Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(3), 1170-1177**
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113126

超立方体幂图中常重点集导出子图的一类独立集

师娟娟，杨卫华*

太原理工大学，数学学院，山西 晋中

收稿日期：2022年2月21日；录用日期：2022年3月15日；发布日期：2022年3月22日

摘　要

编码理论中的一个基本问题是求 $A(n,d,w)$ 的值，即长度为n，重量为w，最小Hamming距离为d的二元码集的大小。它可看作是n维超立方体 $d-1$ 次幂图中所有重量为w的点导出子图 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的最大独立集。本文运用构造图 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的最大独立集的方法得到n、d和w为某些特殊值时，$A(n,d,w)=4$。

关键词

超立方体，最大独立集，常重码

A Class of Independent Sets of Subgraphs Derived from Constant Focus Sets in Hypercube Power Graphs

Juanjuan Shi, Weihua Yang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Feb. 21st, 2022; accepted: Mar. 15th, 2022; published: Mar. 22nd, 2022

Abstract

A basic problem in coding theory is to find the value of $A(n,d,w)$, that is, the size of the maximum binary code with length n, constant weight w and minimum Hamming distance d. It can also be re-

*通讯作者。

文章引用：师娟娟，杨卫华．超立方体幂图中常重点集导出子图的一类独立集[J]．应用数学进展，2022，11(3): 1170-1177. DOI: 10.12677/aam.2022.113126

garded as the maximum independent set of induced subgraph of points of weight *w* of the $d-1$ th-power of n-dimensional hypercube $Q_n^{(d-1,w)}$. We use the method of constructing the maximum independent set of $Q_n^{(d-1,w)}$ to obtain $A(n,d,w)=4$ for some special *n*, *d* and *w*.

Keywords

Hypercube, Maximum Independent Set, Constant Weight Code

1. 引言

1.1. 背景介绍

在编码理论中，常重码是一种有检错和纠错能力的重要编码，被广泛的应用于光导纤维中的码分多址系统、雷达和声纳的信号设计、高数据率数字通信等领域。由于其广泛的应用背景，常重码吸引了许多的学者参与研究。数学家们尝试用代数、图论以及组合等方法来研究满足一定条件的最大常重码的个数及其结构，并取得了很大的进展。但迄今为止，最大常重码的个数及其结构还未得到完整的结论。经研究发现编码理论和图论之间存在联系，可通过使用图论的方法研究常重码。

1.2. 相关工作

令 $Z=Z_2\times Z_2\times\cdots\times Z_2=Z_2^n$，则 Z 中的元素称为码字。码字 x 的重量由 $wt(x)$表示，是其非零项的数量。码字的集合称为码集。w 常重码是指其中所有的码字的重量都为 w。令 X 是 Z_2 上 n 维向量空间。X 中的向量称为码字。两个代码词 c 和 c' 之间的 Hamming 距离 $d_H(c,c')$ 被定义为它们具有不同的坐标位置的数量。$A(n,d,w)$ 是长度为 n、重量为 w 和最小 Hamming 距离为 d 的最大二进制代码的大小。在经典编码理论中，寻找 $A(n,d,w)$ 的值是一个非常困难的问题，迄今没有完全解决，在[1]中有描述。

1950 年，Hamming [2]提出了球包界，特别地，$A(n,6,w)$ 的球包界为 $\dfrac{\binom{n}{m}}{w(n-w)+1}$。1962 年，Johnson [3]获得了 $A(n,d,w)$ 的上界，即 $A(n,d,w)\le\dfrac{dn}{dn-2w(n-w)}$。1977 年，MacWilliams 和 Sloane [4]提出了第一个关于 $A(n,d,w)$ 与 $n\le 24$ 和 $d\le 10$ 界限的系统表。直到 2000 年，Vardy 等人[5]改进了 $A(n,d,w)$ 的已知上界，即 $A(n,2\delta,w)\le\dfrac{\binom{n}{w-\delta+1}}{\binom{w}{w-\delta+1}}$，他们还将表扩展到 $n\le 28$ 和 $d\le 14$。1989 年，Cornelis 等人[6]显著提高了 $A(n,4,w)$ 的界。在 1990 年，Brouwer 等[7]通过大量针对某些参数的新显式代码构造，收集了 $n\le 28$ 和 $d\le 18$ 的 $A(n,d,w)$ 的著名下界。

