Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2022, 11(3), 980-990**
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113105

分数阶Hartree方程负解的对称性

叶方琪

浙江师范大学，数学系，浙江 金华

收稿日期：2022年2月11日；录用日期：2022年3月7日；发布日期：2022年3月14日

摘 要

本文研究了分数阶Hartree型方程负解的对称性。我们采用的方法是移动平面法，首先我们对方程的解作Kelvin变换。然后，我们证明了无穷远处衰减性定理，移动平面可以由此起步。最后，通过狭窄区域定理，我们证明了方程的解具有径向对称性。

关键词

分数阶Hartree方程，移动平面法，无穷远处衰减性定理，狭窄区域定理

Symmetry of Negative Solutions of Fractional Hartree Equations

Fangqi Ye

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 11th, 2022; accepted: Mar. 7th, 2022; published: Mar. 14th, 2022

Abstract

In this paper, we study the symmetry of negative solutions of fractional Hartree type equations. The method we adopted was the moving plane method. First, we performed Kelvin transformation on the solution of the equation. Then, we prove the decay theorem at infinity, from which the moving plane can start. Finally, by the narrow region theorem, we prove that the solution of the equation has radial symmetry.

Keywords

Fractional Hartree Equations, Moving Plane Method, Decay Theorem at Infinity, Narrow Region Theorem

文章引用: 叶方琪. 分数阶 Hartree 方程负解的对称性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 980-990.
DOI: 10.12677/aam.2022.113105

1. 引言

在本文中，我们主要考虑下列分数阶静态 Hartree 方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u(x)=\left(\dfrac{1}{|x|^q}*|u(x)|^p\right)u^\sigma(x), x\in\mathbb{R}^n,\\ u\in C_{loc}^{1,1}\cap L_s(\mathbb{R}^n), x\in\mathbb{R}^n,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $u(x)<0$，$0<s<1$，$0\le q\le 4s$，$n>\max\{2s,q\}$，$p=\dfrac{2n-q}{n-2s}$，$1\le\sigma\le\dfrac{n+2s-q}{n-2s}$，$\sigma$ 为奇数并且

$$L_s(\mathbb{R}^n):=\left\{u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\mid\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

分数阶拉普拉斯算子定义为(见[1] [2])

$$(-\Delta)^s u(x)=C_{n,s}P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Hartree 型方程在非相对论玻色子原子和分子大系统的量子理论中有许多有趣的应用，事实上，Hartree 型方程是在研究这类系统的平均场极限时产生的，即在玻色子数量非常大，但它们之间的相互作用很弱的情况下，因此，通过数学方法研究 Hartree 型方程有重要意义，参见文献[3]-[8]及其引用的参考文献。近几年来，许多学者都对 Hartree 型方程产生兴趣并得到一系列结果。例如，当 $s=1$，$p=2$，$q=4$，$\sigma=1$ 时，刘书茂[9]通过方程(1)的等价积分形式对正解进行了分类。当 $0<s<1$，$p=2$，$q=4s$，$\sigma=1$ 时，戴蔚等人[10]使用积分形式的移动平面法对于方程(1)的正 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 弱解进行了分类。后来，戴蔚等人[11]通过直接移动平面法对于方程(1)的正解进行了分类，并且给出了解的具体形式。

本文我们扩展了戴蔚等人的系数范围 $0<s<1$，$p=2$，$q=4s$，$\sigma=1$，通过直接移动平面法来研究当 $u(x)<0$，$0<s<1$，$0\le q\le 4s$，$n>\max\{2s,q\}$，$p=\dfrac{2n-q}{n-2s}$，$1\le\sigma\le\dfrac{n+2s-q}{n-2s}$，$\sigma$ 为奇数时方程(1)的负解的对称性。首先，我们通过证明无穷远处的衰减性定理来确保移动平面可以起步。然后，我们将平面移到极限位置，通过狭窄区域定理，我们可以得到方程(1)的负解是关于某点径向对称的。

2. 主要结果

本文关于静态 Hartree 方程的主要结论如下：

定理 2.1 设 $0<s<1$，$0\le q\le 4s$，$n>\max\{2s,q\}$，$p=\dfrac{2n-q}{n-2s}$，$1\le\sigma\le\dfrac{n+2s-q}{n-2s}$，$\sigma$ 为奇数。若 u 是方程(1)的负解，且存在某点 $x^0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\lim_{|x-x^0|\to\infty}|x-x^0|^{n-2s}u(x)=\infty$，则 u 关于点 x^0 径向对称。

3. 证明

由方程(1)可以得到 $\int_{\mathbb{R}^n}\dfrac{|u(x)|^p}{|x-x^0|^q}\mathrm{d}x<\infty$，我们先对 u 关于点 x^0 作 Kelvin 变换

$$v(x)=\frac{1}{\left|x-x^0\right|^{n-2s}}u\left(\frac{x-x^0}{\left|x-x^0\right|^2}+x^0\right),x\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{x^0\right\}.$$

