然后将它们与 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合。因此, 我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。假设 $|F^*| = 1$ 。如果 $|F^* \cap \{xy, xz\}| = 0$, 那么我们从 P_y^1, P_y^2, P_z^1 和 P_z^2 中选择两条 3 长路 P_y 和 P_z 。我们将 P_y 和 P_z 这两条路连接到 x , 然后将它们与 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合。因此, 我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。如果 $|F^* \cap \{xy, xz\}| = 1$ 。设 $F^* = \{xy\}$ 或 $\{xz\}$ 。我们通过删除包含 xy 或 xz 的路得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 。我们从 P_y 和 P_z 中选择一条不包含遗失边的路连接到 x , 然后将它与 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合。因此, 我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 3.2 f 与 x 不相关联。

设 P_u 是一条以 u 开头的 3 长路, 且假设它包含 f , 那么 u 与 x 相邻。由定义 5.1, 记 $N_{Q_n^k}(x) = \{u_0 u_1 \dots (u_i + 1) \dots u_{n-1}, u_0 u_1 \dots (u_i - 1) \dots u_{n-1} \mid u_i = 0, 0 \leq i \leq n-1\}$ 且 $u \in V(Q[0])$ 。不失一般性, 设 $u = 100 \dots 00$ 。由引理 5.3, u 有两个外部邻点 $100 \dots 01$ 和 $100 \dots 0(k-1)$, 它们分别在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 中。因为在 $Q[0]$ 外部存在 F_e 中的一条边, 所以存在一个点 u' 使得 u' 是 u 的外部邻点, 同时 $uu' \notin F_e$ 。因为 $|F^*| + |F_e^1| + \dots + |F_e^{k-1}| = 1$ 。设 $|F^*| = 0$, 那么 $|F_e^1| + \dots + |F_e^{k-1}| = 1$ 。我们只需要找到一条以 u' 开头的 2 长路。不失一般性, 假设 $u' \in V(Q[1])$ 或者 $u' \in V(Q[k-1])$ 。

情形 3.2.1 $u' \in V(Q[1])$ 。

在这种情形下, $u' = 100 \dots 01$ 。注意到 $P_y^1 = \langle 0000 \dots 01, 0100 \dots 01, 01(k-1)0 \dots 01, 02(k-1)0 \dots 01 \rangle$, $P_y^2 = \langle 0000 \dots 01, 0(k-1)00 \dots 01, 0(k-1)(k-1)0 \dots 01, 1(k-1)(k-1)0 \dots 01 \rangle$, 我们可以找到两条以 u' 开头的 2 长路:

$$P_u^1 = \langle 100 \dots 01, 1(k-1)0 \dots 01, 2(k-1)0 \dots 01 \rangle,$$

$$P_u^2 = \langle 100 \dots 01, 110 \dots 01, 120 \dots 01 \rangle。$$

很显然, P_y^1, P_y^2, P_u^1 和 P_u^2 中除了 u' 和 y 之外没有公共点。因为在 $Q[0]$ 之外最多存在 F_e 中的一条边, 我们可以从 P_u^1 和 P_u^2 中选择一条不包含遗失边的 2 长路 P_u' 。我们连接 P_u' 到 u 得到一条 3 长路 P_u , 然后连接 P_u, P_y 和 P_z 到 x , 并且将它们与 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合。因此, 我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

假设 $u' \in V(Q[k-1])$ 。这里, $u' = 100 \dots 0(k-1)$ 。注意到 $P_z^1 = \langle 0000 \dots 0(k-1), 0100 \dots 0(k-1), 0110 \dots 0(k-1), 1110 \dots 0(k-1) \rangle$,

$P_z^2 = \langle 0000 \cdots 0(k-1), 0(k-1)00 \cdots 0(k-1), 0(k-1)(k-1)0 \cdots 0(k-1), 1(k-1)(k-1)0 \cdots 0(k-1) \rangle$ ，我们可以找到两条以 u' 开头的 2 长路：

$$P_u^1 = \langle 100 \cdots 0(k-1), 1(k-1)0 \cdots 0(k-1), 2(k-1)0 \cdots 0(k-1) \rangle,$$

$$P_u^2 = \langle 100 \cdots 0(k-1), 110 \cdots 0(k-1), 120 \cdots 0(k-1) \rangle.$$