总的来看，不少研究都致力利用半正定规划、Terwilliger 代数等方法对 $A(n,d,w)$ 的上下界进行讨论，

但大多都是对 d 取 6，8，10，12 时 $A(n,d,w)$ 的上下界有了一定的改进[8]-[13]，对于确切的值，迄今为止还没有统一的方法去研究。本文提出从图论的角度去研究，将 $A(n,d,w)$ 看作是 n 维超立方体 d-1 次幂图中所有重量为 w 的点导出子图 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的最大独立集，即 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$。

1.3. 本文贡献

本文对最小 Hamming 距离为 d、重量为 w 的最大 n 长二元常重码集的大小进行研究，利用 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$，得到了如下结果：对于 $n,d,w\in \mathrm{Z}^+$，d 为偶数，如果 $\frac{2n+2}{5}\le d\le\frac{3n-2}{5}$，$\frac{3d-n}{2}\le w\le\frac{5d-n-1}{5}$ 或 $\frac{6n-5d+1}{5}\le w\le\frac{3n-3d}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$；如果 $\frac{2d+1}{3}\le w\le\frac{3d}{4}$，$n-w+1\le d\le\frac{n+2w}{3}$，或 $\frac{11d-8}{12}\le w\le d-1$，$\frac{4n-4w}{3}\le d\le\frac{3n-3w-1}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$；如果 $n=\frac{3d}{2}+1$，$d=\frac{4w-2}{3}$，则 $A(n,d,w)=4$。

2. 预备知识

本节给出本文需要的基本概念和符号。

令 G 是一个顶点集为 $V(G)$ 且边集为 $E(G)$ 的图。设 $S\subseteq V(G)$，如果在图 G 中 S 的顶点是两两独立的，则 S 称为图 G 的独立集，G 的独立数 $\alpha(G)$ 是最大独立集的顶点数，如果图 S 的顶点在 G 中两两相邻，S 称为图 G 的团，团数 $\omega(G)$ 等于最大团的顶点数，即 $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$。

定义 2.1：图 Q_n^d 表示 n 维超立方体 Q_n 的 d^{th} 次幂图，其顶点集 $V\left(Q_n^d\right)=\left\{x\mid x\in Z_2^n\right\}$。也就是说对于任意的 $x,y\in V\left(Q_n^d\right)$，有边 $x\sim y$ 当且仅当 $d_H(x,y)\le d$。

定义 2.2：图 $Q_n^{(d,w)}$ 表示图 Q_n^d 的重量为 w 的点的导出子图，其顶点集 $V\left(Q_n^{(d,w)}\right)=\left\{x\mid x\in Z_2^n\right\}$。

定义 2.3：$G=(V(G),E(G))$ 为简单无向图，若对任意的 $x,y\in G$，存在 $\varphi\in Aut(G)$ 满足 $\varphi(x)=y$，则图 G 为点传递图。

定义 2.4 [14]：$Q_n^{(d,w)}$ 是点传递图。

定义 2.5：给出两个 n 长二元码字 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义 $x\cap y=\{i\mid x_i=y_i=1,1\le i\le n\}$。