故 $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|u(x)\right|^p}{\left|x-x^0\right|^q}\mathrm{d}x<\infty$ 等价于 $\int_{\mathbb{R}^n}\left|v(x)\right|^p\mathrm{d}x<\infty$，从方程(1)中可得 $v\in C_{loc}^{1,1}\left(\mathbb{R}^n\setminus\left\{x^0\right\}\right)\cap L_s\left(\mathbb{R}^n\right)$。我们可以由(1)和(2)推断出

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s v(x)&=\frac{1}{\left|x-x^0\right|^{n-2s}}(-\Delta)^s u\left(\frac{x-x^0}{\left|x-x^0\right|^2}+x^0\right)\\&=\frac{1}{\left|x-x^0\right|^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|u(y)\right|^p}{\left|\frac{x-x^0}{\left|x-x^0\right|^2}+x^0-y\right|^q}\mathrm{d}y u^\sigma\left(\frac{x-x^0}{\left|x-x^0\right|^2}+x^0\right)\\&=\frac{1}{\left|x-x^0\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|v(y)\right|^p}{\left|x-y\right|^q}\mathrm{d}y v^\sigma(x).\end{aligned}$$

由于方程(1)在旋转下是不变的，所以我们任意选一个方向作为 x_1 方向，并沿着 x_1 轴进行移动平面的过程。方便起见，我们进行如下定义：

$$x^\lambda:=\left(2\lambda-x_1,x'\right)=\left(2\lambda-x_1,x_2,\cdots,x_n\right),$$

$$T_\lambda:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_1=\lambda\right\},$$

$$\Sigma_\lambda:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_1<\lambda\right\},$$

$$w_\lambda(x):=v(x)-v\left(x^\lambda\right)=v(x)-v^\lambda(x),$$

$$\Sigma_\lambda^-:=\left\{x\in\Sigma_\lambda\setminus\left\{\left(x^0\right)^\lambda\right\}\mid w_\lambda(x)<0\right\}.$$

Step 1. 从 $x_1=-\infty$ 附近开始移动平面，我们通过反证法证明

$$\Sigma_\lambda^-=\varnothing. \tag{3}$$

假设(3)式不成立，那么 $\Sigma_\lambda^-\neq\varnothing$ 且 w_λ 在 Σ_λ 中存在负值，对于任意 $x\in\Sigma_\lambda^-$，我们有

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s w_\lambda(x)=&\frac{1}{\left|x-x^0\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|v(y)\right|^p}{\left|x-y\right|^q}\mathrm{d}y v^\sigma(x)\\&-\frac{1}{\left|x^\lambda-x^0\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|v(y)\right|^p}{\left|x^\lambda-y\right|^q}\mathrm{d}y v^\sigma\left(x^\lambda\right)\\&\geq\frac{1}{\left|x^\lambda-x^0\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|v(y)\right|^p}{\left|x-y\right|^q}\mathrm{d}y v^\sigma(x)-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|v(y)\right|^p}{\left|x^\lambda-y\right|^q}\mathrm{d}y v^\sigma\left(x^\lambda\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\left|x^{\lambda}-x^{0}\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[v^{\sigma}(x)\int_{\Sigma_{\lambda}}\left(\frac{1}{|x-y|^{q}}-\frac{1}{\left|x^{\lambda}-y\right|^{q}}\right)\left(|v(y)|^{p}-\left|v\left(y^{\lambda}\right)\right|^{p}\right)\mathrm{d}y\right.\\
&\quad\left.+\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|v(y)|^{p}}{\left|x^{\lambda}-y\right|^{q}}\mathrm{d}y\left(v^{\sigma}(x)-v^{\sigma}\left(x^{\lambda}\right)\right)\right]\\
&\geq\frac{1}{\left|x^{\lambda}-x^{0}\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[v^{\sigma}(x)\int_{\Sigma_{\lambda}^{-}}\frac{1}{|x-y|^{q}}\left(|v(y)|^{p}-\left|v\left(y^{\lambda}\right)\right|^{p}\right)\mathrm{d}y\right.\\
&\quad\left.+\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|v(y)|^{p}}{\left|x^{\lambda}-y\right|^{q}}\mathrm{d}y\,\sigma v^{\sigma-1}(x)w_{\lambda}(x)\right].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

引理 3.1 [11]设 u 是方程(1)的正解，则 u 满足积分方程

$$
u(x)=\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{R_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|u(z)|^{p}}{|y-z|^{q}}\mathrm{d}z\,u^{\sigma}(y)\mathrm{d}y,
$$

其中 $R_{n,s}:=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^{2s}\Gamma(s)}$ (见[12])。

