Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(3), 1242-1246
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113134

树和路乘积图的线性荫度

李 萍

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2022年2月21日；录用日期：2022年3月16日；发布日期：2022年3月23日

摘 要

1970 年 **Harary** 提出图的线性荫度的概念, 指的是将图 G 的边集分解成 m 个边不交的线性森林的最小整数 m. 线性森林即每一个连通分支都是路的图. 本文主要对树和路的乘积结构进行讨论, 通过对乘积图中的边进行划分, 证明了树和路的笛卡尔积图、直积图、强积图满足线性荫度猜想。

关键词

线性荫度猜想，笛卡尔积图，直积图，强积图

The Linear Arboricity of the Product of Tree and Path

Ping Li

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 21st, 2022; accepted: Mar. 16th, 2022; published: Mar. 23rd, 2022

Abstract

Harary introduced the concept of linear arboricity in 1970**. The linear arboricity is the minimum integer** m **such that** G **can be decomposed into** m **edge-disjoint linear forests. A linear forest is a graph in which every connected component is a path. We discuss**

文章引用: 李萍. 树和路乘积图的线性荫度[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1242-1246.
DOI: 10.12677/aam.2022.113134

the product structure of tree and path, divide the edges in the product graph and prove that the linear arboricity conjecture holds for the cartesian product, the direct product, the strong product of tree and path.

Keywords

Linear Arboricity Conjecture, The Cartesian Product of Graphs, The Direct Product of Graphs, The Strong Product of Graphs

1. 引言

本文只研究简单无向图, 对于任意给定的图 G, 我们用 $V(G)$, $E(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 的顶点集合, 边集合和最大度. 线性森林即每一个连通分支都是路的图. 1970 年 Harary [1] 提出图的线性荫度 $la(G)$ 的概念: 将图 G 的边集分解成边不交的线性森林的最小数目.

1980 年, Akiyama, Exoo, Harary [2] 提出了猜想: 对于任意的正则图 G, 有 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$. 因为对于任意的图 G, 有 $la(G) \geq \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$; 而对于任意的正则图 G, 有 $la(G) \geq \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$, 因此此猜想等价于著名的线性荫度猜想:

猜想 1: 对任意的图 G, 有 $\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil \leq la(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$.

1980 年, Akiyama, Exoo, Harary [2] 借助 $Vizing's$ 定理证明了 3-正则图可以分解成两个线性森林, 同时他们也证明了树, 完全图, 完全二部图满足线性荫度猜想. 1981 年, Akiyama, Exoo, Harary [3] 借助于因子分解的方法证明了 4-正则图可以分解成三个线性森林. 1982 年, Tomasta [4] 证明了 $\Delta = 6$ 的图满足线性荫度猜想. 1984 年, Enomoto, Péroche [5] 证明了 $\Delta = 5, 6, 8$ 的图满足线性荫度猜想. 1986 年, Guldan [6] 证明了 $\Delta = 10$ 的图满足线性荫度猜想. 1999 年, Wu [7] 证明了若 G 是 $\Delta \geq 9$ 的平面图, 则 G 满足线性荫度猜想. 2008 年, Wu [8] 等人证明了若 G 是 $\Delta = 7$ 的平面图, 则 G 满足线性荫度猜想. 以上结果证明了所有的简单平面图都满足线性荫度猜想.

虽然最大度为 10 的图, 平面图等图类已经被证明是满足线性荫度猜想的, 但迄今为止, 此猜想还没有被完全证明. 在本文中我们主要考虑树和路的乘积结构, 证明了树和路的乘积图满足线性荫度猜想, 这一结果丰富了此研究领域的发展.

下面我们先介绍一些乘积图的相关定义.

定义 1. 对于图 G 和图 H, 图 G 和图 H 的笛卡尔积图 $G \square H$, 其顶点集合为 $V(G) \times V(H)$, 如果在 $G \square H$ 中 $v = x$ 且 $wy \in E(H)$ 或 $w = y$ 且 $vx \in E(G)$, 那么我们称顶点 (v, w) 和 (x, y) 相邻.

定义 2. 对于图 G 和图 H, 图 G 和图 H 的直积图 $G \times H$, 其顶点集合为 $V(G) \times V(H)$, 如果在直积图 $G \times H$ 中 $vx \in E(G)$ 且 $wy \in E(H)$, 那么我们称顶点 (v, w) 和 (x, y) 相邻.