定理 2.6 [15]：设 d，w，n 是整数，$d\ne 0,w\le n$。然后，

(i) $A(n,d-1,w)=A(n,d,w)$，如果 d 是偶数，

(ii) $A(n,d,w)=A(n,d,n-w)$，

(iii) $A(n,d,w)=1$，如果 $d>2w$，

(iv) $A(n,d,w)=\frac{n}{w}$，如果 $d=2w$。

因为 $Q_n^{(d,w)}$ 是点可传递的，要研究它的独立数，我们只需要分析它的它包含顶点 $u^0=\left(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0\right)$，$u_1^0=u_2^0=\cdots=u_w^0=1$，$u_{w+1}^0=u_{w+2}^0=\cdots=u_n^0=0$ 的最大独立集。接下来，令 $D_i^w\left(u^0\right)$ （$0\le i\le 2w$ (或 $2(n-w)$)，i 是偶数)表示到 u^0 的距离为 i 的顶点集，在下图(见图 1)我们给出了图 $Q_n^{(d,w)}$ 相对于顶点 u^0 的距离划分。在下文中，对于图中的任何 $u\in Q_n^{(d,w)}$，我们使用 u_i 来表示其第 i 位的值。

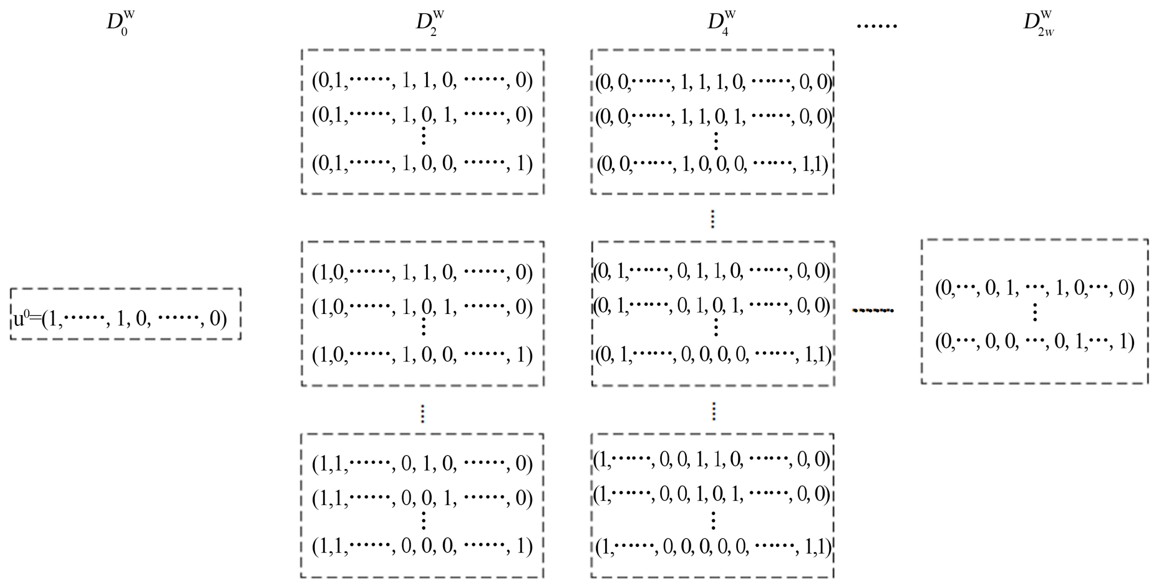

Figure 1. The distance division of $Q_n^{(d,w)}$

图 1. $Q_n^{(d,w)}$ **的距离划分**

3. 主要结论及其证明

引理 3.1：对于 $n,d,w\in Z^{+}$，d 为偶数，设 M 是 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的独立集，如果 $\frac{d}{2}\le w\le\frac{3d}{4}$，且 $n\ge 3d-2w$，则 $\left|M\cap Q_n^{(d-1,w)}\right|\ge 4$。设 $u_0,s,t,r\in M$，$c_1=\left|\left\{j\mid s_j=r_j=1,t_j=0,w+1\le j\le n\right\}\right|$，$c_2=\left|\left\{j\mid t_j=r_j=1,s_j=0,w+1\le j\le n\right\}\right|$，$c_3=\left|\left\{j\mid r_j=1,w+1\le j\le n\right\}\right|-c_1-c_2$，$c=\left|\left\{j\mid s_j=t_j=r_j=0,w+1\le j\le n\right\}\right|$。则有 $c_1,c_2\le w-\frac{d}{2}$，$c+c_3\le n-\frac{3d}{2}$，$c\le n+2w-3d$。