对于本文中的负解 u，我们令 $u^{*}=-u$，再应用引理 3.1 可以得到 u 满足同样的结论。

由引理 3.1 可得

$$
\begin{aligned}
v(x)&=\frac{1}{\left|x-x^{0}\right|^{n-2s}}u\left(\frac{x-x^{0}}{\left|x-x^{0}\right|^{2}}+x^{0}\right)\\
&=\frac{1}{\left|x-x^{0}\right|^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{R_{n,s}}{\left|\frac{x-x^{0}}{\left|x-x^{0}\right|^{2}}+x^{0}-y\right|^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|u(z)|^{p}}{|y-z|^{q}}\mathrm{d}z\,u^{\sigma}(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{R_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|v(z)|^{p}}{|y-z|^{q}}\mathrm{d}z\,v^{\sigma}(y)\left|y-x^{0}\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s}\mathrm{d}y,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

由引理 3.1，当 $|x|$ 充分大时，有

$$
\begin{aligned}
u(x)&=\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{R_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|u(z)|^{p}}{|y-z|^{q}}\mathrm{d}z\,u^{\sigma}(y)\mathrm{d}y\\
&\leq\int_{B_{3}\left(x^{0}\right)\setminus B_{2}\left(x^{0}\right)}\frac{R_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}}\int_{B_{1}\left(x^{0}\right)}\frac{|u(z)|^{p}}{|y-z|^{q}}\mathrm{d}z\,u^{\sigma}(y)\mathrm{d}y\\
&\leq\frac{-C}{\left|x-x^{0}\right|^{n-2s}}.
\end{aligned}
$$

因此，对于充分小的 ε，当 $x\in B_{\varepsilon}\left(x^{0}\right)\setminus\left\{x^{0}\right\}$ 时，有 $v(x)=\dfrac{1}{\left|x-x^{0}\right|^{n-2s}}u\left(\dfrac{x-x^{0}}{\left|x-x^{0}\right|^{2}}+x^{0}\right)\leq -C$。又因为

当 λ 充分负且 $x \in B_{\varepsilon}\left(\left(x^{0}\right)^{\lambda}\right) \setminus \left\{\left(x^{0}\right)^{\lambda}\right\}$ 时，$v(x) > -\dfrac{C}{2}$，故此时 $w_{\lambda}(x) = v(x) - v(x^{\lambda}) \geq \dfrac{C}{2} > 0$。

现在我们需要下列定理：

定理 3.2 (无穷远处的衰减性定理) 设 $\lambda < x_1^0$，$w_{\lambda} \in C_{loc}^{1,1}\left(\Sigma_{\lambda}^{-}\right) \cap L_s\left(\mathbb{R}^n\right)$ 且 w_{λ} 负最小值在 $\Sigma_{\lambda} \setminus \left\{\left(x^{0}\right)^{\lambda}\right\}$ 内部达到，则存在 $R_0 > 0$ (依赖 u 且与 λ 无关)，使得如果 $\hat{x} \in \Sigma_{\lambda}^{-}$ 满足 $w_{\lambda}(\hat{x}) = \min_{\Sigma_{\lambda}^{-}} w_{\lambda}(x) < 0$ 那么 $\left|\hat{x} - x^0\right| \leq R_0$。

证明：反设对任意 $R_0 > 0$，存在 $\hat{x} \in \Sigma_{\lambda}^{-}$ 且 $\left|\hat{x} - x^0\right| > R_0$，使得 $w_{\lambda}(\hat{x}) = \min_{\Sigma_{\lambda}^{-}} w_{\lambda}(x) < 0$。

一方面，由(2)我们有

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^s w_{\lambda}(\hat{x}) &= C_{n,s} P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{\lambda}(\hat{x}) - w_{\lambda}(y)}{\left|\hat{x} - y\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y \\
&= C_{n,s}\left(P.V.\int_{\Sigma_{\lambda}} \frac{w_{\lambda}(\hat{x}) - w_{\lambda}(y)}{\left|\hat{x} - y\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y + \int_{\Sigma_{\lambda}^{c}} \frac{w_{\lambda}(\hat{x}) - w_{\lambda}(y)}{\left|\hat{x} - y\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y\right) \\
&\leq C_{n,s}\left(\int_{\Sigma_{\lambda}} \frac{w_{\lambda}(\hat{x}) - w_{\lambda}(y)}{\left|\hat{x} - y^{\lambda}\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y + \int_{\Sigma_{\lambda}^{c}} \frac{w_{\lambda}(\hat{x}) - w_{\lambda}(y)}{\left|\hat{x} - y\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y\right) \\
&= 2C_{n,s}\int_{\Sigma_{\lambda}^{c}} \frac{w_{\lambda}(\hat{x})}{\left|\hat{x} - y\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y \\
&\leq C\int_{B_{\left|\hat{x}-x^0\right|}\left(\hat{x}_1 + 2\left|\hat{x}-x^0\right|, (\hat{x})'\right)} \frac{w_{\lambda}(\hat{x})}{\left|\hat{x} - y\right|^{n+2s}} \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{C}{\left|\hat{x} - x^0\right|^{2s}} w_{\lambda}(\hat{x}),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

