Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(3), 1209-1213
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113131

Hans汉斯

一类双卷积空间非退化曲面的曲率表示

杜玲伟，王　剑

天津职业技术师范大学，理学院，天津

收稿日期：2022年2月21日；录用日期：2022年3月16日；发布日期：2022年3月23日

摘　要

针对一类配置卷积度量的双卷积空间，利用Kozul计算方法和微分几何的理论研究了非退化曲面的卷积曲率形式，得到其刻画方程。在此基础上，证明了卷积函数为一次函数对应的双卷积空间平坦。

关键词

双卷积空间，子流形，数量曲率

Curvature Representation of Nondegenerate Surfaces in a Class of Double Warped Product Spaces

Lingwei Du, Jian Wang

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Feb. 21st, 2022; accepted: Mar. 16th, 2022; published: Mar. 23rd, 2022

Abstract

For a class of double Warped Product spaces with a Riemannian metric, the paper gives the curvature representation of the nondegenerate surface of double Warped Product space by using the knowledge of Kozul formula and the theory of differential geometry. On this basis, it is proved that the nondegenerate surface of double Warped Product space is flat if and only if Warped function is the first order function.

Keywords

Double Warped Product Space, Submanifolds, Scalar Curvature

文章引用: 杜玲伟, 王剑. 一类双卷积空间非退化曲面的曲率表示[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1209-1213.
DOI: 10.12677/aam.2022.113131

1. 引言

早在 1948 年，V. F. Kagan 给出了 3 维欧式空间 E^3 中平行曲面的分类，并指出 E^2 中的开区域、球面 S^2 以及圆柱面 $S^1\times E^1$ 为 E^3 中一类特殊的平行平面[1]。对于 $n>2$ 时的情形，U. Simon and A. Weinstein 给出了 E^3 中平行超曲面的分类[2]。在文献[3]中，D. Ferus 得到了欧式空间平行子流形的一般分类定理。从那时起，研究平行子流形成为微分几何中一个非常有趣和重要的研究课题。

在文献[4]中，R. L. Bishop，B. O'Neill 为了构造一类具有负曲率的流形结构，引入了卷积空间的概念。卷积空间为笛卡尔积空间的自然推广，具有重要的几何物理性质。对于广义的卷积空间，L. J. Alias 等学者给出了具有常平均曲率的特殊曲面和超曲面的基本性质[5] [6]。重要的是，在文献[7] [8]中，Chen 和 J. Van der Veken 从微分几何的角度刻画了卷积空间非退化曲面的曲率形式。基于这些研究，本文主要刻画双卷积空间非退化曲面的曲率形式。首先我们给出双卷积空间上的基本公式、定义和相关理论；其次，主要研究双卷积空间上非退化曲面的几何性质。

2. 基本概念和基本公式

给定配置黎曼度量 g_B 的黎曼流形 B 和开区间 I，设 h,f 分别为定义在流形 B 上的正函数。考虑乘积流形 $I\times B$ 和投射 $\pi:I\times B\to B,\eta:I\times B\to I$，诱导配置卷积度量 $g=h^2g_B+f^2g_I$ 的双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$，称 h,f 为对应卷积空间的卷积函数。

设伪黎曼流形 $(\tilde{B},\tilde{g})$ 的子流形为 B，流形 B 上的切丛 TB。给定局部坐标卡 (Ω,φ) 中的坐标系统 $\{x^i\}$，对任意的 $p\in\Omega$，对应 T_pB 上向量场可表示为 $X=x^i\partial_i,Y=y^j\partial_j$，其中在任意点 $Q\in\Omega$ 对应切丛 $T_\Omega(B)$ 上的基底 $\{\partial/\partial x^i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 中的向量场，则协变导数 D 满足

$$D_XY=x^iD_iY=x^i\left(\partial_iy^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}+x^iy^jD_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

这里 $D_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 为 Ω 中的向量场。记 Γ_{ij}^k 为对应协变导数 D 的 Christoffel 符号，如果对基底所有的坐标对 (i,j)，都有 $D_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$，称 D 为 Ω 中唯一联络。记伪黎曼流形 $(\tilde{B},\tilde{g})$ 和子流形 B 上对应 Levi-Civita 联络分别为 $\tilde{\nabla},\nabla$。

定义 1：联络对应的曲率形式定义为

$$R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$$

记对应 T_pM 上向量场可表示为 $X=x^i\partial_i,Y=y^j\partial_j,Z=z^k\partial_k,W=w^l\partial_l$，对应的曲率算式[5] [6]为

$$R(X,Y)Z=[\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z,\quad X,Y,Z\in\Gamma(TM) \tag{1.1}$$

且有 $R(X,Y,Z,W)=\langle R(Z,W)Y,X\rangle=R_{ijkl}x^iy^jz^kw^l$。$R(X,Y,Z,W)$ 具有以下性质：

1) $R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)=-R(Y,X,Z,W)$, (1.2)

2) $R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,W,Y)+R(X,W,Y,Z)=0$, (1.3)

3) $R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$. (1.4)

结合向量场的基底形式，曲率等价形式为

a) $R_{ijkl}=-R_{ijlk}=-R_{jikl}$,

b) $R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$,

c) $R_{ijkl}=R_{klij}$.

