Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(3), 1089-1106**
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113118

Hans汉斯

最大密度限制下可压等熵欧拉系统含接触间断时可容许弱解的不唯一性

华嘉乐，夏黎蓉

东华大学理学院，上海

收稿日期：2022年2月18日；录用日期：2022年3月14日；发布日期：2022年3月21日

摘　要

本文主要研究具有最大密度限制的可压等熵欧拉系统二维黎曼问题弱解的不唯一性。其中，密度限制是由奇性压强项给定的。对给定初值使得其标准解(自相似解)包含接触间断时，得到了无穷多可容许弱解的存在性。

关键词

欧拉方程，非唯一性，二维黎曼问题，最大密度限制，拥塞

The Non-Uniqueness of Admissible Weak Solutions to Compressible Isentropic Euler Systems Containing Contact Discontinuities with Maximum Density Constraints

Jiale Hua, Lirong Xia

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Feb. 18th, 2022; accepted: Mar. 14th, 2022; published: Mar. 21st, 2022

Abstract

We investigate the uniqueness of entropy solution to 2D Riemann problem of compressible isentropic Euler system with maximum density constraint. The constraint is imposed with a singular pressure. Given initial data for which the standard (self-similar) solution consists of contact dis-

文章引用: 华嘉乐, 夏黎蓉. 最大密度限制下可压等熵欧拉系统含接触间断时可容许弱解的不唯一性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1089-1106. DOI: 10.12677/aam.2022.113118

continuity, there exist infinitely many admissible weak solutions.

Keywords

Euler System, Non-Uniqueness, 2D Riemann Problem, Maximum Density Constraint, Congestion

1. 引言

本文研究如下二维等熵可压欧拉系统：

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}_x(\rho\upsilon)=0,\\ \partial_t(\rho\upsilon)+\operatorname{div}_x(\rho\upsilon\otimes\upsilon)+\nabla_x\left[p(\rho)\right]=0,\\ \rho(0,\cdot)=\rho_0,\\ \upsilon(0,\cdot)=\upsilon_0,\end{cases}\quad \left(t>0,x\in\mathbb{R}^2\right) \tag{1}$$

其中 $\rho=\rho(t,x)\in\mathbb{R}^+,v=v(t,x)\in\mathbb{R}^2$ 分别代表流体的密度及速度。系统中的方程则分别表示质量守恒和动量守恒。常见的压强项为 $p=C\rho^\gamma$。

众所周知，欧拉方程很难找到经典解，见[1] [2]等。因此重点考虑弱解。但弱解只有在给定一些熵条件时才唯一。当空间维数为一维时，有较完善的理论，如：Lax熵条件，Oleinik熵条件以及熵－熵流对等条件可以确保弱解的唯一性，见[1] [2]等。

本文主要考虑熵不等式：

$$\partial_t\left(\rho\varepsilon(\rho)+\rho\frac{|v|^2}{2}\right)+\operatorname{div}_x\left[\left(\rho\varepsilon(\rho)+\rho\frac{|v|^2}{2}+p(\rho)\right)v\right]\le 0 \tag{2}$$

其中熵(总能)为 $\eta=\rho\varepsilon(\rho)+\rho\frac{|v|^2}{2}$， $\varepsilon:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 为内能且由 $p(r)=r^2\varepsilon'(r)$ 给定。若在分布意义上满足此熵不等式，则其解被称为是可容许的。

在空间维数为多维时，仅依靠这个熵条件并不能保证弱解的唯一性。近年来，一系列工作指出给定合适的初值，在满足类似(2)的可容许条件时可以构造系统(1)的弱解唯一性的反例。在[3]中，Elling. V构造了一个数值上的反例。在[4]中，基于[5]证明对一些具有紧支撑初值可以得到满足能量等式或能量不等式(类似(2))的无穷多弱解。在文献[6]中对于空间周期情况，类似不唯一性被证明。在最近的研究[7]中，对 C^∞ 初值也得到了类似的可容许弱解不唯一的结果。

本文考虑二维黎曼问题：

$$\left(\rho_0(x),v_0(x)\right):=\begin{cases}\left(\rho_-,v_-\right) & x_2<0,\\ \left(\rho_+,v_+\right) & x_2>0,\end{cases} \tag{3}$$

其中，$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$， $v_\pm=\left(v_{\pm1},v_{\pm2}\right)\in\mathbb{R}^2$，且常数 $\rho_\pm\in\mathbb{R}^+,v_{\pm1},v_{\pm2}\in\mathbb{R}$。对于由经典压缩波产生的初值，在压强项 $p(\rho)=\rho^2$ 的情况下[6]构造了二维黎曼问题的无穷多可容许弱解。对于更一般的压强项

$p(\rho)=C\rho^{\gamma}$ 也得到了类似的不唯一性结果[8]，其中黎曼问题的标准解包含两个激波。文献[9]证明只要标准解包含一个激波就有可容许弱解的不唯一性结果。[10]对类似初值问题也得到了不唯一性。[11]中将可容许弱解的不唯一性结论推广到黎曼初值包含接触间断的情况。

本文考虑与文献[12] [13] [14]中相同的带奇性压强项 $p(\rho)$ (此压强项由[15]提出)来施加最大密度限制

$$p(\rho)=\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_*}\right)^{\gamma}}=\frac{\rho^{\gamma}\rho_*^{\gamma}}{(\rho_*-\rho)^{\gamma}},\quad \gamma\geq 1. \tag{4}$$

其中，ρ_* 是最大密度。当 $\rho\ll\rho_*$ 时，上述带奇性的压强项 $p(\rho)$ 类似于常见压强

$$p(\rho)=C\rho^{\gamma},\quad C>0\text{ 常数},\gamma\geq 1. \tag{5}$$

当 $\rho\to\rho_*$ 时，此带奇性的压强项趋于无穷。文献[16]研究了具有(4)形式的最大密度限制的欧拉方程二维黎曼问题可容许弱解不唯一，其中黎曼问题的标准解由一个可容许1-激波和一个3-激波组成，即 $v_{-1}=v_{+1}$ 且

$$v_{+2}-v_{-2}<-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}. \tag{6}$$

文献[17]对两种黎曼初值：一是标准解包含一个1-激波和3-稀疏波

$$\rho_-<\rho_+\text{ 且}$$

$$-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}<v_{+2}-v_{-2}<\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r, \tag{7}$$

二是标准解包含一个1-激波

$$\rho_-<\rho_+\text{ 且}$$

$$v_{+2}-v_{-2}=-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}, \tag{8}$$

得到了可容许弱解的不唯一性。

本文主要目的是在具有最大密度限制下将弱解不唯一的结果推广到黎曼初值包含接触间断的情况。在二维等熵欧拉系统中，其标准解包含接触间断当且仅当 $v_{-1}\neq v_{+1}$。

具体来说，考虑初值：一是标准解包含一个1-激波，一个可能的2-接触间断和一个3-稀疏波

$$\rho_-<\rho_+\text{ 且}$$

$$-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}<v_{+2}-v_{-2}<\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r, \tag{9}$$

二是标准解包含一个1-激波和可能的2-接触间断

$$\rho_-<\rho_+\text{ 且}$$

$$v_{+2}-v_{-2}=-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}, \tag{10}$$

如文献[9]中所述，关于其他涉及到一个激波的情况可以类似地用旋转坐标的方法来处理。

类似[11]，将可容许弱解不唯一性结论推广到黎曼初值(3)包含接触间断(即 $v_{-1} \neq v_{+1}$)，主要结论是下面定理：

定理1.1. 若对 $\rho_+,\rho_- > 0, \rho_+ \neq \rho_-$ 且 $v_+, v_- \in \mathbb{R}^2$

$$-\left|\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} \mathrm{d}\tau\right| < v_{-2} - v_{+2} \leq \sqrt{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+\rho_-}}, \tag{11}$$