另一方面，由(4)我们可以得出

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^s w_{\lambda}(\hat{x}) \geq{}& \frac{1}{\left|(\hat{x})^{\lambda} - x^0\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[v^{\sigma}(\hat{x})\int_{\Sigma_{\lambda}^{-}} \frac{1}{\left|\hat{x} - y\right|^{q}}\left(\left|v(y)\right|^{p} - \left|v(y^{\lambda})\right|^{p}\right)\mathrm{d}y\right. \\
&\left. + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|v(y)\right|^{p}}{\left|(\hat{x})^{\lambda} - y\right|^{q}} \mathrm{d}y\, \sigma v^{\sigma-1}(\hat{x}) w_{\lambda}(\hat{x})\right] \\
\geq{}& c(x) w_{\lambda}(\hat{x}) \geq c(\hat{x}) w_{\lambda}(\hat{x}),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $c(x) = \dfrac{1}{\left|x^{\lambda} - x^0\right|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[\sigma v^{\sigma-1}(x)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|v(y)\right|^{p}}{\left|x^{\lambda} - y\right|^{q}} \mathrm{d}y - p v^{\sigma}(x)\int_{\Sigma_{\lambda}^{-}} \frac{1}{\left|x - y\right|^{q}}\left|v(y)\right|^{p-1} \mathrm{d}y\right]$。

下面我们需要估计 $c(x)$ 的范围，当 $|x|$ 充分大时，我们有如下估计：

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|v(y)\right|^{p}}{\left|x^{\lambda} - y\right|^{q}} \mathrm{d}y &\leq \int_{\left|x^{\lambda}-y\right| \geq \frac{\left|x^{\lambda}-x^0\right|}{2}} \frac{\left|v(y)\right|^{p}}{\left|x^{\lambda} - y\right|^{q}} \mathrm{d}y + \int_{\left|x^{\lambda}-y\right| < \frac{\left|x^{\lambda}-x^0\right|}{2}} \frac{\left|v(y)\right|^{p}}{\left|x^{\lambda} - y\right|^{q}} \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{C}{\left|x^{\lambda} - x^0\right|^{q}} + \frac{C}{\left|x - x^0\right|^{n}} \leq \frac{C}{\left|x - x^0\right|^{q}},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^q} |v(y)|^{p-1} \mathrm{d}y \\
&\le \int_{\substack{|x-y| \ge \frac{|x-x^0|}{2} \\ |y-x^0| < \frac{|x-x^0|}{2}}} \frac{1}{|x-y|^q} |v(y)|^{p-1} \mathrm{d}y + \int_{\substack{|x-y| \ge \frac{|x-x^0|}{2} \\ |y-x^0| \ge \frac{|x-x^0|}{2}}} \frac{1}{|x-y|^q} |v(y)|^{p-1} \mathrm{d}y + \int_{|x-y| < \frac{|x-x^0|}{2}} \frac{1}{|x-y|^q} |v(y)|^{p-1} \mathrm{d}y \\
&\le \left(\int_{\substack{|x-y| \ge \frac{|x-x^0|}{2} \\ |y-x^0| < \frac{|x-x^0|}{2}}} \left(|v(y)|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\substack{|x-y| \ge \frac{|x-x^0|}{2} \\ |y-x^0| < \frac{|x-x^0|}{2}}} \frac{1}{|x-y|^{pq}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \int_{\substack{|x-y| \ge \frac{|x-x^0|}{2} \\ |y-x^0| \ge \frac{|x-x^0|}{2}}} \left(\frac{3}{|y-x^0|} \right)^q \left(\frac{C}{|y-x^0|^{n-2s}} \right)^{p-1} \mathrm{d}y + \int_{|x-y| < \frac{|x-x^0|}{2}} \frac{1}{|x-y|^q} \left(\frac{C}{|y-x^0|^{n-2s}} \right)^{p-1} \mathrm{d}y \\
&\le \frac{C}{|x-x^0|^{q-\frac{n}{p}}} + \frac{C}{|x-x^0|^{2s}},
\end{aligned} \tag{9}
$$

因此，由(8)和(9)我们可以得出

$$
0 < c(x) \le \frac{C}{|x-x^0|^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)+2s}} + \frac{C}{|x-x^0|^{4s}}, \tag{10}
$$

联合(6) (7) (10)三式，我们有

$$
\left(\frac{C}{|\hat{x}-x^0|^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)+2s}} + \frac{C}{|\hat{x}-x^0|^{4s}} \right) w_\lambda(\hat{x}) \le (-\Delta)^s w_\lambda(\hat{x}) \le \frac{C}{|\hat{x}-x^0|^{2s}} w_\lambda(\hat{x}),
$$

