Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(3), 996-1002**
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113107

Hans汉斯

无限维系统正迹类算子上保持Bregman f-散度映射

李　田，张艳芳，贺　衎

太原理工大学，数学学院，山西 太原

收稿日期：2022年2月11日；录用日期：2022年3月7日；发布日期：2022年3月14日

摘　要

设H为无限维的可分Hilbert空间，令$PTr(H)$表示H上所有的正定的迹类算子组成的集合。该文主要研究了无限维的可分Hilbert空间H上正迹类算子的保持问题，给出了$PTr(H)$上保持满足某些条件的可微凸函数对应的Bregman f-散度和Umegaki相对熵(函数 $x \mapsto x\log x$ 对应的Bregman散度)的双射的完全刻画。

关键词

正迹类算子，Bregman f-散度，Umegaki相对熵，保持

Maps Preserving Bregman f-Divergence on the Set of Positive Definite Trace Operators of Infinite Dimensional Systems

Tian Li, Yanfang Zhang, Kan He

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Feb. 11th, 2022; accepted: Mar. 7th, 2022; published: Mar. 14th, 2022

Abstract

Let H be an infinite separable Hilbert space and $PTr(H)$ represent the set of all positive trace operators on H. In this paper, we characterize the bijective maps on $PTr(H)$ preserving Bregman f-divergence where f is a differentiable convex function satisfying certain conditions and Umegaki relative entropy (Bregman divergence corresponding to function $x \mapsto x\log x$); then we show that these maps are unitary transformations or anti-unitary transformations.

文章引用: 李田, 张艳芳, 贺衎. 无限维系统正迹类算子上保持 Bregman f-散度映射[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 996-1002. DOI: 10.12677/aam.2022.113107

Keywords

Positive Definite Trace Operators, Bregman f-Divergence, Umegaki Relative Entropy, Preservers

1. 引言

算子代数理论产生世纪年代。现在这一理论已成为现代数学中一个热门分支，它与量子力学量子信息等重要学科都有着深刻的联系。算子代数上的保持问题在算子理论中备受关注，已经得到了许多有意义的成果，如保持量子 f-散度的映射，保持 Bregman f-散度的映射等。

在数学及其应用的大部分领域中，研究两个对象之间的某些差异度量是一项重要且普遍的任务。一些广泛研究的度量是距离函数，但是有许多重要的度量不能满足距离的性质，如 Bregman 散度，Jensen 散度等，但这些度量在数学应用的几个领域也有着广泛的应用并且也取得了一系列丰富的研究成果。

2008 年 Molnár 给出了有限维 Hilbert 空间的密度算子集上保持 Umegaki 相对熵的双射的一般形式，证明了该类映射为空间上的酉变换或反酉变换(见[1])。后来在 2010 年 Molnár 将文献[1]中映射是双射的假设去掉，证明了密度算子集上保持 Umegaki 相对熵的一般映射具有与文献[1]同样的结构，即也是空间上的酉变换或反酉变换(见[2])。Umegaki 相对熵(或 von Neumann 散度)是重要的 Bregman 散度之一，对应于函数 $x \mapsto x\log x - x$，$x > 0$。此外，2016 年 Molnár 和 Nagy 刻画了正定锥上的保持 Bregman 散度和 Jensen 散度的所有双射映射的结构(见[3])。同年，文献[4]对态空间上保持同样的 Bregman 散度和 Jensen 散度的双射变换也进行了类似的研究，得到了同样的结论，这类双射映射都是酉或反酉同余变换。而对于有限维 Hilbert 空间密度算子集上其他类型的量子相对熵(如 Belavkin-Staszewskif 熵，Tsallis 熵，二次相对熵，Jensen-Shannon 散度等)和量子 f-散度(是量子相对熵概念的一种推广)的保持问题，可参阅文献[5] [6] [7]。

在已有研究的基础上，我们发现对于无限维空间的算子集上保持 Bregman 散度的映射研究较少。因此，本文我们主要考虑无限维的可分 Hilbert 空间的正迹类算子集上保持满足某些条件的可微凸函数对应的 Bregman f-散度和 Umegaki 相对熵(函数 $x \mapsto x\log x - x$ 对应的 Bregman 散度)双射的完全刻画。在给出主要结果之前，我们需要对一些符号和基本概念做一个简短的介绍。