则黎曼问题(1) (3)存在无穷多可容许弱解。

本文其余部分结构如下：第二节说明了一些需要的符号和定义及所需的引理和命题；第三节主要证明定理结论。

2. 定义及引理

在本节，我们提供证明定理所需的符号定义与引理命题。

2.1. 符号和定义

定义2.1. (弱解，见[4]中定义3.1)对任意测试函数 $(\psi,\phi) \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty), \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2\right)$，若下列等式成立：

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\rho \partial_t \psi + \rho v \cdot \nabla_x \psi) \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x) \psi(0,x) \mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\rho v \cdot \partial_t \phi + \rho v \otimes v : D_x \phi + p(\rho) \mathrm{div}_x \phi) \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x) v_0(x) \cdot \phi(0,x) \mathrm{d}x = 0.$$

则 $(\rho,v) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)\right)$ 是柯西问题(1)在 $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$ 上的弱解。

定义2.2. (可容许弱解，见[6]中定义3.2)对任意非负测试函数 $\varphi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty), \mathbb{R}\right)$，若(1)的弱解满足下列不等式

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\rho\varepsilon(\rho) + \rho \frac{|v|^2}{2} \right) \partial_t \varphi + \left(\rho\varepsilon(\rho) + \rho \frac{|v|^2}{2} + p(\rho) \right) v \cdot \nabla_x \varphi \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \left(\rho_0(x) \varepsilon(\rho_0(x)) + \rho_0(x) \frac{|v_0(x)|^2}{2} \right) \varphi(0,x) \mathrm{d}x \geq 0,$$

则弱解 (ρ,v) 是柯西问题 (1) 的可容许弱解。其中，内能 $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 由压强 $p(\rho) = \rho^2 \varepsilon'(\rho)$ 给定。

本文主要研究二维黎曼问题，类似文献[6] [8] [9]，考虑仅依赖于时间t和空间变量 x_2 的解

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_2}(\rho v_2) = 0, \\ \partial_t(\rho v_1) + \partial_{x_2}(\rho v_1 v_2) = 0, \\ \partial_t(\rho v_2) + \partial_{x_2}(\rho v_1 v_2) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

初值为

$$\rho(0,x_2) = \begin{cases} \rho_-, & x_2 < 0, \\ \rho_+, & x_2 > 0, \end{cases} \qquad v(0,x_2) = \begin{cases} v_-, & x_2 < 0, \\ v_+, & x_2 > 0. \end{cases} \tag{13}$$

由于 v_1, v_2 的方程可被解耦，(12)可简化为一个含有未知数 (ρ, v_2) 的一维双曲守恒律方程组。该系统的解可以像经典双曲守恒律理论一样由自相似函数给出。通过将其推广到二维情况，我们可以得到二维黎曼问题的可容许弱解。这种可容许弱解被称为标准解(自相似解)。

定义2.3. (扇形分区，见[6]中定义3.3)空间 $\mathbb{R}^2\times[0,\infty)$ 的扇形分区由满足下列形式的有限个开集 $P_-,P_1,\cdots,P_N,P_+$ 组成：

$$P_-=\{(x,t):t>0\text{ 且 }x_2<v_-t\},\tag{14}$$

$$P_i=\{(x,t):t>0\text{ 且 }v_{i-1}t<x_2<v_it\},\tag{15}$$

$$P_+=\{(x,t):t>0\text{ 且 }x_2>v_+t\},\tag{16}$$

其中，$v_-,v_1,\cdots,v_N,v_+$ 是任意实数且 $v_-<v_1<\cdots<v_N<v_+$。

记所有对称无迹 2×2 矩阵的集合为 $\mathcal{S}_0^{2\times2}$。

定义2.4. (扇形下解，见[6]中定义3.4)若 $(\bar{\rho},\bar{v},\bar{u}):\mathbb{R}^2\times(0,\infty)\to(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^2,\mathcal{S}_0^{2\times2})$ 满足下列条件：

1) 对 $\mathbb{R}^2\times(0,\infty)$ 上的扇形分区 $P_-,P_1,\cdots,P_N,P_+$，有

$$(\bar{\rho},\bar{v},\bar{u})=(\rho_-,v_-,u_-)\mathbf{1}_{P_-}+\sum_{i=1}^{N}(\rho_i,v_i,u_i)\mathbf{1}_{P_i}+(\rho_+,v_+,u_+)\mathbf{1}_{P_+},\tag{17}$$

其中 ρ_1,v_1,u_1 为常数，且 $\rho_1,\rho_\pm>0$，$u_\pm=v_\pm\otimes v_\pm-\frac{1}{2}|v_\pm|^2\,\mathbf{Id}$；

2) 对任意 $i\in1,2,\cdots,N$ 存在一个正数 C_i，使得

$$v_i\otimes v_i-u_i<\frac{C_i}{2}\mathbf{Id};\tag{18}$$

3) $(\bar{\rho},\bar{v},\bar{u})$ 在分布意义上满足下列等式：

$$\partial_t\bar{\rho}+\mathrm{div}_x(\overline{\rho v})=0,\tag{19}$$

$$\partial_t(\overline{\rho v})+\mathrm{div}_x(\overline{\rho u})+\nabla_x\left(p(\bar{\rho})+\frac{1}{2}\left(\sum_i C_i\rho_i\mathbf{1}_{P_i}+\bar{\rho}|\bar{v}|^2\,\mathbf{1}_{P_+\cup P_-}\right)\right)=0;\tag{20}$$

则 $(\bar{\rho},\bar{v},\bar{u})$ 被称为可压欧拉方程黎曼问题(1) (3)的扇形下解。

定义2.5. (可容许扇形下解，见[6]中定义3.5)若扇形下解 $(\bar{\rho},\bar{v},\bar{u})$ 在分布意义上满足下列不等式：

$$\begin{aligned}&\partial_t(\bar{\rho}\varepsilon(\bar{\rho}))+\mathrm{div}_x\left[(\bar{\rho}\varepsilon(\bar{\rho})+p(\bar{\rho}))\bar{v}\right]+\partial_t\left(\bar{\rho}\frac{|\bar{v}|^2}{2}\mathbf{1}_{P_+\cup P_-}\right)+\mathrm{div}_x\left(\bar{\rho}\frac{|\bar{v}|^2}{2}\bar{v}\mathbf{1}_{P_+\cup P_-}\right)\\&+\sum_{i=1}^{N}\left[\partial_t\left(\rho_i\frac{C_i}{2}\mathbf{1}_{P_i}\right)+\mathrm{div}_x\left(\rho_i\bar{v}\frac{C_i}{2}\mathbf{1}_{P_i}\right)\right]\le0,\end{aligned}\tag{21}$$

则其被称为可容许扇形下解。

2.2. 引理和命题

引理2.1. (见[9])假设 $\rho_\pm\in\mathbb{R}^+,v_\pm\in\mathbb{R}^2$ 是常数，且 $v_{-1}=v_{+1}$。

1) 若

$$v_{+2}-v_{-2}\ge\int_0^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r+\int_0^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r,\tag{22}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由1-稀疏波和3-稀疏波组成。中间状态 (ρ_M,v_{M1},v_{M2}) 是真空，即 $\rho_M=0$。