当 $|\hat{x}-x^0| > R_0$， R_0 充分大时，此不等式不成立，因此导出矛盾假设错误，故定理得证。

通过定理 3.2 我们可以得到当 λ 充分负且 $\lambda - x_1^0 < -R_0$ 的时候，(3)式成立。

Step 2. 将平面 T_λ 向 x_1 轴正方向移动并保持 $w_\lambda(x) \ge 0, x \in \Sigma_\lambda \setminus \left\{ \left(x^0\right)^\lambda \right\}$ 成立至极限位置。令

$$
\lambda_0 = \sup\left\{ \lambda < x_1^0 \mid w_\mu(x) \ge 0, x \in \Sigma_\mu \setminus \left\{ \left(x^0\right)^\mu \right\}, \mu \le \lambda \right\}, \tag{11}
$$

我们想要得到 $\lambda_0 = x_1^0$，在这里我们使用反证法，假设 $\lambda_0 < x_1^0$。

若 $w_{\lambda_0}(x) \equiv 0, x \in \Sigma_{\lambda_0} \setminus \left\{ \left(x^0\right)^{\lambda_0} \right\}$，则 x^0 不是 v 的奇点，因此 $\lim_{|x-x^0| \to \infty} |x-x^0|^{n-2s} u(x) < \infty$，这与定理 2.1 条件矛盾。

若存在 $x^* \in \Sigma_{\lambda_0} \setminus \left\{ \left(x^0\right)^{\lambda_0} \right\}$，使得 $w_{\lambda_0}(x^*) > 0$。

由连续性，存在 $\delta > 0$ 充分小及常数 $C > 0$ 使得 $w_{\lambda_0}(x) \ge C > 0$， $x \in B_\delta(x^*) \subset \Sigma_{\lambda_0} \setminus \left\{ \left(x^0\right)^{\lambda_0} \right\}$。通过(5)和引理 3.1 我们可以计算得到对任意 $x \in \Sigma_{\lambda_0} \setminus \left\{ \left(x^0\right)^{\lambda_0} \right\}$，有

$$
\begin{aligned}
& w_{\lambda_0}(x)=v(x)-v\left(x^{\lambda_0}\right) \\
& =\int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{|y-z|^q} \mathrm{d}z v^\sigma(y)\left|y-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \mathrm{d}y \\
& -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{n,s}}{\left|x^{\lambda_0}-y\right|^{n-2s}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{|y-z|^q} \mathrm{d}z v^\sigma(y)\left|y-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \mathrm{d}y \\
& =R_{n,s} \int_{\Sigma_{\lambda_0}}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s}}-\frac{1}{\left|x^{\lambda_0}-y\right|^{n-2s}}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{|y-z|^q} \mathrm{d}z v^\sigma(y)\left|y-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \mathrm{d}y\right. \\
& \left.-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{\left|y^{\lambda_0}-z\right|^q} \mathrm{d}z v^\sigma\left(y^{\lambda_0}\right)\left|y^{\lambda_0}-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \mathrm{d}y\right) \\
& \qquad \geq R_{n,s} \int_{\Sigma_{\lambda_0}}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s}}-\frac{1}{\left|x^{\lambda_0}-y\right|^{n-2s}}\right)\left|y^{\lambda_0}-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \\
& \qquad \times\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{|y-z|^q} \mathrm{d}z v^\sigma(y) \mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{\left|y^{\lambda_0}-z\right|^q} \mathrm{d}z v^\sigma\left(y^{\lambda_0}\right) \mathrm{d}y\right) \\
& \qquad =R_{n,s} \int_{\Sigma_{\lambda_0}}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s}}-\frac{1}{\left|x^{\lambda_0}-y\right|^{n-2s}}\right)\left|y^{\lambda_0}-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \\
& \qquad \times\left[v^\sigma(y) \int_{\Sigma_{\lambda_0}}\left(\frac{1}{|y-z|^q}-\frac{1}{\left|y^{\lambda_0}-z\right|^q}\right)\left(|v(z)|^p-\left|v\left(z^{\lambda_0}\right)\right|^p\right) \mathrm{d}z\right. \\
& \qquad \left.+\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{\left|y^{\lambda_0}-z\right|^q} \mathrm{d}z\left(v^\sigma(y)-v^\sigma\left(y^{\lambda_0}\right)\right)\right] \mathrm{d}y \\
& \qquad \geq R_{n,s} \int_{B_\delta\left(x^*\right)}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2s}}-\frac{1}{\left|x^{\lambda_0}-y\right|^{n-2s}}\right)\left|y^{\lambda_0}-x^0\right|^{\sigma(n-2s)+q-n-2s} \\
& \qquad \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|^p}{\left|y^{\lambda_0}-z\right|^q} \mathrm{d}z\left(v^\sigma(y)-v^\sigma\left(y^{\lambda_0}\right)\right) \mathrm{d}y \\
& \qquad >0.
\end{aligned} \tag{12}
$$