3. 双卷积空间的基本引理

对于配置卷积度量 $g=h^2g_B+f^2g_I$ 的双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$，设 t 为参数，∂t 为区间 I 上的向量场的提升，满足

$$\eta^{-1}(q)=B\times\{q\},q\in I,\ \pi^{-1}(p)=\{p\}\times I,\ p\in B, \tag{2.1}$$

其中，双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 上与 $\pi^{-1}(p)$、$\eta^{-1}(q)$ 相切的向量场为垂直向量场。记 $\varphi_V=\langle V,\partial_t\rangle$，那么双卷积空间上的向量场 V 具有如下分解

$$V=\varphi_V\partial_t+\hat{V}, \tag{2.2}$$

其中 $\hat{V}$ 是属于 V 与 ∂_t 正交的垂直分解元。$\mathcal{L}(B)$ 和 $\mathcal{L}(I)$ 分别指代双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 上的底流形的向量场集[7]。

引理 2.1. 记 t 为区间 I 上的弧长参数，设向量场 $X,Y\in\mathcal{L}(B)$，双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 上的度量满足：

1) $g\left(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t,\partial_t\right)=-hh'$,

2) $g\left(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t,X\right)=g\left(\tilde{\nabla}_{\partial_t}X,\partial_t\right)=g\left(\tilde{\nabla}_X\partial_t,\partial_t\right)=0$,

3) $g\left(\tilde{\nabla}_{\partial_t}X,Y\right)=g\left(\tilde{\nabla}_X\partial_t,Y\right)ff'g_B(X,Y)$,

4) $g\left(\tilde{\nabla}_XY,\partial_t\right)=-ff'g_B(X,Y)$,

5) $g\left(\tilde{\nabla}_{\partial_t}Y,X\right)=g\left(\tilde{\nabla}_Y\partial_t,X\right)=ff'g_B(X,Y)$.

证明：利用文献[2] [3]中的 Kozul 公式，

$$2g(\nabla_XY,Z)=X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))-g(X,[Y,Z])+g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y]).$$

分别代入对应的向量场 ∂_t,X,Y，引理得证。

引理 2.2. 对于向量场 $X,Y\in\mathcal{L}(B)$，相应的 Levi-Civita 联络 $\tilde{\nabla}$ 满足

1) $\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t=(\ln h)'\partial_t$,

2) $\tilde{\nabla}_{\partial_t}X=\tilde{\nabla}_X\partial_t=(\ln f)'X$,

3) $\langle\tilde{\nabla}_XY,\partial_t\rangle=-\langle X,Y\rangle(\ln f)'$.

证明：设 $a_1,a_2\in C^\infty(M)$，结合引理 2.1 得到

$$g(\nabla_XY,a_1Z+a_2\partial_t)=a_1fg_B\left(\nabla_X^RY,Z\right)-a_2ff'g_B(X,Y)=g\left(\nabla_X^RY+\frac{ff'g_B(X,Y)}{h^2}\partial_t,a_1Z+a_2\partial_t\right),$$

分别代入对应的向量场 ∂_t,X,Y，引理得证。

4. 双卷积空间非退化曲面的几何性质

本节主要结合双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 非退化曲面的结构形式，给出刻画曲面几何性质的主要引理[7] [8]。

引理 3.1. 设向量场 $X,Y,Z\in\mathcal{L}(B)$，双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 上的曲率张量 $\tilde{R}$ 满足：

1) $\tilde{R}(\partial_t,X)\partial_t=\dfrac{hf''-h'f'}{hf}X$，

2) $\tilde{R}(X,\partial_t)Y=\langle X,Y\rangle\dfrac{f''}{f}\partial_t$，

3) $\tilde{R}(X,Y)\partial_t=0$，

4) $\tilde{R}(X,Y)Z=\dfrac{-(f')^2+c}{f^2}\{\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y\}$ (c 为常数)。