2. 预备知识

在本文中，令 H 为无限维的可分 Hilbert 空间，用 $B(H)$ 表示 H 上的有界线性算子全体组成的 Banach 代数。令 $P(H)$ 表示 H 上的所有正定、有界线性算子组成的集合，$Tr(H)$ 表示 H 上所有的迹类算子组成的集合，$PTr(H)$ 表示正迹类算子，显然 $PTr(H) = P(H) \cap Tr(H)$。

定义 1.1 令 f 是区间上的任意可微凸函数，$PTr(H)$ 上的 Bregman f-散度的定义为

$$H_f(A,B) = tr\left(f(A) - f(B) - f'(B)(A-B)\right).$$

特别地，若 f 对应于函数，得到 Umegaki 相对熵的定义为

$$S(A \| B) = tr\left(A(\log A - \log B) - (A-B)\right).$$

此处 $tr(.)$ 表示算子的迹，log 表示以 2 为底的对数(见文献[8]，[9])。如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 存在，那么 f，f' 可以连续扩展到 $[0,\infty)$，故对于任何一对正迹类算子，Bregman f-散度定义明确并且是有限的。

由上述定义易得，酉变换或反酉变换保持 Bregman f-散度和 Umegaki 相对熵不变。本文的主要结果说明反之也成立。

3. 主要结果及证明

定理 2.1 设 f 是区间 $(0,\infty)$ 上的可微凸函数，且 f' 有下界无上界。$\phi: PTr(H)\to PTr(H)$ 是一个双射且满足

$$H_f(\phi(A),\phi(B)) = H_f(A,B).$$

那么存在 H 上的酉或反酉算子 $U: H\to H$ 使得 ϕ 的形式为

$$\phi(A) = UAU^*, A\in PTr(H).$$

定理 2.2 令 $\phi: PTr(H)\to PTr(H)$ 是一个双射且满足

$$S(A\|B) = S(\phi(A)\|\phi(B)).$$

即

$$tr\left(\phi(A)\left[\log\phi(A)-\log\phi(B)\right]-\left[\phi(A)-\phi(B)\right]\right) = tr\left(A\left[\log A-\log B\right]-(A-B)\right)$$

那么存在 H 上的酉或反酉算子 $U: H\to H$ 使得 ϕ 的形式为

$$\phi(A) = UAU^*, A\in PTr(H).$$

在这部分，我们主要完成定理 2.1 和定理 2.2 的证明。首先介绍如下的定义。

定义 2.1 设 $I\subset R$ 是一个区间，f 是定义在 I 上的函数。对于算子 $A\in P(H)$，若谱集 $\delta(A)\subseteq I$，则其对应的标准算子函数如下

$$A = \sum_{a\in\delta(A)} aP_a \mapsto f(A) := \sum_{a\in\delta(A)} f(a)P_a$$

其中 P_a 是特征值 a 对应的谱投影(见文献[4])。

接着给出如下引理，它对定理的证明是至关重要的。

引理 2.1 令 f 是区间 $(0,\infty)$ 上的可微凸函数，对于任意取定的 $B,C\in PTr(H)$，下列断言是正确的。

断言 A： 当 f' 有下界无上界且 $f'\ge 0$ 时，集合

$$\left\{H_f(B,A)-H_f(C,A) \mid A\in PTr(H)\right\}, \tag{1}$$

有下界当且仅当 $B\le C$。

断言 B： 当 f' 无下界无上界时，集合

$$\left\{H_f(A,B)-H_f(A,C) \mid A\in PTr(H)\right\}, \tag{2}$$

有下界当且仅当 $f'(B)\le f'(C)$。

证明：1) 首先计算

$$H_f(B,A)-H_f(C,A) = trf(B)-trf(C)+trf'(A)(C-B).$$

假设 $B<C$。令 k 表示 f' 的下界，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是 H 的一组规范正交基，E_{ii} 表示 $\{e_i\}$ 生成子空间