我们可由(12)得到存在 $0<\eta<\left|\lambda_0-x_1^0\right|$ 充分小，使得

$$
w_{\lambda_0}(x) \geq C>0, x \in B_\eta\left(\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right) \backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right\}. \tag{13}
$$

这等价于

$$
v\left(x^{\lambda_0}\right)-v(x) \geq C>0, x \in B_\eta\left(x^0\right) \backslash\left\{x^0\right\}.
$$

又因为 v 在 $\bar{B}_{\eta+\frac{\left|\lambda_0-x_1^0\right|}{2}}\left(\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right)$ 内是一致连续的，所以存在 $0<\varepsilon_1<\frac{\left|\lambda_0-x_1^0\right|}{4}$ 充分小，使得对于任意的

DOI: 10.12677/aam.2022.113105

$\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon_1)$，有

$$v(x^\lambda)-v(x)\ge\frac{C}{2}>0,x\in B_\eta(x^0)\setminus\{x^0\}.$$

这等价于

$$w_\lambda(x)=v(x)-v(x^\lambda)\ge\frac{C}{2}>0,x\in B_\eta\left((x^0)^\lambda\right)\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}.$$

因此，对任意 $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon_1)$，有 $\Sigma_\lambda^-\cap B_\eta\left((x^0)^\lambda\right)=\varnothing$，故 $w_\lambda\in C_{loc}^{1,1}(\Sigma_\lambda^-)\cap L_s(\mathbb{R}^n)$ 并且

(F)若 $\Sigma_\lambda^-\ne\varnothing$，则 w_λ 负最小值在 $\Sigma_\lambda\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}$ 内部达到。

由此结合定理 3.2，我们可以推导出对于任意 $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon_1)$，有

(H) w_λ 的负最小值不可能在 $\left(\Sigma_\lambda\cap\bar{B}_{R_0}^c(x^0)\right)\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}$ 内取到。

现在，我们需要下列定理

定理 3.3 (狭窄区域定理) 设 Ω 为 $\{x\in\mathbb{R}^n\mid\lambda-<x_1<\lambda<x_1^0\}\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}$ 中的狭窄区域，l 充分小，$w_\lambda\in C_{loc}^{1,1}(\Omega)\cap L_s(\mathbb{R}^n)$ 且满足

(a)
$$(-\Delta)^s w_\lambda(x)\ge\frac{1}{|x^\lambda-x^0|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[-pv^\sigma(x)\int_{\Sigma_\lambda^-}\frac{1}{|x-y|^q}|v(y)|^{p-1}w_\lambda(y)\mathrm{d}y\right.$$
$$\left.+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(y)|^p}{|x^\lambda-y|^q}\mathrm{d}y\sigma v^{\sigma-1}(x)w_\lambda(x)\right],x\in\Omega\cap\Sigma_\lambda^-;$$

(b) 若 $\Sigma_\lambda^-\ne\varnothing$，则 w_λ 负最小值在 $\Sigma_\lambda\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}$ 内部达到;

(c) w_λ 负最小值不在 $\left(\Sigma_\lambda\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}\right)\setminus\Omega$ 内部达到;

则存在 l_0 充分小(关于 λ 连续)，使得对于任意 $0<l\le l_0$，任意 $x\in\Omega$，有 $w_\lambda(x)\ge0$。

证明：反设对任意 l_0 充分小，存在 $0<l\le l_0$，存在 $\bar{x}\in\Omega$，使得 $w_\lambda(\bar{x})=\min_{\Sigma_\lambda\setminus\left\{(x^0)^\lambda\right\}}w_\lambda(x)<0$。

一方面，类似[1]中式子 22 的计算步骤我们可以得到

$$(-\Delta)^s w_\lambda(\bar{x})\le 2C_{n,s}\int_{\Sigma_\lambda^c}\frac{w_\lambda(\bar{x})}{|\bar{x}-y|^{n+2s}}\mathrm{d}y\le\frac{2C^*}{l^{2s}}w_\lambda(\bar{x})\tag{14}$$

另一方面，由(a)可得

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s w_\lambda(\bar{x})\ge&\frac{1}{|\bar{x}^\lambda-x^0|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[-pv^\sigma(\bar{x})\int_{\Sigma_\lambda^-}\frac{1}{|\bar{x}-y|^q}|v(y)|^{p-1}\mathrm{d}y\right.\\&\left.+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(y)|^p}{|\bar{x}^\lambda-y|^q}\mathrm{d}y\sigma v^{\sigma-1}(\bar{x})\right]w_\lambda(\bar{x}),\end{aligned}\tag{15}$$