很显然， P_z^1 ， P_z^2 ， P_u^1 和 P_u^2 中除了 u' 和 z 之外没有公共点。因为在 $Q[0]$ 之外最多存在 F_e 中的一条边，因此 P_u^1 或者 P_u^2 不包含遗失边。我们从 P_u^1 和 P_u^2 中选择一条不包含遗失边的 2 长路 P_u 。我们连接 P_u 到 u 即可得到一条 3 长路 P_u ，然后连接 P_u ， P_y 和 P_z 到 x ，并且将它们与延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x))$ 相结合。因此，我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

假设 $|F^*| = 1$ ，那么 $|F_e^1| + |F_e^2| + \cdots + |F_e^{k-1}| = 0$ 。因此，存在一个点 u' 使得 u' 是 u 的外部邻点且 $uu' \notin F_e$ 。不失一般性，假设 $u' \in V(Q[1])$ 。与情形 3.2.1 类似，我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 4 $|F_e^0| = 2n - 2$ 。

在这种情形下， $|F^*| + |F_e^1| + |F_e^2| + \cdots + |F_e^{k-1}| = 0$ 。设 f, f' 是 F_e^0 中任意两个元素，且 $F_e' = F_e^0 \setminus \{f, f'\}$ ，那么 $|F_e'| = 2n - 4$ 。由归纳假设，我们可以在 $Q[0] - F_e'$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e'}(x)) = A$ 。

情形 4.1 A 中不包含 f 和 f' 。

我们可以在 $Q[0] - F_e^0$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-F_e^0}(x)) = A$ 。注意到 $|F_e^0| = 2n - 2$ 且 $|F_e| \leq 2n - 2$ ，那么在 $Q[1]$ 和 $Q[k-1]$ 中不存在 F_e 中的边。因此，我们可以在 $Q[1]$ 中找到一条以 y 开头的 3 长路 P_y ，然后将 P_y 与 x 相连，然后将它与 A 相结合。 xz 的情况与此类似。因此，我们可以在 $Q_n^k - F_e$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 。

情形 4.2 A 中包含 f 或 f' 。

不失一般性，我们假设 A 中包含 f 。现在我们讨论 f 是否与 x 相关联。如果 f 与 x 相关联，证明与情形 2.1 类似。如果 f 不与 x 相关联，证明与情形 2.2 类似。

情形 4.3 A 中包含 f 和 f' 。

如果 f 和 f' 都与 x 相关联，那么我们可以通过删除包含 f 和 f' 的路得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-\{F_e' \cup f \cup f'\}}(x))$ ，接下来的证明与情形 3.1 类似。如果 $\{f, f'\}$ 中仅有一个与 x 相关联，不失一般性，设 f' 与 x 相关联， f 不与 x 相关联。我们可以在 $Q[0] - \{F_e' \cup f'\}$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q[0]-\{F_e' \cup f'\}}(x))$ ，接下来的证明与情形 2.2 类似。如果 f 和 f' 都不与 x 相关联，那么我们考虑 f 和 f' 是否属于同一条路。如果 f 和 f' 都属于同一条路，证明过程与情形 2.2 类似。现在我们假设 f 和 f' 属于 A 中不同的路。设 P_u 是一条以 u 开头 3 长路并且假设它包含 f 。设 P_v 是一条以 v 开头的 3 长路并且假设它包含 f' 。由引理 5.3，每个 u 和 v 分别有两个外部邻点且在不同的子图中。假设 u 和 v 的一个外部邻点分别是 u' 和 v' ，其中 $u' \in Q[i]$ ， $v' \in Q[j]$ ， $i, j \in \{1, k-1\}$ 且 $i \neq j$ 。注意到 $|F_e^0| = 2n - 2$ ， $|F_e| \leq 2n - 2$ ，那么在 $Q[0]$ 之外不存在 F_e 中的边，因此我们可以分别在 $Q[i]$ 和 $Q[j]$ 中找到一条以 u' 和 v' 开头的 2 长路 P_u 和 P_v ，然后将它们分别与 uu' 和 vv' 相连，我们就得到了不包含遗失边的 3 长路 P_u 和 P_v 。因此，我们

就完成了在 $Q_n^k - F_e$ 中找到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^k - F_e}(x))$ 的证明。

定理 6.2 设 F_e 是 k 元 n 立方体 Q_n^k ($n \geq 3, k \geq 6$) 中任意边子集且 $|F_e| \leq 2n - 2$ 。对 Q_n^k 中的每个点 x , $Q_n^k - F_e$ 有强局部诊断性, 其中 F_e 的个数是最优的。