的正交投影，则有

$$f'(A) \ge k\sum_i \frac{E_{ii}}{2^i}, A \in PTr(H)$$

故

$$tr\left(f'(A)(C-B)\right) \ge ktr\left(\sum_i \frac{E_{ii}}{2^i}(C-B)\right), A \in PTr(H)$$

令 λ_i 表示 $B-C$ 的特征值，

$$tr\left(\sum_i \frac{E_{ii}}{2^i}(C-B)\right) = \sum_i \frac{E_{ii}}{2^i} tr(C-B) = \sum_i \frac{\lambda_i}{2^i} < \infty,$$

对任意的 $A \in PTr(H)$ 成立。因此集合(1)是有下界的。

反之，如果 $B \nleq C$，则存在单位向量 $x \in H$，满足 $\langle Bx, x\rangle > \langle Cx, x\rangle$。可以找到 H 的一组规范正交基 $\{x, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$，用 P_x 表示由 x 生成的一维子空间的正交投影，E_{ii} 表示 $\{e_i\}$ 生成的子空间上的正交投影 $(i = 2, 3, \cdots)$。对于任意的 $t > 0$，有

$$tr\left[f'\left(tP_x + \left(\frac{E_{ii}}{2^i} - \frac{P_x}{2^i}\right)\right)(C-B)\right] = f'(t)\langle (C-B)x, x\rangle + \sum_{i=2} f'\left(\frac{1}{2^i}\right)\langle (C-B)x_i, x_i\rangle \to -\infty.$$

其中上式右端第一项无下界，第二项和小于 0，故此时集合(1)无下界。从而证明了集合(1)有下界 $\Leftrightarrow B < C$，断言 A 证明完成。

证明：2) 计算可得

$$\begin{aligned}
&H_f(A,B) - H_f(A,B) \\
&= tr\left(f(A) - f(B) - f'(A-B)\right) - tr\left(f(A) - f\left(C - f'(C)(A-C)\right)\right) \\
&= tr\left(\left[f'(C) - f'(B)\right]A\right) + tr\left(f(C) - f(B) - \left[f'(C)C - f'(B)B\right]\right).
\end{aligned}$$

一方面，若 $f'(B) \le f'(C)$。记 $M = f'(B) - f'(C)$，由谱分解可设 $A = \sum_i a_i P_i$，$M = \sum_j m_j Q_j$，其中 P_i 是 A 的特征值 a_i 对应的谱投影，Q_j 是 M 的特征值 m_j 对应的谱投影。从而有

$$\begin{aligned}
\left|tr(MA + AM)\right| &= tr\left(\sum_{i,j} a_i m_j \left(P_i Q_j + Q_j P_i\right)\right) \\
&= \left|\sum_{i,j} a_i m_j tr\left(P_i Q_j + Q_j P_i\right)\right| \\
&\le \sum_{i,j} \left|a_i m_j\right| \left|tr\left(P_i Q_j + Q_j P_i\right)\right|
\end{aligned}$$

由于 A, M 都是正定迹类算子，所以存在 $\delta > 0$，使得

$$\left|tr\left(P_i Q_j + Q_j P_i\right)\right| \le \left|tr\left(P_i Q_j\right)\right| + \left|tr\left(Q_j P_i\right)\right| < \delta$$

对所有的 i, j 都成立。因此

$$\left|tr(MA + AM)\right| < \delta \sum_{i,j} \left|a_i m_j\right| \le \delta\left(\sum_i \left|a_i\right|^2 + \sum_j \left|m_j\right|^2\right) < \infty$$

而 B, C 是都是任意取定的，可知

$$tr\left(\left(f'(C)-f'(B)\right)A\right)+tr\left(f(C)-f(B)-\left(f'(C)C-f'(B)B\right)\right)<\infty.$$