记 $h(x)=\dfrac{1}{|x^\lambda-x^0|^{n+2s-\sigma(n-2s)-q}}\left[-pv^\sigma(x)\int_{\Sigma_\lambda^-}\dfrac{1}{|x-y|^q}|v(y)|^{p-1}\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n}\dfrac{|v(y)|^p}{|x-y|^q}\mathrm{d}y\sigma v^{\sigma-1}(x)\right]$。

下面我们需要估计 $h(x)$ 的范围，类似(8) (9)的过程，我们可以得到对于任意 $x\in\Omega$ 有如下估计：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|v(y)\right|^p}{\left|x^\lambda-y\right|^q}\mathrm{d}y&\le\int_{|x-y|<\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}}\frac{\left|v(y^\lambda)\right|^p}{|x-y|^q}\mathrm{d}y+\int_{|x-y|\ge\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}}\frac{\left|v(y^\lambda)\right|^p}{|x-y|^q}\mathrm{d}y\\&\le\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^n}\max_{|x-x^0|\le\frac{4}{|\lambda-x_1^0|}}\left|u(x)\right|^p+\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^q},\end{aligned}\tag{16}$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_\lambda^-}\frac{1}{|x-y|^q}\left|v(y)\right|^{p-1}\mathrm{d}y\\&\le\int_{|x-y|<\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}}\frac{1}{|x-y|^q}\left|v(y)\right|^{p-1}\mathrm{d}y+\int_{\substack{|x-y|>\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}\\|y-x^0|<\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}}}\frac{1}{|x-y|^q}\left|v(y)\right|^{p-1}\mathrm{d}y+\int_{\substack{|x-y|>\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}\\|y-x^0|\ge\frac{|\lambda-x_1^0|}{2}}}\frac{1}{|x-y|^q}\left|v(y)\right|^{p-1}\mathrm{d}y\\&\le\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^s}\max_{|x-x^0|\le\frac{4}{|\lambda-x_1^0|}}\left|u(x)\right|^{p-1}+\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^{q-\frac{n}{p}}}+\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^{2s}}\max_{|x-x^0|\le\frac{2}{|\lambda-x_1^0|}}\left|u(x)\right|^{p-1},\end{aligned}\tag{17}$$

故当 $x\in\Omega$ 时，由(16)和(17)可得

$$0<h(x)\le C_\lambda,\tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}C_\lambda=&\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^{2s+n\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\max_{|x-x^0|\le\frac{4}{|\lambda-x_1^0|}}\left|u(x)\right|^{\sigma}+\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^{4s+n-q}}\max_{|x-x^0|\le\frac{4}{|\lambda-x_1^0|}}\left|u(x)\right|^{\sigma+p-1}\\&+\frac{C}{\left|\lambda-x_1^0\right|^{4s}}\max_{|x-x^0|\le\frac{4}{|\lambda-x_1^0|}}\left|u(x)\right|^{\sigma-1}.\end{aligned}$$

因此存在 $l_0(\lambda)$ 充分小使得 $C^*l_0^{-2s}=C_\lambda$，联合(14) (15) (18)，我们有

$$C_\lambda w_\lambda(\bar{x})\le h(x)w_\lambda(\bar{x})\le(-\Delta)^s w_\lambda(\hat{x})\le\frac{2C^*}{l^{2s}}w_\lambda(\bar{x})\le\frac{2C^*}{l_0^{2s}}w_\lambda(\bar{x})=2C_\lambda w_\lambda(\bar{x})<0.$$

此不等式矛盾，故假设错误，定理得证。

现在我们定义

$$\overline{l_0}:=\min_{\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon_1]}l_0(\lambda)>0,\tag{19}$$

给定 $0<\delta_0<\overline{l_0}$ 充分小，联合(12)(13)可以得到 $w_{\lambda_0}(x)\ge C>0, x\in\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}(x^0)}\setminus\left\{\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right\}$，

这等价于

$$v\left(x^{\lambda_0}\right)-v(x)\ge C>0, x\in\left(\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}(x^0)}\right)^{\lambda_0}\setminus\left\{x^0\right\},$$

其中 $\left(\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}(x^0)}\right)^{\lambda_0}$ 表示 $\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}(x^0)$ 关于超平面 T_{λ_0} 的反射。因为 v 在闭区域 $\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}(x^0)}$ 内一致连续，故存在 $0<\varepsilon_2(\delta_0)<\frac{\delta_0}{2}$ 充分小，对于任意 $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon_2)$，有

$$v\left(x^{\lambda}\right)-v\left(x\right)\geq\frac{C}{2}>0,x\in\left(\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}\left(x^0\right)}\right)^{\lambda_0}\backslash\left\{x^0\right\},$$

这等价于

$$w_{\lambda}\left(x\right)=v\left(x\right)-v\left(x^{\lambda}\right)\geq\frac{C}{2}>0,x\in\left[\left(\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}\left(x^0\right)}\right)^{\lambda_0}\right]^{\lambda}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda}\right\},$$