证明：令 $H_1=D_0^w\cap D_2^w\cap\cdots\cap D_{d-2}^w$，$H_2=D_d^w\cap D_{d+2}^w\cap\cdots\cap D_{2w}^w$，则 $V\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=H_1\cap H_2$。不妨设 $u^0\in M$，则对任意 $x\in H_1$ 且 $x\ne u^0$，有 $d_H\left(x,u^0\right)\le d-2<d$。因此，$M\cap H_1=u^0$。

因为 $w-\frac{d}{2}\ge 0$，$\frac{3d}{2}-2w\ge 0$，$n+2w-3d\ge 0$，所以至少存在三个点

$$x=(\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{n-w-\frac{d}{2}}),$$

$$y=(\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{d-w},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{d-w},\overbrace{1,\cdots,1}^{d-w},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}}),$$

$$z=(\overbrace{0,\cdots,0}^{2w-d},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{3d}{2}-2w},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{3d}{2}-2w},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{3d}{2}-2w},\overbrace{1,\cdots,1}^{\frac{3d}{2}-2w},\overbrace{0,\cdots,0}^{n+2w-3d}),$$

满足任意两点间距离都小于等于 d。故 $\left|M\cap H_2\right|\ge 3$。因此，$\left|M\cap Q_n^{(d-1,w)}\right|\ge 4$。

因为 $u^0\in H_1$，所以点 $s,t,r\in M\cap H_2$。令 $p_1=\left|\left\{i\mid s_i=t_i=1,1\le i\le w\right\}\right|$，$p_2=\left|\left\{j\mid s_j=t_j=1,w+1\le j\le n\right\}\right|$，$a=\left|\left\{j\mid s_j=t_j=0,w+1\le i\le n\right\}\right|$，$k_1=\left|\left\{i\mid s_i=1,w+1\le i\le n\right\}\right|-p_2$，

$k_1=\left|\{i\mid t_i=1,w+1\le i\le n\}\right|-p_2$ 且 $|s\cap t|=p$。则 $p=p_1+p_2$，$0\le p_1\le w-\frac{d}{2}$，$p_2+k_1\ge\frac{d}{2}$，$p_2+k_2\ge\frac{d}{2}$，$a_3=n-w-p_2-k_1-k_2$ 且 $d_H(s,t)=2(w-p)\ge d$。故 $k_1,k_2\ge d-w$，且 $a\le n-\frac{3d}{2}$。此时可得 $c+c_3=a\le n-\frac{3d}{2}$。

点 r 满足 $d_H(r,s)\ge d$，$d_H(r,t)\ge d$，故 $|r\cap s|<w-\frac{d}{2}$，$|r\cap t|<w-\frac{d}{2}$，那么 $\sum_i r_i\le w-\frac{d}{2}$，$\sum_j r_j\le w-\frac{d}{2}$，其中 $i=\{w+1\le k\le n\mid s_k=1,t_k\ne 1\}$，$j=\{w+1\le k\le n\mid t_k=1,s_k\ne 1\}$。故 $c_1,c_2\le w-\frac{d}{2}$。设 $b=\{j\mid r_j=1,1\le i\le w\}$，则 $c\le a-\left[w-(b+c_1+c_2)\right]\le n+2w-3d$。

定理 3.2：对于 $n,d,w\in Z^+$，d 为偶数，如果 $\frac{2n+2}{5}\le d\le\frac{3n-2}{5}$，$\frac{3d-n}{2}\le w\le\frac{5d-n-1}{5}$ 或 $\frac{6n-5d+1}{5}\le w\le\frac{3n-3d}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$。