定义 3. 对于图 G 和图 H, 图 G 和图 H 的强积图 $G \boxtimes H$, 它是笛卡尔积图 $G \square H$ 和直积图 $G \times H$ 的并集.

本文主要对树和路的乘积结构进行研究, 借助 Akiyama, Exoo, Harary 在1980 年所得到的关于树的线性荫度的结论, 我们证明了树和路的笛卡尔积图, 直积图满足线性荫度猜想. 因为强积图是笛卡尔积图和直积图的并集, 在此基础上, 我们进一步证明了树和路的强积图满足线性荫度猜想, 得到以下定理.

定理 1. 对于树 T 和路 P_n 的强积图 $T \boxtimes P_n$, $la(T \boxtimes P_n) = \lceil \frac{\Delta(T \boxtimes P_n)}{2} \rceil$.

2. 主要结果及证明

1980 年, Akiyama, Exoo, Harary 在文献 [2] 中不仅证明了树 T 满足线性荫度猜想, 还给出了树 T 线性荫度的精确值, $la(T) = \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$. 为了文章的完整性, 在这里我们详细呈现了此证明过程.

引理 1. [2] 如果树 T 的最大度为 $\Delta(T)$, 那么树 T 的线性荫度 $la(T) = \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$.

证明. 由图的线性荫度的定义可得 $la(T) \geq \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$.

因为树 T 的最大度为 $\Delta(T)$, 它的边色数 $\chi'(T) = \Delta(T)$, 树 T 中任意两种颜色的边导出子图都会形成一个线性森林, 因此 $la(T) \leq \lceil \frac{\chi'(T)}{2} \rceil = \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$.

综上所述, 树 T 的线性荫度 $la(T) = \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$. □

引理 2. 对于树 T 和路 P_n 的笛卡尔积图 $T \square P_n$, $la(T \square P_n) = \lceil \frac{\Delta(T \square P_n)}{2} \rceil$.

证明. 根据笛卡尔积图的定义, 我们知道在笛卡尔积图 $T \square P_n$ 中, 最大度 $\Delta(T \square P_n) = \Delta(T) + 2$, 那么 $la(T \square P_n) \geq \lceil \frac{\Delta(T \square P_n)}{2} \rceil = \lceil \frac{\Delta(T)+2}{2} \rceil$. 下面我们按照笛卡尔积图 $T \square P_n$ 中的边是否为树 T 中的边, 来对笛卡尔积图 $T \square P_n$ 中的边进行划分.

如果笛卡尔积图 $T \square P_n$ 中的边是树 T 中的边, 那么我们将这些边放入集合 X 中, 待所有的边全部放入 X 中后, 我们得到 X 中包含 $n+1$ 个树 T 的连通分支, 且这 $n+1$ 个连通分支之间是两两不相交的. 而此时在 $T \square P_n \setminus X$ 中, 其每一个连通分支都是路 P_n, 且 $T \square P_n \setminus X$ 所包含的连通分支数为树 T 的顶点数, 同时 $T \square P_n \setminus X$ 的各个连通分支之间也是两两不相交的, 因此 $T \square P_n \setminus X$ 满足线性森林的定义.

结合引理 1, 我们可以得到 $la(T \square P_n) \leq la(T) + la(P_n) = \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{\Delta(T)+2}{2} \rceil = \lceil \frac{\Delta(T \square P_n)}{2} \rceil$.

综上所述, 树 T 和路 P_n 笛卡尔积图 $T \square P_n$ 的线性荫度 $la(T \square P_n) = \lceil \frac{\Delta(T \square P_n)}{2} \rceil$. □

引理 3. 对于树 T 和路 P_n 的直积图 $T \times P_n$, $la(T \times P_n) = \lceil \frac{\Delta(T \times P_n)}{2} \rceil$.

证明. 由直积图的定义可得, 直积图 $T \times P_n$ 的最大度 $\Delta(T \times P_n) = 2\Delta(T)$.

由图的线性荫度的定义可知, 直积图 $T \times P_n$ 的线性荫度 $la(T \times P_n) \geq \lceil \frac{\Delta(T \times P_n)}{2} \rceil = \lceil \frac{2\Delta(T)}{2} \rceil = \lceil \Delta(T) \rceil$. 由引理 1 可得, 树 T 的线性荫度 $la(T) = \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$, 即树 T 可以被 $\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil$ 个线性森林覆盖, 我们把树 T 所分解成的线性森林记作 LF_i, 其中 $i \in \{1, 2, \ldots, \lceil \frac{\Delta(T)}{2} \rceil\}$.