从而集合(2)是有下界的。

反之，$f'(B)\nleq f'(C)$，则存在单位向量 $x\in H$，满足 $\left\langle\left(f'(C)-f'(B)\right)x,x\right\rangle<0$。如果对任意的 $A\in PTr(H)$ 令 $A_1=f'(A)$，则 $A_1\in Tr(H)$ 且 $\left\langle\left(f'(C)-f'(B)\right)x,x\right\rangle<0\Leftrightarrow\left\langle\left(C_1-B_1\right)x,x\right\rangle<0$。可以找到 H 的一组规范正交基 $\{x,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$，$P_x$ 表示由 x 生成的一维子空间的正交投影，E_{ii} 表示 $\{e_i\}$ 生成的子空间上的正交投影 $(i=2,3,\cdots)$。对于任意的 $t\in R$，构造 $f'(A)=A_1=tP_x+\sum_i\frac{E_{ii}}{2^i}$，则

$$\begin{aligned}&tr\left[\left(f'(C)-f'(B)\right)A\right]\\&=tr\left[\left(f'(C)-f'(B)\right)f'^{-1}f'(A)\right]=tr\left[\left(f'(C)-f'(B)\right)f'^{-1}(A_1)\right]\\&=f'^{-1}\left(t+\frac{1}{2}\right)\left\langle\left(f'(C)-f'(B)\right)x,x\right\rangle+\sum_i f'^{-1}\left(\frac{1}{2^i}\right)tr\left(\left(f'(C)-f'(B)\right)E_{ii}\right)\end{aligned}$$

已知 $\left\{f'^{-1}(t)\,|\,t\in R\right\}$ 无上界，所以上式右端第一项无下界，此时集合(2)无下界。从而证明了集合(2)有下界 $\Leftrightarrow f'(B)\le f'(C)$。

接下来开始定理 2.1 和 2.2 的证明。

证明：1) 由于 f 是凸的且处处可微，所以 f' 是连续且单调递增。又 f' 有下界且 $f'\ge0$，故 f' 可以连续扩展到 $[0,+\infty)$。利用上述引理 2.1 中断言 A 对序的刻画，我们得到 ϕ 是保持序同构的，即对任意的 $B,C\in PTr(H)$，有

$$B\le C\Leftrightarrow\phi(B)\le\varphi(C). \tag{3}$$

由文献[10]中定理 1 知，ϕ 的形式为

$$\phi(A)=TAT^*,A\in PTr(H).$$

其中 T 是 H 上的可逆有界线性或有界共轭线性算子。

我们假设 T 是线性的，共轭线性情况类似。接下来证明 T 是酉的。反证法，假设 T 不是酉的，考虑 T 的极分解 $T=UP$，其中 $P=\sqrt{T^*T}$ 是正定的且 U 是酉的。由于双射映射 $\phi:PTr(H)\to PTr(H)$ 在酉同余变换下保持 Bregman f-散度不变，因此

$$H_f(A,B)=H_f\left(TAT^*,TBT^*\right)=H_f(PAP,PBP). \tag{4}$$

对任意的 $A,B\in PTr(H)$ 成立。由假设 T 不是酉的，得 $P\ne I$ 且 P 的特征值不大于 1。假设 P 有大于 1 特征值 λ，v 是特征值 λ 对应的单位特征向量，因为映射 $A\to PAP$ 是 $PTr(H)$ 上的保持 Bregman f-散度的双射映射，因此逆变换 $A\to P^{-1}AP^{-1}$ 也保持 Bregman$f$-散度，如果 P 没有任何大于 1 的特征值，P^{-1} 一定有。假设 $Pv=\lambda v$ 对一些 $\lambda>1$ 和单位向量 $v\in C$ 成立，令 Q_v 表示由 v 生成一维子空间上的正交投影。由等式(4)，变换 $A\to PAP$ 保持 Bregman f-散度，故变换 $A\to P^nAP^n$ 也保持 Bregman f-散度。因此，

$$H_f\left(\lambda^2Q_v,Q_v\right)=H_f\left(P^n\lambda^2Q_vP^n,P^nQ_vP^n\right)=H_f\left(\lambda^{2(n+1)}Q_v,\lambda^{2n}Q_v\right). \tag{5}$$

又且

$$\begin{aligned}&H_f(A,B)+H_f(B,A)\\&=trf(A)-trf(B)-trf'(B)(A-B)+trf(B)-trf(A)-trf'(A)(B-A)\\&=tr\left(f'(A)-f'(B)\right)(A-B).\end{aligned}$$