证明：因为 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$，我们只需证明在题目所给条件下 $\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=4$。由定理 2.6(ii)，我们有 $A(n,d,w)=A(n,d,n-w)$。所以我们只需证明当 $\frac{2n+2}{5}\le d\le\frac{3n-2}{5}$，$\frac{3d-n}{2}\le w\le\frac{5d-n-1}{5}$ 时，$A(n,d,w)=4$。此时 $\frac{d}{2}\le w\le\frac{3d}{4}$，且 $n\ge 3d-2w$，满足引理 3.1 条件，所以可以得到 $\left|M\cap Q_n^{(d-1,w)}\right|\ge 4$，不妨设 $u_0,s,t,r\in M$，$c_1=\left|\{j\mid s_j=r_j=1,t_j=0,w+1\le j\le n\}\right|$，$c_2=\left|\{j\mid t_j=r_j=1,s_j=0,w+1\le j\le n\}\right|$，$c_3=\left|\{j\mid r_j=1,w+1\le j\le n\}\right|-c_1-c_2$，$c=\left|\{j\mid s_j=t_j=r_j=0,w+1\le j\le n\}\right|$。此时由引理 3.1 可得 $c_1,c_2\le w-\frac{d}{2}$，$c+c_3\le n-\frac{3d}{2}$，$c\le n+2w-3d$。

假设存在点 $m\in M\cap V\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)-\{u_0,s,t,r\}$，设 $b=\{j\mid m_j=1,1\le j\le w\}$。则 $d_H(s,m)\ge d$，$d_H(t,m)\ge d$，且 $|s\cap m|\le w-\frac{d}{2}$，$|t\cap m|\le w-\frac{d}{2}$。那么 $\sum_i m_i\le w-\frac{d}{2}$，$\sum_j m_j\le w-\frac{d}{2}$，其中 $i=\{w+1\le k\le n\mid s_k=1,t_k\ne 1\}$，$j=\{w+1\le k\le n\mid t_k=1,s_k\ne 1\}$。因为 $\frac{3d}{2}-2w\ge w-\frac{d}{2}$，则 b 可以取到 $w-\frac{d}{2}$，故 $d_H(r,m)\le b+\left(w-\frac{d}{2}\right)+c_1+\left(w-\frac{d}{2}\right)+c_2+\left(w-\frac{d}{2}\right)+\left[c_3-\left(\frac{3d}{2}-2w-c\right)\right]+c\le 2n+10w-9d\le d-2$。这与 M 是 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的独立集矛盾。因此，$\left|M\cap Q_n^{(d-1,w)}\right|=4$，即 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=4$。

定理 3.3：对于 $n,d,w\in Z^+$，d 为偶数，如果 $\frac{2d+1}{3}\le w\le\frac{3d}{4}$，$n-w+1\le d\le\frac{n+2w}{3}$，或 $\frac{11d-8}{12}\le w\le d-1$，$\frac{4n-4w}{3}\le d\le\frac{3n-3w-1}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$。

证明：因为 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$，我们只需证明在题目所给条件下 $\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=4$。由定理 2.6(ii)，我们有 $A(n,d,w)=A(n,d,n-w)$。所以我们只需证明当 $\frac{2d+1}{3}\le w\le\frac{3d}{4}$，$n-w+1\le d\le\frac{n+2w}{3}$ 时，$A(n,d,w)=4$。此时 $\frac{d}{2}\le w\le\frac{3d}{4}$，且 $n\ge 3d-2w$，满足引理 3.1 条件，所以可以得到 $\left|M\cap Q_n^{(d-1,w)}\right|\ge 4$，不妨设 $u_0,s,t,r\in M$，$c_1=\left|\{j\mid s_j=r_j=1,t_j=0,w+1\le j\le n\}\right|$，$c_2=\left|\{j\mid t_j=r_j=1,s_j=0,w+1\le j\le n\}\right|$，

$c_3=\left|\left\{j \mid r_j=1, w+1 \le j \le n\right\}\right|-c_1-c_2$， $c=\left|\left\{j \mid s_j=t_j=r_j=0, w+1 \le j \le n\right\}\right|$。此时由引理 3.1 可得 $c_1, c_2 \le w-\frac{d}{2}$， $c+c_3 \le n-\frac{3d}{2}$， $c \le n+2w-3d$。