2) 若

$$\left|\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r\right|<v_{+2}-v_{-2}<\int_0^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r+\int_0^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r, \tag{23}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由1-稀疏波和3-稀疏波组成。中间状态(ρ_M,v_{M1},v_{M2})由下列方程组给定：

$$\rho_M<\min\{\rho_-,\rho_+\}, \tag{24}$$

$$v_{+2}-v_{-2}=\int_{\rho_M}^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r+\int_{\rho_M}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r, \tag{25}$$

$$v_{M1}=v_{-1}=v_{+1}, \tag{26}$$

$$v_{M2}=v_{-2}+\int_{\rho_M}^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r. \tag{27}$$

3) 若

$$\left|\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r\right|=v_{+2}-v_{-2}, \tag{28}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由一个稀疏波组成。更准确地说，当$\rho_->\rho_+$时，这个稀疏波是1-稀疏波，当$\rho_-<\rho_+$时，其为3-稀疏波。

4) 若$\rho_->\rho_+$且

$$-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}<v_{+2}-v_{-2}<\int_{\rho_+}^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r, \tag{29}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由1-稀疏波和3-激波组成。中间状态(ρ_M,v_{M1},v_{M2})由下列方程组给定：

$$\rho_+<\rho_M<\rho_-, \tag{30}$$

$$v_{+2}-v_{-2}=\int_{\rho_M}^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r-\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_+)(p(\rho_M)-p(\rho_+))}{\rho_M\rho_+}}, \tag{31}$$

$$v_{M1}=v_{-1}=v_{+1}, \tag{32}$$

$$v_{M2}=v_{-2}+\int_{\rho_M}^{\rho_-}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r. \tag{33}$$

5) 若$\rho_-<\rho_+$且

$$-\sqrt{\frac{(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}<v_{+2}-v_{-2}<\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r, \tag{34}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由1-激波和3-稀疏波组成。中间状态(ρ_M,v_{M1},v_{M2})由下列方程组给定：

$$\rho_-<\rho_M<\rho_+, \tag{35}$$

$$v_{+2}-v_{-2}=\int_{\rho_M}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r-\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_-)(p(\rho_M)-p(\rho_-))}{\rho_M\rho_-}}, \tag{36}$$

$$v_{M1}=v_{-1}=v_{+1}, \tag{37}$$

$$v_{M2}=v_{-2}-\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_-)(p(\rho_M)-p(\rho_-))}{\rho_M\rho_-}}. \tag{38}$$

6) 若

$$v_{+2}-v_{-2}=-\sqrt{\frac{(\rho_- -\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}, \tag{39}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由一个激波组成。更准确地说，当 $\rho_-<\rho_+$ 时，这个激波是1-激波，当 $\rho_->\rho_+$ 时，其为3-激波。

7) 若

$$v_{+2}-v_{-2}<-\sqrt{\frac{(\rho_- -\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}, \tag{40}$$

则黎曼问题(1) (3)的标准解由1-激波和3-激波组成。中间状态 (ρ_M,v_{M1},v_{M2}) 由下列方程组给定：

$$\rho_M>\max\{\rho_-,\rho_+\}, \tag{41}$$

$$v_{+2}-v_{-2}=-\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_+)(p(\rho_M)-p(\rho_+))}{\rho_M\rho_+}}-\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_-)(p(\rho_M)-p(\rho_-))}{\rho_M\rho_-}}, \tag{42}$$

$$v_{M1}=v_{-1}=v_{+1}, \tag{43}$$

$$v_{M2}=v_{-2}-\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_-)(p(\rho_M)-p(\rho_-))}{\rho_M\rho_-}}. \tag{44}$$

注2.1. 在二维等熵欧拉系统中，若 $v_{-1}=v_{+1}$，则自相似解只能由激波和稀疏波组成。若自相似解中出现接触间断，当且仅当 $v_{-1}\neq v_{+1}$。

引理2.2. (见[9]中定理2.3)若 $(\rho_\pm,v_\pm)$ 使得柯西问题(1) (3)存在一个可容许扇形下解 $(\bar{\rho},\bar{v},\bar{u})$，则存在满足下列性质(1) (3)的无穷多可容许弱解：

1) $\rho=\bar{\rho}$；

2) 对几乎所有的 $(t,x)\in P_-\cup P_+$，有 $v(t,x)=\bar{v}(t,x)$；

3) 对几乎所有的 $(t,x)\in P_i$，有 $|v(t,x)|^2=C_i$。

此引理表示如果存在一个可容许扇形下解，则有无穷多可容许弱解存在。因此，无穷多可容许解的构造归结为一个下解的构造。

为了构造扇形下解，下面引理是不可缺少的。

引理2.3. ([17])若给定压强项p为(4)，且 $0<\rho_-<\rho_+$。对任意 $\rho_-\neq\rho_+$，下列不等式成立：

$$\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{\sqrt{p'(r)}}{r}\mathrm{d}r<\sqrt{\frac{(\rho_- -\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))}{\rho_-\rho_+}}. \tag{45}$$

定理的证明也需要下面的引理。

引理2.4. (见[9])对任意 $\rho_-<\rho_M<\rho_+$，下列不等式成立：

$$\sqrt{\frac{(\rho_M-\rho_-)(p(\rho_M)-p(\rho_-))}{\rho_-\rho_M}}<\sqrt{\frac{(\rho_+-\rho_-)(p(\rho_+)-p(\rho_-))}{\rho_-\rho_+}}. \tag{46}$$

3. 定理证明

此节给出两种证明办法。第一种是推广[9] [17]中定理证明方法，得到标准解包含一个接近最大密度的激波和一个2-接触间断时弱解的不唯一性。第二种证明是推广[11]中的方法到具有最大密度限制的更一

般情况。

3.1. 证明方法一

在此，考虑划分四个扇形分区 P_-,P_1,P_2,P_+，即 $N=2$。我们可以如[11]中一样考虑 $v_{-1}\neq v_{+1}$ 情况将扇形下解的定义化简为方程组和不等式组(具体证明见附录)。若满足附录命题 2 中的方程组和不等式组及 $v_-<v_1=\beta<v_+$，则存在一个可容许扇形下解。

类似[9]中所述，选择 ρ_1,δ_2 作为参数，则将 v_-,v_+,v_{12} 和 δ_1 用 ρ_1 表示，继续简化附录命题2中的方程组和不等式组如下：

命题3.1. 若柯西问题(1) (3)存在可容许扇形下解，当且仅当常数 $\rho_1,\delta_2\in\mathbb{R}^2$ 满足：

$$\rho_-<\rho_1<\rho_+, \tag{47}$$

$$\delta_1(\rho_1)>0, \tag{48}$$

$$v_-<v_{12}<v_+, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}&(v_{12}-v_{-2})\left(p(\rho_-)+p(\rho_1)-2\rho_-\rho_1\frac{\varepsilon(\rho_-)-\varepsilon(\rho_1)}{\rho_--\rho_1}\right)\\&\le\delta_1(\rho_1)\rho_1(v_{12}(\rho_1)+v_{-2})-(\delta_1(\rho_1)+\delta_2)\frac{\rho_-\rho_1(v_{12}(\rho_1)-v_{-2})}{\rho_--\rho_1},\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}&(v_{+2}-v_{12})\left(p(\rho_1)+p(\rho_+)-2\rho_1\rho_+\frac{\varepsilon(\rho_1)-\varepsilon(\rho_+)}{\rho_1-\rho_+}\right)\\&\le-\delta_1(\rho_1)\rho_1(v_{+2}+v_{12})-(\delta_1(\rho_1)+\delta_2)\frac{\rho_1\rho_+(v_{+2}-v_{12}(\rho_1))}{\rho_1-\rho_+}.\end{aligned} \tag{51}$$