结合式(5)，得出

$$\begin{aligned}H_f\left(\lambda^2 Q_v,Q_v\right)+H_f\left(Q_v,\lambda^2 Q_v\right)&=H_f\left(\lambda^{2(n+1)}Q_v,\lambda^{2n}Q_v\right)+H_f\left(\lambda^{2n}Q_v,\lambda^{2(n+1)}Q_v\right)\\&=tr\left(\left(f'\lambda^{2(n+1)}Q_v\right)-f'\left(\lambda^{2n}Q_v\right)\right)\left(\lambda^{2(n+1)}Q_v-\lambda^{2n}Q_v\right)\\&=\left(f'\left(\lambda^{2(n+1)}\right)-f'\left(\lambda^{2n}\right)\right)\lambda^{2n}\left(\lambda^2-1\right).\end{aligned}$$

对任意的 $n\in N$ 成立。这意味着 $\left(f'\left(\lambda^{2(n+1)}\right)-f'\left(\lambda^{2n}\right)\right)\lambda^{2n}$ 与 n 无关，即

$$\left(f'\left(\lambda^{2(n+1)}\right)-f'\left(\lambda^{2n}\right)\right)\lambda^{2n}=\frac{c}{\left(\lambda^2\right)^n}$$

对一些常数 c 成立。因此，

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'\left(\lambda^{2(n+1)}\right)=f'(1)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{c}{\left(\lambda^2\right)^n}=f'(1)+c\sum_{k=0}^{n}\left(\lambda^{-2}\right)^n<\infty.$$

这与 f' 无上界矛盾，故证得 T 是酉的。定理 2.1 证明完成。

证明：2) 在定义(1.1)中取 $f=x\log x-x$，则集合(2)形式为

$$\left\{S(A\|B)-S(A\|C)\mid A\in PTr(H)\right\}. \tag{6}$$

故由引理 2.1 中的断言 B 知，集合(6)有下界当且仅当 $\log(B)\le\log(C)$。由于定理中双射 $\phi:PTr(H)\to PTr(H)$ 保持 Umegaki 相对熵，利用上述对序的刻画，我们得到 ϕ 是保持序同构的，即对任意的 $B,C\in PTr(H)$，有

$$\log B\le\log C\Leftrightarrow\log\phi(B)\le\log\phi(C).$$

由文献[10]中定理 2 知，存在可逆的有界线性或有界共轭线性算子 $T:H\to H$ 和自伴算子 $X:H\to H$ 使得

$$\phi(A)=\mathrm{e}^{T(\log A)T^*+X},A\in PTr(H). \tag{7}$$

接下来我们将证明，若 T 是线性的，则 T 是一个酉算子；若 T 是共轭线性的，则 T 是共轭酉算子。首先假设 T 是线性的，考虑 T 的极分解，$T=UP$，其中 $P=\sqrt{TT^*}$ 是正定的，U 是酉的。由于酉相似变换保持 Umegaki 相对熵不变，因此有

$$\phi(A)=\mathrm{e}^{UP(\log A)UP^*+X}=U\mathrm{e}^{P(\log A)P^*+UXU^*}U^*,A\in PTr(H). \tag{8}$$

即我们总可以假设式(7)中 T 是正算子。对于任意的 $A,B\in PTr(H)$，由下式

$$\begin{aligned}&tr\left[A(\log A-\log B)-(A-B)\right]\\&=tr\left[\phi(A)(\log\phi(A)-\log\phi(B))-(\phi(A)-\phi(B))\right]\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}&tr\left[\mathrm{e}^{T(\log A)T+X}\left(T(\log A)T-T(\log B)T\right)-\left(\mathrm{e}^{T(\log A)T+X}-\mathrm{e}^{T(\log B)T+X}\right)\right]\\&=tr\left[A(\log A-\log B)-(A-B)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

固定 A，用 tB 代替 B，其中 $t>0$。从而由等式(9)得

$$a\log t + tre^{(\log t)T^2 + T(\log B)T + X} + b = c\log t + dt + e, \tag{10}$$