假设存在点 $m \in M \cap H_2-\{s,t,r\}$，则 $d_H(s,m) \ge d$， $d_H(t,m) \ge d$，且 $|s \cap m| \le w-\frac{d}{2}$。那么 $\sum_i m_i \le w-\frac{d}{2}$，其中 $i=\left\{w+1 \le k \le n \mid s_k=1, t_k \ne 1\right\}$。因为 $0 \le \frac{3d}{2}-2w \le w-\frac{d}{2}-1$，则 $\sum_l m_l \le \frac{3d}{2}-2w$ 中 $l=\left\{w+1 \le k \le n \mid r_k=1, s_k, t_k \ne 1\right\}$，故此时

$$
\begin{aligned}
d_H(s,m) \le &\left(\frac{3d}{2}-2w\right)+\left(w-\frac{d}{2}-p\right)+(3w-2d)+\left(w-\frac{d}{2}\right)+\left(\frac{3d}{2}-2w\right) \\
&+\left[\left(w-\frac{d}{2}\right)-(3w-2d-c)\right]+\left(\frac{3d}{2}-2w\right)+c \le d-2
\end{aligned}
$$

。这与 M 是 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的独立集矛盾。

因此， $\left|M \cap Q_n^{(d-1,w)}\right|=4$，即 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=4$。

定理 3.4：对于 $n,d,w \in \mathrm{Z}^{+}$， d 为偶数，如果 $n=\frac{3d}{2}+1$， $d=\frac{4w-2}{3}$，则 $A(n,d,w)=4$。

证明：因为 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$，我们只需证明在题目所给条件下 $\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=4$。令 $H_1=D_0^w \bigcap D_2^w \cap \cdots \cap D_{d-2}^w$， $H_2=D_d^w \cap D_{d+2}^w \cap \cdots \cap D_{2w}^w$，则 $V\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=H_1 \cap H_2$。不妨设 $u^0 \in M$，则对任意 $x \in H_1$ 且 $x \ne u^0$，有 $d_H\left(x,u^0\right) \le d-2<d$。因此， $M \cap H_1=u^0$。

由已知条件可知，至少存在三个点

$$
x=(\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}}),
$$

$$
y=(\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}-1},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}-1},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}-1},0),
$$

$$
z=(1,\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}-1},1,\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{\frac{d}{2}-1}),
$$

满足任意两点间距离都小于等于 d。故 $\left|M \cap H_2\right| \ge 3$。因此， $\left|M \cap Q_n^{(d-1,w)}\right| \ge 4$。

不妨设 $u_0, s, t, r \in M$，因为 $u^0 \in H_1$，所以点 $s,t,r \in M \cap H_2$。设 $|s \cap t|=p$，我们有 $d_H(s,t)=2(w-k) \ge d$，故 $k \le w-\frac{d}{2}$。令 $p_1=\left|\left\{i \mid s_i=t_i=1, 1 \le i \le w\right\}\right|$， $p_2=\left|\left\{j \mid s_j=t_j=1, w+1 \le j \le n\right\}\right|$， $a=\left|\left\{j \mid s_j=t_j=0, w+1 \le j \le n\right\}\right|$， $k_1=\left|\left\{i \mid s_i=1, w+1 \le i \le n\right\}\right|-p_2$， $k_2=\left|\left\{i \mid t_i=1, w+1 \le i \le n\right\}\right|-p_2$。则 $p=p_1+p_2$， $0 \le p_1 \le w-\frac{d}{2}$， $p_2+k_1 \ge \frac{d}{2}$， $p_2+k_2 \ge \frac{d}{2}$， $a=n-w-p_2-k_1-k_2$。故 $k_1, k_2 \ge d-w$，且 $a \le n-\frac{3d}{2}=1$。