其中，我们定义函数

$$\begin{aligned}v_{12}(\rho_1):=\frac{1}{\rho_1(\rho_--\rho_+)}\Big(&-\rho_-v_{-2}(\rho_+-\rho_1)-\rho_+v_{+2}(\rho_1-\rho_-)\\&+\sqrt{\left[(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))-\rho_+\rho_-(v_{-2}-v_{+2})^2\right](\rho_1-\rho_-)(\rho_+-\rho_1)}\Big),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\delta_1(\rho_1):=-\frac{p(\rho_1)-p(\rho_-)}{\rho_1(\rho_--\rho_+)}+\frac{\rho_-(\rho_1-\rho_-)}{\rho_1^2(\rho_--\rho_+)^2}\Big(&\rho_+(v_{-2}-v_{+2})\\&+\sqrt{\left[(\rho_--\rho_+)(p(\rho_-)-p(\rho_+))-\rho_+\rho_-(v_{-2}-v_{+2})^2\right]\frac{\rho_+-\rho_1}{\rho_1-\rho_-}}\Big).\end{aligned}$$

函数 $v_{12}(\rho_1),\delta_1(\rho_1)$ 在 $\rho_-<\rho_1<\rho_+$ 条件下及满足(9)的初值时可以定义。

注3.1. 此引理证明与压强项p无关。因此，在最大密度约束条件下，其结果依然能够成立，证明过程与[9]中一样。值得注意的是引理2.3和(9)~(10)确保了 $v_{12}(\rho_1),\delta_1(\rho_1)$ 定义中平方根下的项是非负的。

上述命题说明不需要考虑中间界面的Rankine-Hugoniot条件和可容许条件，但在含接触间断的情况下，为了定义一个下解，我们还需要保证中间界面的速度满足

$$v_-<v_{12}<v_+.$$

由附录命题2中Rankine-Hugoniot条件和可容许条件计算可得：

$$v_- = \frac{\rho_- v_{-2} - \rho_+ v_{+2}}{\rho_- - \rho_+} + \frac{1}{\rho_- - \rho_+}\sqrt{\left[(\rho_- - \rho_+)\left(p(\rho_-) - p(\rho_+)\right) - \rho_+\rho_-\left(v_{-2} - v_{+2}\right)^2\right]\frac{\rho_+ - \rho_1}{\rho_1 - \rho_-}}, \tag{52}$$

$$v_+ = \frac{\rho_- v_{-2} - \rho_+ v_{+2}}{\rho_- - \rho_+} - \frac{1}{\rho_- - \rho_+}\sqrt{\left[(\rho_- - \rho_+)\left(p(\rho_-) - p(\rho_+)\right) - \rho_+\rho_-\left(v_{-2} - v_{+2}\right)^2\right]\frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_+ - \rho_1}}. \tag{53}$$

由上述两式：

$$\begin{aligned} v_{12} - v_- &= \frac{\rho_-\rho_+}{\rho_1(\rho_+ - \rho_-)}(v_{-2} - v_{+2}) + \frac{\rho_-}{\rho_1(\rho_1 - \rho_-)(\rho_+ - \rho_-)} \\ &\quad \times\sqrt{\left[(\rho_- - \rho_+)\left(p(\rho_-) - p(\rho_+)\right) - \rho_+\rho_-\left(v_{-2} - v_{+2}\right)^2\right](\rho_+ - \rho_1)(\rho_1 - \rho_-)}, \\ v_+ - v_{12} &= -\frac{\rho_-\rho_+}{\rho_1(\rho_+ - \rho_-)}(v_{-2} - v_{+2}) + \frac{\rho_-}{\rho_1(\rho_+ - \rho_1)(\rho_+ - \rho_-)} \\ &\quad \times\sqrt{\left[(\rho_- - \rho_+)\left(p(\rho_-) - p(\rho_+)\right) - \rho_+\rho_-\left(v_{-2} - v_{+2}\right)^2\right](\rho_+ - \rho_1)(\rho_1 - \rho_-)}. \end{aligned}$$

则要使 $v_- < v_{12}$，有

$$\sqrt{\left[(\rho_- - \rho_+)\left(p(\rho_-) - p(\rho_+)\right) - \rho_+\rho_-\left(v_{-2} - v_{+2}\right)^2\right](\rho_+ - \rho_1)(\rho_1 - \rho_-)} > -\rho_+(\rho_1 - \rho_-)(v_{-2} - v_{+2}).$$

类似地，对于 $v_{12} < v_+$，有

$$\sqrt{\left[(\rho_- - \rho_+)\left(p(\rho_-) - p(\rho_+)\right) - \rho_+\rho_-\left(v_{-2} - v_{+2}\right)^2\right](\rho_+ - \rho_1)(\rho_1 - \rho_-)} > \rho_+(\rho_+ - \rho_1)(v_{-2} - v_{+2}).$$

由于这两个条件很难同时满足，为此，类似于[9]，我们考虑引入一个辅助状态，来得到满足 $v_- < v_{12} < v_+$ 的下解。

定义3.1. (见文献[9])考虑三维相空间 $\mathscr{S} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$。记中心为 $\tilde{U}_M = (\tilde{\rho}_M, \tilde{v}_M) \in \mathscr{S}$，半径为 $r > 0$ 的二维球：

$$B_r(\tilde{U}_M) := \left\{(\rho, v) \in \mathscr{S} \mid v_1 = \tilde{v}_{M1}, \left\|(\rho, v) - (\tilde{\rho}_M, \tilde{v}_M)\right\| < r\right\}.$$

以下暂时不考虑给定的初始状态 $U_- = (\rho_-, v_-), U_+ = (\rho_+, v_+)$。

引理3.1. 若 $\tilde{U}_- = (\tilde{\rho}_-, \tilde{v}_-) \in \mathscr{S}$ 是任意给定的状态，且状态 $\tilde{U}_M = (\tilde{\rho}_M, \tilde{v}_M) \in \mathscr{S}$ 与 $\tilde{U}_-$ 由1-激波连接，则存在正常数 $\rho < \rho_*$，使得当 $\tilde{\rho}_M > \rho$ 时，对一个半径 $r > 0$ 有下列性质成立：如果状态 $\tilde{U}_+ = (\tilde{\rho}_+, \tilde{v}_+) \in \mathscr{S}$ 满足

1) $\tilde{\rho}_+ > \tilde{\rho}_M$，

2) $\tilde{U}_+ \in B_r(\tilde{U}_M)$，

3) 当 $\tilde{U}_-, \tilde{U}_+$ 作为初始状态时，黎曼问题(1) (3)的标准解由1-激波、可能有的2-接触间断和3-稀疏波组成，

那么以 $\tilde{U}_-, \tilde{U}_+$ 为初始状态的黎曼问题(1) (3)存在一个可容许扇形下解。

证明. 与[9]不同的是，在含接触间断时要定义一个下解还需证明上述附加条件 $v_- < v_{12} < v_+$。主要考虑找到能满足此附加条件的 $\rho_1, \tilde{\rho}_+$ 等。

在本定理条件下，此附加条件可等价于

$$\sqrt{\left[(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_+)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_+)\right) - \tilde{\rho}_+\tilde{\rho}_-\left(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2}\right)^2\right](\tilde{\rho}_+ - \rho_1)(\rho_1 - \tilde{\rho}_-)} > -\tilde{\rho}_+(\rho_1 - \tilde{\rho}_-)(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2}), \tag{54}$$