容易验证 $\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}\left(x^0\right)}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda}\right\}\subset\left[\left(\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}\left(x^0\right)}\right)^{\lambda_0}\right]^{\lambda}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda}\right\}$。

因此，对于任意 $\lambda\in\left[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon_2\right)$，我们有

$$w_{\lambda}\left(x\right)=v\left(x\right)-v\left(x^{\lambda}\right)\geq\frac{C}{2}>0,x\in\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}\cap B_{2R_0}\left(x^0\right)}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda}\right\}. \tag{20}$$

定义 $\varepsilon:=\min\left\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\right\}>0$，我们结合(H)以及(20)可以得到，对于任意 $\lambda\in\left[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon\right)$，

(G) w_{λ} 负最小值不能在 $\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda}\right\}$ 内取到。

令 $\Omega=\Sigma_{\lambda}^{-}\backslash\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta_0}}$，当给定 $0<\delta_0<\overline{l_0}$ 时，联合(4) (F) (19) (G)以及定理 3.3，我们可以证明对任意 $\lambda\in\left[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon\right)$，有 $w_{\lambda}\left(x\right)\geq0$，$x\in\Sigma_{\lambda}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda}\right\}$，这与(11)矛盾，因此我们得到 $\lambda_0=x_1^0$，$w_{\lambda_0}\left(x\right)\geq0,x\in\Sigma_{\lambda_0}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right\}$。

同样的方法，我们将平面从 x_1 轴充分正的地方向 x_1 轴负方向移动平面。因此我们可以得到 $\lambda_0=x_1^0$，$w_{\lambda_0}\left(x\right)\equiv0,x\in\Sigma_{\lambda_0}\backslash\left\{\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right\}$。因为方程(1)是旋转不变的，因此我们得到定理 2.1。

4. 总结

本文通过使用[12]中的移动平面法，增加了新的条件，即存在某点 $x^0\in\mathbb{R}^n$ 使得式子 $\lim_{\left|x-x^0\right|\to\infty}\left|x-x^0\right|^{n-2s}u\left(x\right)=\infty$ 成立，考虑了方程(1)的负解，同时将[12]中的系数范围 $0<s<1$，$p=2$，$q=4s$，$\sigma=1$ 推广到了 $0<s<1$，$0\leq q\leq4s$，$n>\max\left\{2s,q\right\}$，$p=\frac{2n-q}{n-2s}$，$1\leq\sigma\leq\frac{n+2s-q}{n-2s}$，且 σ 为奇数。最后也得到了解的径向对称性的结论。

参考文献

[1] Chen, W., Li, C. and Li, Y. (2016) A Direct Method of Moving Planes for the Fractional Laplacian. *Advances in Mathematics*, **308**, 404-437. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.11.038

[2] Chen, W., Li, Y. and Zhang, R. (2017) Direct Method of Moving Spheres on Fractional Order Equations. *Journal of Functional Analysis*, **272**, 4131-4157. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.022

[3] Li, D., Miao, C. and Zhang, X. (2009) The Focusing Energy-Critical Hartree Equation. *Journal of Differential Equations*, **246**, 1139-1163. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.05.013

[4] Lieb, E. and Simon, B. (1977) The Hartree-Fock Theory for Coulomb Systems. *Communications in Mathematical Physics*, **53**, 185-194. https://doi.org/10.1007/BF01609845

[5] Miao, C., Xu, G. and Zhao, L. (2009) Global Well-Posedness, Scattering and Blow-Up for the Energy-Critical Focusing Non-Linear Wave Equation. *Colloquium Mathematicum*, **114**, 213-236. https://doi.org/10.4064/cm114-2-5

[6] Buslaev, V.S. and Perel'Man, G.S. (1992) Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation: States That Are Close to Asoliton. *Algebra i Analiz*, **1992**, 63-102.

[7] Bourgain, J. and Wang, W.M. (2008) Quasi-Periodic Solutions of Nonlinear Random Schrödinger Equations. *Journal of the European Mathematical Society*, **10**, 1-45. https://doi.org/10.4171/JEMS/102

[8] Lieb, E.H. (2002) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-55925-9_37

[9] Liu, S. (2009) Regularity, Symmetry, and Uniqueness of Some Integral Type Quasilinear Equations. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **71**, 1796-1806. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.014

[10] Dai, W., Fang, Y., Huang, J., Qin, Y. and Wang, B. (2018) Regularity and Classification of Solutions to Static Hartree Equations Involving Fractional Laplacians. *Discrete & Continuous Dynamical Systems Series A*, **38**, 2795-2809.

[11] Dai, W., Fang, Y. and Qin, G. (2018) Classification of Positive Solutions to Fractional Order Hartree Equations via a Direct Method of Moving Planes. *Journal of Differential Equations*, **265**, 2044-2063. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.04.026

[12] Stein, E.M. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. https://doi.org/10.1515/9781400883882