情形 1. $a=1$。

此时有 $p_2=w-\frac{d}{2}$， $k_1, k_2=d-w$，且 s 和 t 一定满足在前 w 个坐标中有 $w-\frac{d}{2}$ 个坐标为 1。不妨设

$$
s=(\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}}),
$$

$$t=(\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}-1},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}},\overbrace{0,\cdots,0}^{w-\frac{d}{2}-1},\overbrace{1,\cdots,1}^{w-\frac{d}{2}-1},0),$$

点 r 满足 $d_H(r,s)\ge d$，$d_H(r,t)\ge d$，故 $|r\cap s|\le w-\frac{d}{2}$，$|r\cap t|\le w-\frac{d}{2}$。此时 r 在前 w 个坐标中至少有 $w-\frac{d}{2}-1$ 个坐标为 1，且只能在 $s_i=t_i=0(1\le i\le w)$ 的位置 i 上。因为 $w-2\left(w-\frac{d}{2}\right)=w-\frac{d}{2}-1$，所以在 $s_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上或者在 $t_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上都有 $r_i=1$，不妨设在 $s_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上 $r_i=1$。

假设存在点 $m\in M\cap H_2-\{s,t,r\}$，则 $d_H(s,m)\ge d$，$d_H(t,m)\ge d$，$d_H(r,m)\ge d$，且 $|s\cap m|\le w-\frac{d}{2}$，$|t\cap m|\le w-\frac{d}{2}$。同理可得，$m$ 在前 w 个坐标中至少有 $w-\frac{d}{2}-1$ 个坐标为 1，且只能在 $s_i=t_i=0(1\le i\le w)$ 的位置 i 上。此时 $d_H(m,r)\le 2w-d=\frac{d}{2}+1\le d$，矛盾。因此，$|M\cap H_2|\le 3$。

情形 2. $a=0$。

点 r 满足 $d_H(r,s)\ge d$，$d_H(r,t)\ge d$，故 $|r\cap s|\le w-\frac{d}{2}$，$|r\cap t|\le w-\frac{d}{2}$。因为 $a=0$，所以在 $s_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上有 $t_i=1$，在 $s_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上和在 $t_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上有 $r_i=1$。此时 $p_2=w-\frac{d}{2}-1$ 或者 $w-\frac{d}{2}$，故 $p_1=1$ 或者 0。

当 $p_2=w-\frac{d}{2}-1$ 时，s 和 t 在前 w 个位置分别有 $w-\frac{d}{2}$ 个位置是 1。此时 r 在前 w 个位置有 $w-\frac{d}{2}-1$ 个位置是 1。则 $s_i=t_i=r_i=0(1\le i\le w)$ 的位置只有一个。假设存在点 $m\in M\cap H_2-\{s,t,r\}$，则 $d_H(s,m)\ge d$，$d_H(t,m)\ge d$，$d_H(r,m)\ge d$，且 $|s\cap m|\le w-\frac{d}{2}$，$|t\cap m|\le w-\frac{d}{2}$，$|r\cap m|\le w-\frac{d}{2}$。因为 $a=0$，在 $s_i=0,t_i=0,r_i=0(w+1\le i\le n)$ 的位置 i 上有 $m_i=1$。此时 $|r\cap m|>w-\frac{d}{2}$，矛盾。因此，$|M\cap H_2|\le 3$。

同理，当 $p_2=w-\frac{d}{2}$ 时，也能得到 $|r\cap m|>w-\frac{d}{2}$，矛盾。因此，$|M\cap H_2|\le 3$。

综上所述，$|M\cap H_2|=3$，即 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)=4$。

由定理 2.6，可以得到以下推论。

推论 3.5：对于 $n,d,w\in Z^+$，d 为奇数，如果 $\frac{2n+7}{5}\le d\le\frac{3n+3}{5}$，$\frac{3d-n+3}{2}\le w\le\frac{5d-n+4}{5}$ 或 $\frac{6n-5d-4}{5}\le w\le\frac{3n-3d-3}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$。