以及

$$\sqrt{\left[(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_+)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_+)\right) - \tilde{\rho}_+\tilde{\rho}_-(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2})^2\right](\tilde{\rho}_+ - \rho_1)(\rho_1 - \tilde{\rho}_-)} > \tilde{\rho}_+(\tilde{\rho}_+ - \rho_1)(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2}). \tag{55}$$

由于 $\tilde{\rho}_M$ 与 $\tilde{\rho}_-$ 由1-激波连接，则

$$\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{M2} = \sqrt{\frac{(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_M)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_M)\right)}{\tilde{\rho}_-\tilde{\rho}_M}} > 0.$$

又注意到 $\tilde{\rho}_- < \rho_1 < \tilde{\rho}_+$，则当 $\tilde{\rho}_M \to \rho_*$ 时，对有界的 $\tilde{v}_{+2} - \tilde{v}_{M2}$，(54)能够满足。

(55)的一个充分条件是

$$\frac{(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_+)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_+)\right)}{\tilde{\rho}_+\tilde{\rho}_-} > \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_+}{\tilde{\rho}_-}\frac{\tilde{\rho}_+ - \tilde{\rho}_1}{\rho_1 - \tilde{\rho}_-}\right)(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2})^2.$$

方便起见，记

$$x = \rho_* - \tilde{\rho}_M, y = \rho_* - \rho_1, z = \rho_* - \tilde{\rho}_-, w = \rho_* - \tilde{\rho}_+. \tag{56}$$

则考虑 $\tilde{\rho}_M \to \rho_*$ 的极限时，$x, w, y \to 0$，此时

$$\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{M2} = \sqrt{\frac{(z-x)(\rho_*\tilde{\rho}_M)^\gamma\left(1 - \left(\frac{\tilde{\rho}_- x}{\tilde{\rho}_M z}\right)^\gamma\right)}{\tilde{\rho}_M\tilde{\rho}_-}x^{-\frac{\gamma}{2}}} \sim \sqrt{\frac{z\rho_*^{2\gamma}}{\rho_*\tilde{\rho}_-}x^{-\frac{\gamma}{2}}},$$

其中，$a \sim b$ 表示 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{b}{a} = 1$。

同样可得

$$\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2} = \tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{M2} + \tilde{v}_{M2} - \tilde{v}_{+2} = \sqrt{\frac{(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_M)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_M)\right)}{\tilde{\rho}_-\tilde{\rho}_M}} + \tilde{v}_{M2} - \tilde{v}_{+2},$$

其中

$$\sqrt{\frac{(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_M)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_M)\right)}{\tilde{\rho}_-\tilde{\rho}_M}} \sim \sqrt{\frac{z\rho_*^{2\gamma}}{\rho_*\tilde{\rho}_-}x^{-\frac{\gamma}{2}}}.$$

$$\frac{(\tilde{\rho}_- - \tilde{\rho}_+)\left(p(\tilde{\rho}_-) - p(\tilde{\rho}_+)\right)}{\tilde{\rho}_+\tilde{\rho}_-} \sim \frac{z\rho_*^{2\gamma}}{\rho_*\tilde{\rho}_-}w^{-\gamma},$$

$$\left(1 + \frac{\tilde{\rho}_+}{\tilde{\rho}_-}\frac{\tilde{\rho}_+ - \tilde{\rho}_1}{\rho_1 - \tilde{\rho}_-}\right)(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2})^2 = \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_+}{\tilde{\rho}_-}\frac{y - w}{z - y}\right)(\tilde{v}_{-2} - \tilde{v}_{+2})^2.$$

由 $\tilde{\rho}_+ > \tilde{\rho}_M$，有 $x > w$。那么当 $\tilde{\rho}_M \to \rho_*$，即 $x \to 0$ 时，$w \to 0$，且由[17]中定理1.2的证明可知 $y \to 0$，则

$$\frac{\tilde{\rho}_+}{\tilde{\rho}_-}\frac{y - w}{z - y} \to 0,$$

从而(55)式成立。

因此，在 $\tilde{\rho}_M \to \rho_*$ 时，可以满足附加条件成立的充分条件，即能够定义一个扇形下解，从而由连续性得到结论。

类似[9]，构造黎曼问题~和∧，其中对黎曼问题应用引理3.1，则可以得到定理1.1结论在标准自相似

解包含一个接近最大密度的激波时成立。

对于初值(9)，存在一个状态U_M，其与状态U_-可通过接近最大密度的1-激波连接。在状态U_-和U_M由1-激波连接的情况下，我们可以应用引理3.1来得到具有以下性质的状态U_2：$\rho_M < \rho_2 < \rho_+$且$U_2 \in B_r(U_M)$，其中ρ_M, ρ_2, ρ_+分别是U_M, U_2, U_+的密度。因此，问题(1) (3)的解可由两个黎曼问题的解结合得到，其中两个黎曼问题为：左状态U_-右状态U_M的问题~及左状态U_2和右状态U_+的问题∧。问题~存在一个扇形下解，则有无穷多解，而问题∧的标准解仅包含3-稀疏波。

对于初值(10)，同样将引理3.1应用于由接近最大密度的1-激波连接的状态U_M和U_-，我们可以得到具有以下性质的状态U_2：$\rho_+ < \rho_2$且$U_2 \in B_r(U_M)$。因此，问题(1) (3)的解可由两个黎曼问题的解结合得到，其中两个黎曼问题为：左状态U_-右状态U_2的问题~及左状态U_2和右状态U_+的问题∧。类似于前一种初值的情况，问题~存在一个扇形下解，则有无穷多解存在。问题∧的标准解仅包含3-稀疏波。

3.2. 证明方法二

下面我们给出第二个证明以移除1-激波右状态密度接近最大密度的限制。

为了证明定理1.1，首先推广文献[10]中定理1。

引理3.2. 令$p(\rho) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_*}\right)^{\gamma}}$，$\gamma > 1$。若给定$\rho_+, \rho_- > 0, \rho_+ \neq \rho_-$，$v_{+2} \in \mathbb{R}$，则存在

$$V = V(\rho_-, \rho_+, v_{+2}, \gamma) < \sqrt{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+ \rho_-}},$$

使得对所有v_{-2}满足

$$V < v_{-2} - v_{+2} \leq \sqrt{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+ \rho_-}},$$

黎曼问题(1) (3)存在无穷多可容许弱解。

其与[10]中的证明相同，但其证明过程对理解扇形下解的构造十分重要，在此进行简要引述。

选取参数ρ_1，并用参数ρ_1以及初值来表示函数$v_\pm, \beta, \varepsilon(\rho_1)$。方便起见，定义下列函数：

$$\begin{aligned}
&E = \rho_- - \rho_+, \\
&J = \rho_- v_- - \rho_+ v_+, \\
&T = \rho_- v_{-2}^2 - \rho_+ v_{+2}^2 + p(\rho_-) - p(\rho_+), \\
&u = v_{+2} - v_{-2}, \\
&Q = J^2 - ET = \rho_- \rho_+ u^2 - (\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-)).
\end{aligned}$$

由此文考虑的初值(9) (10)，得到$Q \leq 0$。对于E需要考虑两种情况$E = 0$和$E \neq 0$。此节主要考虑$\rho_- < \rho_+ (E < 0)$的情况，其他情况类似可证。

结合(52) (53)的v_-, v_+值，并由附录中的(82)式求出β后将其代入Rankine-Hugoniot条件和可容许条件可计算得到：

$$\delta_1(\rho_1) = \frac{p(\rho_+) - p(\rho_1)}{\rho_1} - \frac{\rho_+}{\rho_1}\left(\frac{\sqrt{-Q}}{-E}\sqrt{1 - \frac{\rho_-}{\rho_1}} - \frac{\rho_- u}{E}\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_1} - 1}\right)^2. \tag{57}$$