证明 由引理 4.6 和 6.2, 在 $Q_n^k - F_e$ 中, 每个点 x 的局部诊断度等于它的度, 且 $n \geq 3, k \geq 6, |F_e| \leq 2n - 2$ 。由引理 4.8 和 4.9, $Q_n^k - F_e$ 有强局部诊断性。现在我们证明 F_e 的个数是最优的。

接下来我们举例说明当 k 元 n 立方体 Q_n^k 存在 $2n - 1$ 条遗失边时不能保证有强局部诊断性。因为 Q_n^k 是一个点传递图, 不失一般性, 假设 $x = 00 \cdots 00 \in V(Q_n^k)$ 。我们假设在 Q_n^k 中存在 $2n - 1$ 条遗失边 F 都与 x 相关联(见图 8), 那么在 $Q_n^k - F$ 中 x 的度就变成了 1, 即 $d_{Q_n^k - F}(x) = 1$ 。很容易知道 y 是 x 在 $d_{Q_n^k - F}(x)$ 中唯一的邻点。设 $F_1 = (\{y\} \cup N(y)) \setminus \{x\}$, $F_2 = N(y)$, 此时 $|F_1| = |F_2| = 2n$ 。显然, $V(Q_n^k - F_e) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间是没有边的。由定理 3.1 和引理 4.8, (F_1, F_2) 不满足条件(1)~(3), 并且在 $Q_n^k - F$ 中 y 点在 MM^* 模型下不是 $2n$ 局部诊断的。然而, $d_{Q_n^k - F}(y) = 2n$, 故在 $Q_n^k - F$ 中 y 点的局部诊断度(少于 $2n$)不等于它的度(等于 $2n$)。因此, y 没有强局部诊断性。故当 k 元 n 立方体 Q_n^k 有 $2n - 1$ 条遗失边时, 它不具有强局部诊断性了。

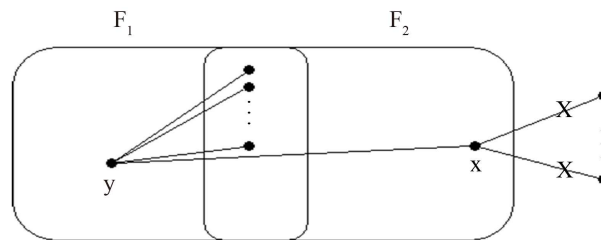


Figure 8. Illustration of the proof in Theorem 6.2
图 8. 定理 6.2 的证明

7. 结论

在这篇文章中, 我们研究了 k 元 n 立方体 Q_n^k ($n \geq 3, k \geq 6$) 在 MM^* 模型下的局部诊断度。由强局部诊断性的定义[8], 我们证明了 k 元 n 立方体 Q_n^k 具有强局部诊断性, 即使存在高达 $2n - 2$ 条遗失边, 它仍保持强局部诊断性。所以, 在 k 元 n 立方体 Q_n^k ($n \geq 3, k \geq 6$) 的遗失边数不超过 $2n - 2$ 的条件下, 它的诊断度等于每个处理器剩余度的最小值。

致 谢

本论文是在我的导师王世英教授的亲切关怀和认真指导下完成的。他严肃的科学态度, 严谨的治学精神, 精益求精的工作作风, 深深地激励着我。从课题的选择到项目的最终完成, 王老师都始终给予我细心的指导和不懈的支持。在写论文的过程中, 王教授不仅在学业上给我精心的指导, 同时还在思想、生活上给我无微不至的关怀, 在此谨向王老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。同时, 感谢与我并肩作战的师兄、师姐以及同门们, 感谢关心我, 支持我的朋友们, 感谢学校领导、老师们, 感谢你们给予我的帮助与关怀, 谢谢!