推论 3.6：对于 $n,d,w\in Z^+$，d 为奇数，如果 $\frac{2d+3}{3}\le w\le\frac{3d+3}{4}$，$n-w\le d\le\frac{n+2w-3}{3}$，或者 $\frac{11d+3}{12}\le w\le d$，$\frac{4n-4w-3}{3}\le d\le\frac{3n-3w-3}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$。

4. 结论

本文将 $A(n,d,w)$ 看作是维超立方体d-1次幂图中所有重量为w的点导出子图 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的最大独立集的大小，通过构造最大独立集的方法得到了：对于 $n,d,w\in Z^+$，d为偶数，如果 $\frac{2n+2}{5}\le d\le\frac{3n-2}{5}$，

$\frac{3d-n}{2} \le w \le \frac{5d-n-1}{5}$ 或 $\frac{6n-5d+1}{5} \le w \le \frac{3n-3d}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$；如果 $\frac{2d+1}{3} \le w \le \frac{3d}{4}$，$n-w+1 \le d \le \frac{n+2w}{3}$，或 $\frac{11d-8}{12} \le w \le d-1$，$\frac{4n-4w}{3} \le d \le \frac{3n-3w-1}{2}$，则 $A(n,d,w)=4$；如果 $n=\frac{3d}{2}+1$，$d=\frac{4w-2}{3}$，则 $A(n,d,w)=4$。

参考文献

[1] Kleitman, D.J. (1966) On a Combinatorial Conjecture of Erdös. *Journal of Combinatorial Theory*, **1**, 1209-1214. https://doi.org/10.1016/S0021-9800(66)80027-3

[2] Hamming, R.W. (1950) Error Detecting and error Correcting Codes. *Bell System Technical Journal*, **29**, 147-160. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x

[3] Johnson, S.M. (1962) A New Upper Bound for Error-Correcting Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **8**, 203-207. https://doi.org/10.1109/TIT.1962.1057714

[4] MacWilliams, F.J. and Sloane, N.J.A. (1977) The Theory of Error-Correcting Codes. Elsevier, North-Holland.

[5] Agrell, E. and Vardy, A. (2000) Upper Bounds for Constant-Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **46**, 2373-2395. https://doi.org/10.1109/18.887851

[6] Cornelis, L.M. and, Van, P. and Tuvi, E. (1989) New Lower Bounds for Constant Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **35**, 1324-1329. https://doi.org/10.1109/18.45293

[7] Brouwer, A.E., Shearer, J.B., Sloane, N.J.A. and Smith, W.D. (1990) A New Table of Constant Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, 1334-1380. https://doi.org/10.1109/18.59932

[8] Johnson, S.M. (1971) On Upper Bounds for Unrestricted Binary Error-Correcting Code. *IEEE Transactions on Information Theory*, **17**, 466-478.

[9] Chee, Y.M., Xing, C. and Yeo, S.L. (2010) New Constant-Weight Codes from Propagation Rules. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 1596-1599. https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2040964

[10] Kang, B.G., Kim, H.K. and Toan, P.Y. (2012) Delsarte's Linear Programming Bound for Constant-Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **58**, 5956-5962. https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2201445

[11] Schrijver, A. (2005) New Code upper Bounds from the Terwilliger Algebra and Semidefinite Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 2859-2866. https://doi.org/10.1109/TIT.2005.851748

[12] Kibler, R.E. (1980) Some New Constant Weight Codes (Corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, **26**, 364-365. https://doi.org/10.1109/TIT.1980.1056190

[13] Ostergard, P.R.J. (2010) Classification of Binary Constant Weight Codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 3779-3785. https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2050922

[14] Lan, L., Chang, Y. and Wang, L. (2016) Cyclic Constant-Weight Codes: Upper Bounds and New Optimal Constructions. *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**, 6328-6341. https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2613120

[15] 寇永芳，吕梦欣，胡晓敏，杨卫华. 关于 A(n,d,w)的一个注记，应用数学进展, 2021, 10(3): 740-746. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.103081