类似文献[10]，有下列重要引理：

引理3.3. (见[10])存在唯一的 $\bar{\rho}$ 使得

$$\delta_1 > 0, \qquad \rho_1 \in (\rho_-, \bar{\rho}),$$
$$\delta_1 < 0, \qquad \rho_1 \in (\bar{\rho}, \rho_+).$$

此外，当 $u \to -\sqrt{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+ \rho_1}}$ 时，有 $\bar{\rho} \to \rho_+$。

其中 $\bar{\rho}$ 是 $\delta_1(\rho_1)$ 在区间 $(\tilde{\rho}, \rho_+)$ 上的唯一零点。

证明. 由于其证明与[10]中一致，在此简要说明。

分别将 $\rho_1 = \rho_-, \rho_1 = \rho_-$ 代入 $\delta_1(\rho_1)$，由初值可得 $\delta_1(\rho_-) > 0$，$\delta_1(\rho_+) < 0$。

记 $\tilde{\rho}$ 为 $\delta_1(\rho_1)$ 中的下列式子的零点：

$$\frac{\sqrt{-Q}}{-E}\sqrt{1 - \frac{\rho_-}{\rho_1}} - \frac{\rho_- u}{E}\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_1} - 1},$$

则显然有 $\delta_1(\tilde{\rho}) > 0$。

易见，$\delta_1(\rho_1)$ 在 $(\tilde{\rho}, \rho_+)$ 上单调递减，则 δ_1 在 $(\tilde{\rho}, \rho_+)$ 上存在唯一零点 $\bar{\rho}$。

记

$$D = \frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+ \rho_1}.$$

当 $u \to -\sqrt{D}$ 时，可以得到 $Q \to 0$ 以及 $\delta_1(\rho_+) \to 0$。并且，由于 $\tilde{\rho} < \bar{\rho} < \rho_+$，若 $\tilde{\rho} \to \rho_+$，有 $\bar{\rho} \to \rho_+$。因此证得第二个结论。

又计算 $\tilde{\delta}_1(\rho_1) = \rho_1 \delta_1(\rho_1)$ 的二阶导数可得其在区间 $(\rho_-, \tilde{\rho})$ 上是凹函数。因此，$\tilde{\delta}_1(\rho_1)$ 在上没有零点，即 $\delta_1(\rho_1)$ 在 $(\rho_-, \tilde{\rho})$ 上没有零点。

如此证明引理的第一个结论。

由(57)我们得到

$$\bar{\delta}_1 = \lim_{u \to -\sqrt{D}} \delta_1 = \frac{p(\rho_+) - p(\rho_1)}{\rho_1} - \frac{\rho_+ \rho_-^2 (\rho_+ - \rho_1) D}{\rho_1^2 E^2}.$$

应用引理3.3就有 $\bar{\delta}_1(\rho_-) = \bar{\delta}_1(\rho_+) = 0$ 以及对所有 $\rho_1 \in (\rho_-, \rho_+)$ 有 $\bar{\delta}_1 > 0$。

下面验证附录中命题的可容许条件(86) (87)，其中依旧考虑 $u \to -\sqrt{D}$。将其代入前文(52) (53)中的 v_-, v_+ 值，可以得到 $v_- < v_+$ 并且当 $u \to -\sqrt{D}$ 时 v_- 和 v_+ 的极限相同。

若记 $\bar{\beta} = \lim_{u \to -\sqrt{D}} \beta$，则下面由附录命题中Rankine-Hugoniot条件(82)可以得到

$$\bar{\beta} = v_{+2} + \frac{\rho_-(\rho_1 - \rho_+)\sqrt{D}}{E\rho_1}.$$

下面考虑 $\beta - v_{-2}$ 和 $v_{+2} - \beta$ 的符号。由于 $\rho_- < \rho_+$，则上式可被重写为

$$v_{+2} - \bar{\beta} = -\frac{\rho_-(\rho_1 - \rho_+)\sqrt{D}}{E\rho_1},$$
$$\bar{\beta} - v_{+2} = -\frac{\rho_+(\rho_1 - \rho_-)\sqrt{D}}{E\rho_1}.$$

因此，对于$u \to -\sqrt{D}$，当ε充分小时，有$\beta - v_{-2} < 0$在区间$(\rho_- + \varepsilon, \rho_+)$上成立以及$v_{+2} - \beta < 0$在$(\rho_-, \rho_+ - \varepsilon)$上成立。那么基于附录命题中Rankine-Hugoniot条件(80) (82)可得至少在$\sqrt{\dfrac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+\rho_-}}$的一个小邻域上要保证$v_- < \beta < v_+$。

考虑(86) (87)可得

$$\delta_2 \le \frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1\rho_-}\left(p(\rho_-) + p(\rho_1) - 2\rho_-\rho_1\frac{\varepsilon(\rho_-) - \varepsilon(\rho_1)}{\rho_- - \rho_1}\right) - \delta_1\rho_1\frac{\beta + v_{-2}}{\beta - v_{-2}}\frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1\rho_-} - \delta_1 := M_1,$$

$$\delta_2 \ge -\frac{\rho_+ - \rho_1}{\rho_+\rho_1}\left(p(\rho_-) + p(\rho_1) - 2\rho_-\rho_1\frac{\varepsilon(\rho_-) - \varepsilon(\rho_1)}{\rho_- - \rho_1}\right) - \delta_1\rho_1\frac{v_{+2} + \beta}{v_{+2} - \beta}\frac{\rho_+ - \rho_1}{\rho_+\rho_1} - \delta_1 := M_2.$$

为了满足下解条件中的$\delta_2 > 0$，需要满足下列引理。

引理3.4. [10]若$\bar{M}_i = \lim\limits_{u \to -\sqrt{D}} M_i, i = 1, 2$，则对所有$\rho_1 \in (\rho_-, \rho_+)$有

$$\bar{M}_1 > \bar{M}_2.$$

此外，存在$s \in (\rho_-, \rho_+)$使得$\bar{M}_1$在$\rho_1 = s$处取值为正。

证明. 取$u \to -\sqrt{D}$，其中$\lim\limits_{u \to -\sqrt{D}} \delta_1 := \bar{\delta}_1$已经给定。代入上面两不等式可以得到

$$\delta_2 \le \frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1\rho_-}\left(p(\rho_-) + p(\rho_1) - 2\rho_-\rho_1\frac{\varepsilon(\rho_-) - \varepsilon(\rho_1)}{\rho_- - \rho_1}\right) - \frac{\bar{\delta}_1\rho_1}{\rho_-\rho_+}\left(2\rho_- - \rho_+ + \frac{2Ev_{+2}}{\sqrt{D}}\right) = \bar{M}_1,$$

$$\delta_2 \ge -\frac{\rho_+ - \rho_1}{\rho_+\rho_1}\left(p(\rho_1) + p(\rho_+) - 2\rho_1\rho_+\frac{\varepsilon(\rho_1) - \varepsilon(\rho_+)}{\rho_- - \rho_1}\right) - \frac{\bar{\delta}_1\rho_1}{\rho_-\rho_+}\left(\rho_- + \frac{2Ev_{+2}}{\sqrt{D}}\right) = \bar{M}_2.$$

将上述两式作差，容易发现$\bar{M}_1 > \bar{M}_2$。

最后，因为

$$\bar{M}_1(\rho_+) = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+\rho_-}\left(p(\rho_1) + p(\rho_+) - 2\rho_1\rho_+\frac{\varepsilon(\rho_1) - \varepsilon(\rho_+)}{\rho_- - \rho_1}\right) > 0,$$