下面我们根据线性森林 LF_i 中边的情况来对直积图 $T\times P_n$ 的边进行分解, 我们知道若 $u_su_t\in LF_i, v_iv_j\in P_n$, 那么在直积图 $T\times P_n$ 中, 有 $(u_s,v_i)(u_t,v_j)\in T\times P_n$, $(u_s,v_j)(u_t,v_i)\in T\times P_n$. 在对直积图 $T\times P_n$ 边分解的过程中, 我们将直积图 $T\times P_n$ 中的边 $(u_s,v_i)(u_t,v_j)$ 和 $(u_s,v_j)(u_t,v_i)$ 放入不同的线性森林中, 即 $(u_s,v_i)(u_t,v_j)\in LF_i^1$, $(u_s,v_j)(u_t,v_i)\in LF_i^2$, 其中 $LF_i^1\neq LF_i^2$, 那么有 $la(T\times P_n)\leq 2la(T)$, 因此直积图 $T\times P_n$ 的线性荫度 $la(T\times P_n)\leq 2la(T)\leq 2\lceil\frac{\Delta(T)}{2}\rceil=\lceil\Delta(T)\rceil$.

综上所述, 直积图 $T\times P_n$ 的线性荫度 $la(T\times P_n)=\lceil\Delta(T)\rceil=\lceil\frac{\Delta(T\times P_n)}{2}\rceil$. □

下面我们以直积图 $K_3\times P_2$ 为例来进行具体说明. 如图 1所示, 我们把 K_3 的顶点记作 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, 把 P_2 的顶点记作 $\{v_1,v_2,v_3\}$, 把 K_3 的边记作 $\{u_1u_2,u_1u_3,u_1u_4\}$, 把 P_2 的边记作 $\{v_1v_2,v_2v_3\}$.

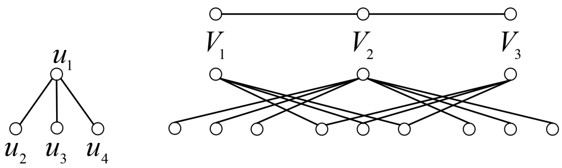

Figure 1. The direct product of $K_3\times P_2$

图 1. 直积图 $K_3\times P_2$

在直积图 $K_3\times P_2$ 中, $\Delta(K_3\times P_2)=2\Delta(K_3)=6$, 直积图 $K_3\times P_2$ 所包含的边有

$$\{(u_1,v_1)(u_2,v_2),(u_1,v_1)(u_3,v_2),(u_1,v_1)(u_4,v_2);$$

$$(u_1,v_2)(u_2,v_1),(u_1,v_2)(u_3,v_1),(u_1,v_2)(u_4,v_1);$$

$$(u_1,v_2)(u_2,v_3),(u_1,v_2)(u_3,v_3),(u_1,v_2)(u_4,v_3);$$

$$(u_1,v_3)(u_2,v_2),(u_1,v_3)(u_3,v_2),(u_1,v_3)(u_4,v_2)\}.$$

因为 $\Delta(K_3)=3$, $la(K_3)=2$, K_3 可以被两个线性森林所覆盖, 为方便起见, 我们把这两个线性森林分别记作 LF_1 和 LF_2, 我们把 $\{u_1u_2,u_1u_3\}$ 看作线性森林 LF_1 中的边, 把 $\{u_1u_4\}$ 看作线性森林 LF_2 中的边, 路 P_2 中的边为 $\{v_1v_2,v_2v_3\}$, 下面我们可以将直积图 $K_3\times P_2$ 的边按照树 T 中线性森林的覆盖方式来进行相应划分, 即直积图 $K_3\times P_2$ 的边可以按照以下方式来进行划分:

$$A_1=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2),(u_1,v_1)(u_3,v_2),(u_1,v_2)(u_2,v_3),(u_1,v_2)(u_3,v_3)\}.$$

$$A_2=\{(u_1,v_2)(u_2,v_1),(u_1,v_2)(u_3,v_1),(u_1,v_3)(u_2,v_2),(u_1,v_3)(u_3,v_2)\}.$$

$$A_3=\{(u_1,v_1)(u_4,v_2),(u_1,v_2)(u_4,v_1),(u_1,v_2)(u_4,v_3),(u_1,v_3)(u_4,v_2)\}.$$

将直积图 $K_3\times P_2$ 的边经过这样划分之后, 我们可以得到 A_1,A_2,A_3 均为线性森林, 因此 $la(K_3\times P_2)\leq 2la(K_3)\leq 2\lceil\frac{\Delta(K_3)}{2}\rceil=\lceil\frac{\Delta(K_3\times P_2)}{2}\rceil$.