参考文献

- [1] Maeng, J. and Malek, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessors Systems. *Proceeding of the 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, Portland, 24-26 June 1981,

- 173-175.
- [2] Sengupta, A. and Dahbura, A.T. (1992) On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach. *IEEE Transactions on Computers*, **41**, 1386-1396. <https://doi.org/10.1109/12.177309>
 - [3] Dahbura, A.T. and Masson, G.M. (1984) An $O(n^{2.5})$ Fault Identification Algorithm for Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **C-33**, 486-492. <https://doi.org/10.1109/TC.1984.1676472>
 - [4] Fan, J.X. (2002) Diagnosability of Crossed Cubes under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **13**, 1099-1104. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2002.1041887>
 - [5] Gu, M.M., Hao, R.X., Feng, Y.Q. and Yu, A.M. (2017) The 3-Extra Connectivity and Faulty Diagnosability. *The Computer Journal*, **61**, 672-686. <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxx089>
 - [6] Gu, M.M., Hao, R.X. and Zhou, S.M. (2019) Fault Diagnosability of Data Center Networks. *Theoretical Computer Science*, **776**, 138-147. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.01.020>
 - [7] Lai, P.L., Tan, J.J.M., Chang, C.P. and Hsu, L.H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. <https://doi.org/10.1109/TC.2005.19>
 - [8] Hsu, G.H. and Tan, J.J.M. (2007) A Local Diagnosability Measure for Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **18**, 598-607. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2007.1022>
 - [9] Chiang, C.F. and Tan, J.J.M. (2009) Using Node Diagnosability to Determine t-Diagnosability under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Computers*, **58**, 251-259. <https://doi.org/10.1109/TC.2008.158>
 - [10] Chiang, C.F., Hsu, G.H., Shih, L.M. and Tan, J.J.M. (2012) Diagnosability of Star Graphs with Missing Edges. *Information Sciences*, **188**, 253-259. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.11.012>
 - [11] Cheng, E. and Liptak, L. (2013) Dignosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees with Missing Edges. *Information Sciences*, **238**, 250-252. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.009>
 - [12] Cheng, E., Liptak, L. and Steffy, D.E. (2013) Strong Local Diagnosability of (n,k)-Star Graphs and Cayley Graphs Generated by 2-Trees with Missing Edges. *Information Processing Letters*, **113**, 452-456. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2013.03.002>
 - [13] Wang, S.Y. and Ma, X.L. (2018) Diagnosability of Alternating Group Graphs with Missing Edges. *Recent Advances in Electrical & Electronic Engineering*, **11**, 51-57. <https://doi.org/10.2174/2352096510666171107155511>
 - [14] Wang, S.Y. and Ma, X.L. (2019) Diagnosability of Arrangement Graphs with Missing Edges under the MM* Model. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, **35**, 69-80. <https://doi.org/10.1080/17445760.2019.1600688>
 - [15] Zhou, Z.P., Wang, S.Y., Ma, X.L. and Ren, Y.X. (2019) Diagnosability of Expanded k -Ary n -Cubes with Missing Edges under the Comparison Model. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, **35**, 16-28. <https://doi.org/10.1080/17445760.2019.1649404>
 - [16] Feng, W. and Wang, S.Y. (2020) The Diagnosability of Wheel Networks with Missing Edges under the Comparison Model. *Mathematics*, **8**, Article No. 1818. <https://doi.org/10.3390/math8101818>
 - [17] 樊畅畅, 王世英, 马晓蕾. 有遗失边的 n 维超立方体和折叠超立方体在 MM*模型下的诊断度[J]. *应用数学进展*, 2021, 10(1): 150-159.
 - [18] Wang, M., Jiang, S. and Wang, S.Y. (2021) Connectivity and Diagnosability of Center k -Ary n -Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **294**, 98-107. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.01.028>
 - [19] Ashir, Y.A. and Stewart, I.A. (1997) On Embedding Cycles in k -Ary n -Cubes. *Parallel Processing Letters*, **7**, 49-55. <https://doi.org/10.1142/S0129626497000073>
 - [20] Bose, B., Broeg, B., Kwon, Y. and Ashir, Y. (1995) Lee Distance and Topological Properties of k -Ary n -Cubes. *IEEE Transactions on Computers*, **44**, 1021-1030. <https://doi.org/10.1109/12.403718>
 - [21] Bettayeb, S. (1995) On the k -Ary Hypercube. *Theoretical Computer Science*, **140**, 333-339. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(94\)00197-Q](https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)00197-Q)
 - [22] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) *Graph Theory*. Springer, New York.
 - [23] Lee, C.W. and Hsieh, S.Y. (2013) Diagnosability of multiprocessor systems. In: *Scalable Computing and Communications: Theory and Practice*, Wiley-IEEE Computer Society Press, New Jersey, USA.
 - [24] Yuan, J., Liu, A.X., Ma, X., Liu, X.L., Qin, X. and Zhang, J.F. (2015) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of k -Ary n -Cubes under the PMC Model and MM* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **26**, 1165-1177. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2014.2318305>