证明：

利用引理 2.2 和曲率算式(1.1)得到

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\partial_t,X)\partial_t&=\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{\nabla}_X\partial_t-\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{\nabla}_X\partial_t-\tilde{\nabla}_{[\partial_t,X]}\partial_t\\&=\tilde{\nabla}_{\partial_t}\left((\ln f)'X\right)-\tilde{\nabla}_X\left((\ln h)'\partial_t\right)\\&=\partial_t(\ln f)'X+(\ln f)'\tilde{\nabla}_{\partial_t}X-X(\ln h)'\partial_t-(\ln h)'\tilde{\nabla}_X\partial_t\\&=\frac{hf''-h'f'}{hf}X\end{aligned}. \tag{3.1}$$

类似(3.1)计算方法，分别代入对应的向量场 ∂_t,X,Y，引理 3.1 得证。

定理 3.2. 双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 平坦的充要条件是正函数为一次函数 $f(t)=at+b$，且常数 $c=-a^2$。

证明：双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 平坦的条件对应 $\tilde{R}(X,Y)Z=\dfrac{-(f')^2+c}{f^2}\{\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y\}=0$，从而 $(f')^2-c=0$，则正函数为一次函数。

定理 3.3. 设向量场 $X,Y,Z\in\mathcal{L}(B)$，双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 上的 Ricci 曲率满足：

1) $Ric(\partial_t,\partial_t)=\dfrac{3(hf''-h'f')}{hf}$,

2) $Ric(\partial_t,X)=0$,

3) $Ric(X,Y)=-\left[2\left(\dfrac{f'}{f}\right)^2+\dfrac{2c}{f^2}+\dfrac{f''}{f}\right]\langle X,Y\rangle$.

证明：给定双卷积空间 ${}_hI\times{}_fB$ 的正交标架 $E_4=\left\{\dfrac{\partial_t}{h},\dfrac{e_i}{f}\right\}(i=1,2,3)$，利用引理 3.1 和 Ricci 曲率公式 $Ric(V,W)=\sum_m\epsilon_m\langle R(V,E_m)W,E_m\rangle$ 得到

$$Ric(\bar{X},\bar{Y})=\frac{1}{h^2}\epsilon_4\left\langle R\left(\bar{X},\frac{\partial_t}{h}\right)\bar{Y},\frac{\partial_t}{h}\right\rangle+\sum_{i=1}^3\epsilon_i\left\langle R\left(\bar{X},\frac{e_i}{f}\right)\bar{Y},\frac{e_i}{f}\right\rangle, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}Ric^{L_1^4}(\partial_t,\partial_t)&=\frac{1}{h^2}\epsilon_4\langle R(\partial_t,\partial_t)\partial_t,\partial_t\rangle+\frac{1}{f^2}\sum_{i=1}^3\epsilon_i\langle R(\partial_t,e_i)\partial_t,e_i\rangle\\&=\frac{1}{f^2}\sum_{i=1}^3\epsilon_i\left\langle\frac{hf''-h'f'}{hf}e_i,e_i\right\rangle\\&=\frac{3(hf''-h'f')}{hf}\end{aligned}. \tag{3.3}$$

类似(3.3)计算方法，定理 3.3 得证。

参考文献

[1] Kagan, V.F. (1948) Foundations of Theory of Surfaces in Tensor Representation. Part II, Gos. Izd. Tekhn.-Tror. Lit., Moscow-Leningrad. (in Russian)

[2] Simon, U. and Weinstein, A. (1969) Anwendungen der de Rhamschen Zerlegung auf Probleme derlokalen Flachentheorie. *Manuscripta Mathematica*, **1**, 139-146. https://doi.org/10.1007/BF01173099

[3] Ferus, D. (1974) Immersions with Parallel Second Fundamental Form. *Mathematische Zeitschrift*, **140**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01218650

[4] Bishop, R. and O'Neill, B. (1969) Manifolds of Negative Curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, **145**, 1-49. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0251664-4

[5] Alias, L.J., Estudillo, F.J.M. and Romero, A. (1996) On the Gaussian Curvature of Maximal Surfaces in n-Dimensional Generalized Robertson-Walker Spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, **13**, 3211-3219. https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/12/011

[6] Alias, L.J., Romero, A. and Sánchez, M. (1995) Uniqueness of Complete Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Generalized Robertson-Walker Spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, **27**, 71-84. https://doi.org/10.1007/BF02105675

[7] Chen, B.Y. and Van der Veken, J. (2007) Spatial and Lorentzian Surfaces in Robertson-Walker Space-Times. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article ID: 073509. https://doi.org/10.1063/1.2748616

[8] Chen, B.Y. and Van der Veken, J. (2007) Marginally Trapped Surfaces in Lorentzian Space Forms with Positive Relative Nullity. *Classical and Quantum Gravity*, **24**, 551-563. https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/3/003