对某些常数 a,b,c,d 和 e 成立。事实上，T 只能是单位算子。假设 T 有一个大于 1 的特征值 λ，其对应的一个对应的特征向量为 x 用 Q_x 表示由 x 生成子空间上的正交投影。任意选取实数 μ，总会存在单位向量 y，使得 $\mu(y\otimes y)\le T(\log B)T + X$ 成立。此时 $\lambda^2 Q_x \le T^2$。所以当 $t>1$ 时，有

$$(\log t)\lambda^2 Q_x + \mu(y\otimes y)\le(\log t)T^2 + T(\log B)T + X.$$

由迹函数的单调性(见[11]，定理 2.10])知

$$tre^{(\log t)\lambda^2 Q_x + \mu(y\otimes y)} \le tre^{(\log t)T^2 + T(\log B)T + X}, t>1.$$

因此函数 $t\to tre^{(\log t)T^2+T(\log B)T+X}$ $(t>1)$ 可以被函数 $\alpha t^{\lambda^2}+\beta$ 最小化，其中 $\alpha>0$，β 是实数。由于 $\lambda^2>1$，考虑等式(10)并让 t 趋于无穷大，很容易得到矛盾。所以 T 的特征值不大于 1。此外 ϕ^{-1} 也保持了 Umegaki 相对熵不变且

$$\phi^{-1}(A) = e^{T^{-1}(\log A)T^{-1} - T^{-1}(X)T^{-1}}, A\in PTr(H).$$

所以 T^{-1} 的特征值也不大于 1 从而有 $T=I$。

最后证明 $X=0$。在式(9)中，令 $A=I$，B 是 $PTr(H)$ 中与 X 可交换的任意元。由式(8)得到

$$tre^X(-\log B + B - I) = tr(-\log B + B - I)$$

由函数 $x\mapsto -\log x + x - 1$ 的性质($x\ge1$，函数严格递增；且 $x=1$ 时函数值为 0)，很容易看出与 X 可交换的任意正算子 D 可写成 $D=-\log B + B - I$。因此有

$$tre^X D = trD$$

对 H 上任意正算子 D 成立。所以 $e^X = I$，即 $X=0$。定理 2.2 证明完成。

参考文献

[1] Molnár, L. (2008) Maps on States Preserving the Relative Entropy. *Journal of Mathematical Physics*, **49**, Article ID: 032114. https://doi.org/10.1063/1.2898693

[2] Molnár, L. (2010) Maps on States Preserving the Relative Entropy. II. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 3343-3350. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.01.025

[3] Molnár, L., Pitrik, J. and Virosztek, D. (2016) Maps on Positive Definite Matrices Preserving Bregman and Jensen Divergences. *Linear Algebra and its Applications*, **495**, 174-189. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.01.010

[4] Virosztek, D. (2016) Maps on Quantum States Preserving Bregman and Jensen Divergences. *Letters in Mathematical Physics*, **106**, 1217-1234. https://doi.org/10.1007/s11005-016-0868-0

[5] Molnár, L. and Nagy, G. (2012) Isometries and Relative Entropy Preserving Maps on Density Operators. *Letters in Mathematical Physics*, **60**, 93-108. https://doi.org/10.1080/03081087.2011.570267

[6] Molnár, L., Nagy, G. and Szokol, P. (2013) Maps on Density Operators Preserving Quantum F-Divergences. *Quantum Information Processing*, **12**, 2309-2323. https://doi.org/10.1007/s11128-013-0528-6

[7] Virosztek, D. (2016) Quantum F-Divergence Preserving Maps on Positive Semidefinite Operators Acting on Finite Dimensional Hilbert Spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, **501**, 242-253. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.031

[8] Hisaharu, U. (1962) Conditional Expectation in an Operator Algebra, IV. *Kodai Mathematical Journal*, **14**, 59-85. https://doi.org/10.2996/kmj/1138844604

[9] Pitrik, J. and Virosztek, D. (2015) On the Joint Convexity of the Bregman Divergence of Matrices. *Letters in Mathematical Physics*, **105**, 675õ69. https://doi.org/10.1007/s11005-015-0757-y

[10] Moln Sr, L. (2011) Order Automorphisms on Positive Definite Operators and a Few Applications. *Linear Algebra and Its Applications*, **434**, 2158-2169. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.12.007

[11] Carlen, E. (2010) Trace Inequalities and Quantum Entropy: An Introductory Course. *Entropy and the Quantum*, **529**, 43-140. https://doi.org/10.1090/conm/529/10428