由图的线性荫度的定义可得, $la(K_3\times P_2)\geq\lceil\frac{\Delta(K_3\times P_2)}{2}\rceil$.

综上所述, $la(K_3\times P_2)=\lceil\frac{\Delta(K_3\times P_2)}{2}\rceil$. □

定理 1. 对于树 T 和路 P_n 的强积图 $T\boxtimes P_n$, $la(T\boxtimes P_n)=\lceil\frac{\Delta(T\boxtimes P_n)}{2}\rceil$.

证明. 我们知道强积图是笛卡尔积图和直积图的并, 那么由强积图的定义可得, $\Delta(T\boxtimes P_n)=\Delta(T\square P_n)+\Delta(T\times P_n)=(\Delta(T)+2)+2\Delta(T)=3\Delta(T)+2$.

由图的线性荫度的定义可得, $la(T \boxtimes P_n) \geq \lceil \frac{\Delta(T \boxtimes P_n)}{2} \rceil = \lceil \frac{3\Delta(T)+2}{2} \rceil$.

由引理 2 和引理 3 可得 $la(\Delta(T \square P_n)) + la(\Delta(T \times P_n)) = \lceil \frac{\Delta(T)+2}{2} \rceil + \Delta(T) = \lceil \frac{3\Delta(T)+2}{2} \rceil$, 所以 $la(\Delta(T \boxtimes P_n)) \leq la(\Delta(T \square P_n)) + la(\Delta(T \times P_n)) = \lceil \frac{3\Delta(T)+2}{2} \rceil$.

综上所述, 树 T 和路 P_n 强积图 $T \boxtimes P_n$ 的线性荫度 $la(T \boxtimes P_n) = \lceil \frac{3\Delta(T)+2}{2} \rceil = \lceil \frac{\Delta(T \boxtimes P_n)}{2} \rceil$. □

3. 总结

1980 年, Akiyama, Exoo, Harary 提出了线性荫度猜想, 40 多年来, 此猜想一直都是图论中广泛受关注的热点话题之一, 众多学者投身于此猜想的研究并为此做出了重大贡献, 迄今为止, 最大度为 10 的图、平面图、系列平行图等图类已经被证明是满足线性荫度猜想的, 但此猜想还没有被完全证明. 本文我们通过对树和路的乘积结构进行研究, 证明了树和路的笛卡尔积图、直积图、强积图都满足线性荫度猜想, 丰富了此研究领域的研究结果.

参考文献

[1] Harary, F. (1970) Covering and Packing in Graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **175**, 198-215. https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1970.tb56470.x

[2] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F. (1980) Covering and Packing in Graphs III: Cyclic and Acyclic Invariants. *Mathematica Slovaca*, **30**, 405-417.

[3] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F. (1981) Covering and Packing in Graphs IV: Linear Arboricity. *Networks*, **11**, 69-72. https://doi.org/10.1002/net.3230110108

[4] Tomasta, P. (1982) Note on Linear Arboricity. *Mathematica Slovaca*, **32**, 239-242.

[5] Enomoto, H. and Péroche, B. (1984) The Linear Arboricity of Some Regular Graphs. *Journal of Graph Theory*, **8**, 309-324. https://doi.org/10.1002/jgt.3190080211

[6] Guldan, F. (1986) The Linear Arboricity of 10-Regular Graphs. *Mathematica Slovaca*, **36**, 225-228. https://doi.org/10.1002/jgt.3190100408

[7] Wu, J. (1999) On the Linear Arboricity of Planar Graphs. *Journal of Graph Theory*, **31**, 129-134. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199906)31:2⟨129::AID-JGT5⟩3.0.CO;2-A

[8] Wu, J. and Wu, Y. (2008) The Linear Arboricity of Planar Graphs of Maximum Degree Seven Is Four. *Journal of Graph Theory*, **58**, 210-220. https://doi.org/10.1002/jgt.20305