我们总能找到$s < \rho_+$使得

$$\bar{M}_1 > \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+\rho_-}\left(p(\rho_1) + p(\rho_+) - 2\rho_1\rho_+\frac{\varepsilon(\rho_1) - \varepsilon(\rho_+)}{\rho_- - \rho_1}\right).$$

采用类似[9]中的方法构造初始状态，形成两个新的黎曼问题，将两个黎曼问题的解结合起来，以此证明在初值在包含接触间断的情况下也有无穷多可容许弱解。

对于此文考虑的初值(9) (10)，构造一个辅助状态$U_M = (\rho_M, v_M)$产生两个新的黎曼问题~，∧：

$$\text{问题} \sim \begin{cases} \tilde{U}_- = U_-, \\ \tilde{U}_+ = U_M, \end{cases}$$

以及

$$\text{问题} \wedge \begin{cases} \hat{U}_- = U_M, \\ \hat{U}_+ = U_+, \end{cases}$$

其中问题~中的状态(ρ_-, v_-)和(ρ_M, v_M)满足引理3.2中的假设。因此，黎曼问题~存在无穷多可容许

下解。对于原初值为(9)的情况，问题∧由一个激波构成。对于原初值为(10)的情况，问题∧由一个稀疏波构成。

将黎曼问题~和∧的解结合起来，得到了可容许弱解的不唯一性。定理1.1得证。

因此，将无穷多可容许弱解不唯一的结论推广到了具有压强(4)的欧拉系统(1) (3)自相似解包含接触间断的情况。

并且由于状态(ρ_-, v_-)和(ρ_M, v_M)满足引理3.2中的假设，则有$\rho_- < \rho_M < \rho_+$。因此，只需要初值中压强项有界，解的各中间状态对应压强项也有界。

4. 总结

对比这两种证明方法：证明方法一较简便，但其只适用于标准解包含一个接近最大密度的激波的特殊情况；证明方法二可以移除证明方法一中关于接近最大密度的限制，因此其更适用于一般情况。

综合两种证明，我们可以得出结论：在最大密度限制下，对于黎曼初值(9) (10)包含接触间断的情况，欧拉系统存在无穷多可容许弱解。

参考文献

[1] Dafermos, C.M. (2005) Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physic. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Book No. 325, Division of Applied Mathematics, Berlin.

[2] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Rhode Island, 610-644.

[3] Elling, V. (2006) A Possible Counterexample to Well Posedness of Entropy Solutions and to Godunov Scheme Convergence. *Mathematics of Computation*, **75**, 1721-1733. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01863-1

[4] De Lellis, C. and Székelyhidi, L. (2010) On Admissibility Criteria for Weak Solutions of the Euler Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **195**, 225-260. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0201-x

[5] De Lellis, C. and Székelyhidi Jr., L. (2009) The Euler Equations as a Differential Inclusion. *Annals of Mathematics*, **170**, 1417-1436. https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.1417

[6] Chiodaroli, E., De Lellis, C. and Kreml, O. (2015) Global Ill-Posedness of the Isentropic System of Gas Dynamics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **68**, 1157-1190. https://doi.org/10.1002/cpa.21537

[7] Chiodaroli, E., Kreml, O., Mácha, V. and Schwarzacher, S. (2021) Non-Uniqueness of Admissible Weak Solutions to the Compressible Euler Equations with Smooth Initial Data. *Transactions of the American Mathematical Society*, **374**, 2269-2295. https://doi.org/10.1090/tran/8129

[8] Chiodaroli, E. and Kreml, O. (2014) On the Energy Dissipation Rate of Solutions to the Compressible Isentropic Euler System. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **214**, 1019-1049. https://doi.org/10.1007/s00205-014-0771-8

[9] Markfelder, S. and Klingenberg, C. (2018) The Riemann Problem for the Multi-Dimensional Isentropic System of Gas Dynamics Is Ill-Posed If It Contains a Shock. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **227**, 967-994. https://doi.org/10.1007/s00205-017-1179-z

[10] Chiodaroli, E. and Kreml, O. (2018) Non-Uniqueness of Admissible Weak Solutions to the Riemann Problem for Isentropic Euler Equations. *Nonlinearity*, **31**, 1441-1460. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aaa10d

[11] Brezina, J., Chiodaroli, E. and Kreml, O. (2018) Contact Discontinuities in Multi-Dimensional Isentropic Euler Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**, 1-11.

[12] Berthelin, F., Degond, P., Le Blanc, V., Moutari, S., Rascle, M. and Royer, J. (2008) A traffic-flow model with constraints for the modeling of traffic jams. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **18**, 1269-1298. https://doi.org/10.1142/S0218202508003030

[13] Degond, P., Hua, J. and Navoret, L. (2011) Numerical Simulations of the Euler System with Congestion Constraint. *Journal of Computational Physics*, **230**, 8057-8088. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.07.010

[14] Degond, P., Navoret, L., Bon, R. and Sanchez, D. (2010) Congestion in a Macroscopic Model of Self-Driven Particles Modeling Gregariousness. *Journal of Statistical Physics*, **138**, 85-125. https://doi.org/10.1007/s10955-009-9879-x

[15] Berthelin, F., Degond, P., Delitala, M. and Rascle, M. (2008) A Model for the Formation and Evolution of Traffic Jams. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **187**, 185-220. https://doi.org/10.1007/s00205-007-0061-9

[16] 华嘉乐，杨凯迪. 最大密度限制下的欧拉方程解的非唯一性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 1956-1972.

https://doi.org/10.12677/AAM.2021.106206

[17] Hua, J. and Xia, L. (n.d.) The Non-Uniqueness of Admissible Weak Solutions to 2D Riemann Problem of Compressible Isentropic Euler System with Maximum Density Constraint. Submitted.

附录

在此节中，考虑划分四个扇形分区 P_-,P_1,P_2,P_+，将扇形下解的定义化简为如下方程组和不等式组：

命题1. (见[11]) 给定 $\rho_-,\rho_+\in\mathbb{R},v_-,v_+\in\mathbb{R}^2$ (见初值(3))。常数 $C_1,C_2\in\mathbb{R}^+$，$\nu_-,\nu_1,\nu_+\in\mathbb{R}$，$\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}^+$，

$$v_i=\begin{pmatrix}v_{i1}\\ v_{i2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\qquad u_i=\begin{pmatrix}u_{i11} & u_{i12}\\ u_{i12} & -u_{i11}\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_0^{2\times 2},$$

定义了柯西问题(1) (3)的一个可容许扇形下解，当且仅当下列代数方程组和不等式组成立：

1) 左界面Rankine-Hugoniot条件

$$\nu_-(\rho_--\rho_1)=\rho_-v_{-2}-\rho_1v_{12},\tag{58}$$

$$\nu_-(\rho_-v_{-1}-\rho_1v_{11})=\rho_-v_{-1}v_{-2}-\rho_1u_{112},\tag{59}$$

$$\nu_-(\rho_-v_{-2}-\rho_1v_{12})=\rho_-v_{-2}^2+\rho_1u_{111}+p(\rho_-)-p(\rho_1)-\rho_1\frac{C_1}{2};\tag{60}$$

2) 中间界面Rankine-Hugoniot条件

$$\nu_1(\rho_1-\rho_2)=\rho_1v_{12}-\rho_2v_{22},\tag{61}$$

$$\nu_1(\rho_1v_{11}-\rho_2v_{21})=\rho_1u_{112}-\rho_2u_{212},\tag{62}$$

$$\nu_1(\rho_1v_{12}-\rho_2v_{22})=-\rho_1u_{111}+\rho_2u_{211}+p(\rho_1)-p(\rho_2)+\rho_1\frac{C_1}{2}-\rho_2\frac{C_2}{2};\tag{63}$$

3) 右界面Rankine-Hugoniot条件

$$\nu_+(\rho_2-\rho_+)=\rho_2v_{22}-\rho_+v_{+2},\tag{64}$$

$$\nu_+(\rho_2v_{21}-\rho_+v_{+1})=\rho_2u_{212}-\rho_+v_{+1}v_{+2},\tag{65}$$

$$\nu_+(\rho_2v_{22}-\rho_+v_{+2})=-\rho_2u_{211}-\rho_+v_{+2}^2+p(\rho_2)-p(\rho_+)+\rho_2\frac{C_2}{2};\tag{66}$$

4) 下解条件

$$v_{11}^2+v_{12}^2<C_1,\tag{67}$$

$$v_{21}^2+v_{22}^2<C_1,\tag{68}$$

$$\left(\frac{C_1}{2}-v_{11}^2+u_{111}\right)\left(\frac{C_1}{2}-v_{12}^2-u_{111}\right)-(u_{112}-v_{11}v_{12})^2>0,\tag{69}$$

$$\left(\frac{C_2}{2}-v_{21}^2+u_{211}\right)\left(\frac{C_2}{2}-v_{22}^2-u_{211}\right)-(u_{212}-v_{21}v_{22})^2>0;\tag{70}$$

5) 左界面可容许条件

$$\begin{aligned}&\nu_-(\rho_-\varepsilon(\rho_-)-\rho_1\varepsilon(\rho_1))+\nu_-\left(\rho_-\frac{|v_-|^2}{2}-\rho_1\frac{C_1}{2}\right)\\ &\le(\rho_-\varepsilon(\rho_-)+p(\rho_-))v_{-2}-(\rho_1\varepsilon(\rho_1)+p(\rho_1))v_{12}+\rho_-v_{-2}\frac{|v_-|^2}{2}-\rho_1v_{12}\frac{C_1}{2};\end{aligned}\tag{71}$$

6) 中间界面可容许条件

$$\begin{aligned}&v_1\left(\rho_-\varepsilon(\rho_-)-\rho_1\varepsilon(\rho_1)\right)+v_1\left(\rho_1\frac{C_1}{2}-\rho_1\frac{C_2}{2}\right)\\&\le\left(\rho_1\varepsilon(\rho_1)+p(\rho_1)\right)v_{12}-\left(\rho_2\varepsilon(\rho_2)+p(\rho_2)\right)v_{22}+\rho_1v_{22}\frac{C_2}{2}-\rho_2v_{22}\frac{C_2}{2};\end{aligned}\tag{72}$$

7) 右界面可容许条件

$$\begin{aligned}&v_+\left(\rho_2\varepsilon(\rho_2)-\rho_+\varepsilon(\rho_+)\right)+v_+\left(\rho_2\frac{C_2}{2}-\rho_+\frac{|v_+|^2}{2}\right)\\&\le\left(\rho_2\varepsilon(\rho_2)+p(\rho_2)\right)v_{22}-\left(\rho_+\varepsilon(\rho_+)+p(\rho_+)\right)v_{+2}+\rho_2v_{22}\frac{C_2}{2}-\rho_+v_{+2}\frac{|v_+|^2}{2}.\end{aligned}\tag{73}$$

类似[8]假设：

$$v_{11}=v_{-1},\quad v_{21}=v_{+1},\quad \rho_1=\rho_2,\quad v_{12}=v_{22}=:\beta.$$

由(61) (63)，我们可以得到

$$u_{111}-\frac{C_1}{2}=u_{211}-\frac{C_2}{2}.\tag{74}$$

此外，结合(58) (59)，有 $u_{112}=v_{11}\beta$。类似地结合(64) (65)可得 $u_{212}=v_{21}\beta$。将这两个式子代入(62)则有 $v_1=\beta$。最后，可以看到中间界面的可容许条件自然成立。

因此，根据上述假设以及(74)我们可以将其下解条件简化为[11]：

$$v_{-1}^2+\beta^2<C_1,\tag{75}$$

$$v_{+1}^2+\beta^2<C_2,\tag{76}$$

$$\left(\frac{C_1}{2}-v_{-1}^2+u_{111}\right)\left(\frac{C_1}{2}-\beta^2-u_{111}\right)>0,\tag{77}$$

$$\left(\frac{C_2}{2}-v_{+1}^2+u_{211}\right)\left(\frac{C_1}{2}-\beta^2-u_{111}\right)>0.\tag{78}$$

则下解条件(75)~ (78)成立当且仅当

$$\frac{C_1}{2}-u_{111}>\beta^2.$$

若记

$$\begin{aligned}\delta_1&=\frac{C_1}{2}-u_{111}-\beta^2,\\\delta_2&=\frac{C_1}{2}+u_{111}-v_{-1}^2=C_1-v_{-1}^2-\beta^2-\delta_1,\\\delta_2'&=\frac{C_2}{2}-u_{211}-v_{+1}^2=C_2-v_{+1}^2-\beta^2-\delta_1,\end{aligned}$$

则下解条件(75)~ (78)等价于 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 以及 $\delta_2'>0$。

不妨设 $\delta_2=\delta_2'$，即

$$C_1-v_{-1}^2=C_2-v_{+1}^2.\tag{79}$$

因此，代入新变量 δ_1,δ_2 及利用(74) (79)，我们可以将引命题1中的方程组和不等式继续化简为：

命题2. ([11])

1) 左界面Rankine-Hugoniot条件：

$$v_-(\rho_- - \rho_1) = \rho_- v_{-2} - \rho_1\beta, \tag{80}$$

$$v_-(\rho_- v_{-2} - \rho_1\beta) = \rho_- v_{-2}^2 - \rho_1(\beta^2 + \delta_1) + p(\rho_-) - p(\rho_1); \tag{81}$$

2) 右界面Rankine-Hugoniot条件：

$$v_+(\rho_1 - \rho_+) = \rho_1\beta - \rho_+ v_{+2}, \tag{82}$$

$$v_+(\rho_1\beta - \rho_+ v_{+2}) = \rho_1(\beta^2 + \delta_1) - \rho_+ v_{+2}^2 + p(\rho_1) - p(\rho_+); \tag{83}$$

3) 下解条件：

$$\delta_1 > 0, \tag{84}$$

$$\delta_2 > 0; \tag{85}$$

4) 左界面可容许条件：

$$(\beta - v_{-2})\left(p(\rho_-) + p(\rho_1) - 2\rho_-\rho_1\frac{\varepsilon(\rho_-) - \varepsilon(\rho_1)}{\rho_- - \rho_1}\right) \le \delta_1\rho_1(\beta + v_{-2}) - (\delta_1 + \delta_2)\frac{\rho_-\rho_1(\beta - v_{-2})}{\rho_- - \rho_1}; \tag{86}$$

5) 右界面可容许条件：

$$(v_{+2} - \beta)\left(p(\rho_1) + p(\rho_+) - 2\rho_1\rho_+\frac{\varepsilon(\rho_1) - \varepsilon(\rho_+)}{\rho_1 - \rho_+}\right) \le -\delta_1\rho_1(v_{+2} + \beta) + (\delta_1 + \delta_2)\frac{\rho_1\rho_+(v_{+2} - \beta)}{\rho_1 - \rho_+}. \tag{87}$$