

# 基于灰色预测模型研究延迟退休政策的必要性

陈歆宇, 王 焱, 王安迪, 王天园

沈阳航空航天大学, 理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2022年2月23日; 录用日期: 2022年3月21日; 发布日期: 2022年3月28日

## 摘 要

随着社会的发展, 人口老龄化进程加快引发的社会问题日益凸显。因此, 为缓解人口老龄化带来的消极影响, 实行延迟退休政策是必然选择。本文基于2010年~2019年的统计数据, 建立GM (1, 1)灰色预测模型对2020年~2029年各个年龄段的人口进行预测。研究发现2020年~2029年65岁及以上的常住人口数的增幅大于另两个年龄段的常住人口数增幅之和, 且总抚养比持续上升, 单位劳动年龄人口需负担的非劳动年龄人口不断增加, 适龄劳动人数占总常住人口的比例逐年下降, 人口中适龄劳动资源匮乏, 我国的人口红利优势即将消失。同时, 养老金赤字日益加剧, 为缓解这些问题, 实施延迟退休政策迫在眉睫。除此之外, 本文建立差分方程模型, 求解出实施延迟退休政策后我国保险公司每月投资收益率下限。

## 关键词

人口老龄化, 延迟退休, 灰色预测模型, 年龄结构, 总抚养比, 适龄劳动资源, 人口红利, 养老金赤字, 差分方程模型, 投资收益率下限

## Researching the Necessity of Delayed Retirement Policy Based on Grey Model

Xinyu Chen, Yao Wang, Andi Wang, Tianyuan Wang

College of Science of Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Feb. 23<sup>rd</sup>, 2022; accepted: Mar. 21<sup>st</sup>, 2022; published: Mar. 28<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

With the development of society, the social problems caused by the accelerated aging of population are increasingly prominent. Therefore, in order to alleviate the negative impact of population aging, the implementation of delayed retirement policy is an inevitable choice. Based on the statistical data from 2010 to 2019, this paper established GM (1, 1) grey models to predict the population of all ages from 2020 to 2029. Study found that the growth of resident population aged 65

and above 65, in 2020~2029, is greater than the sum of the other two ages resident population growth. The total dependency ratio continues to rise at the same time. The non-working age population that unit working population needs to burden is increasing. The proportion of the working-age population in the total permanent population is decreasing year by year, and working-age resources are scarce among the population. Therefore, Chinese demographic dividend advantage will soon disappear. At the same time, the pension deficit is increasing. In order to alleviate these problems, it is urgent to implement the delayed retirement policy. In addition, this paper establishes a difference equation model to solve the lower limit of monthly investment return rate of Chinese insurance companies after the implementation of delayed retirement policy.

## Keywords

Population Aging, Delaying Retirement, GM (1, 1) Grey Models, Age Structure, Total Dependency Ratio, Working-Age Resources, Demographic Dividend, Pension Deficit, Difference Equation Model, Lower Limit of Monthly Investment Return Rate

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 研究现状综述

从中国知网数据库查找延迟退休的必要性研究成果, 主要包括: 分析延迟退休政策可能造成的积极影响和消极影响, 分析人口老龄化背景下延迟退休对国民经济的影响, 得出有差别的退休政策有助于我国的经济的发展[1]。运用模糊点回归的方法, 对不同的人群进行异质性分析, 分析延迟退休政策对健康的影响[2]。从我国就业市场现状角度, 分析延迟退休政策为我国就业市场带来的机遇和挑战[3]。

本文基于 2010 年~2019 年的统计数据, 建立 GM (1, 1) 灰色预测模型对 2020 年~2029 年各个年龄段的人口、我国的基本养老金收支情况进行预测。根据预测出的数据, 从我国人口的年龄结构、总抚养比、人口红利、养老金缺口方面分析研究延迟退休政策的必要性, 并建立差分方程模型求解我国保险公司每月投资收益率下限。

## 2. 延迟退休的必要性

### 2.1. 基于灰色预测模型预测 2020 年~2029 年我国各个年龄段人口数量

本文搜集 2010 年~2019 年我国各个年龄段的人口数量, 以 65 岁及以上的常住人口数量为例。

首先, 需要对数据进行检验和处理, 已知 2010 年~2019 年 65 岁及以上的常住人口数量:

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(2010), x^{(0)}(2011), \dots, x^{(0)}(2019)) \quad (1)$$

计算 2010 年~2019 年 65 岁及以上的常住人口数量序列的级比:

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, k = 2011, 2012, \dots, 2019 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda(2011), \lambda(2012), \dots, \lambda(2019)) \\ &= \lambda(0.9688, 0.9609, 0.9634, 0.9540, 0.9572, 0.9659, 0.9421, 0.9544, 0.9413) \end{aligned} \quad (3)$$

计算得:

$$\lambda(k) \in [0.9413, 0.9688] \quad (4)$$

由于所有级比  $\lambda(k)$  都落在  $\mathcal{G} = \left( e^{-\frac{2}{11}}, e^{\frac{2}{12}} \right)$  内, 序列  $x^{(0)}$  可以进行灰色预测。

经过 1 次累加生成序列:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x^{(1)}(2010), x^{(1)}(2011), \dots, x^{(1)}(2019)) \\ &= (x^{(0)}(2010), x^{(0)}(2010) + x^{(0)}(2011), \dots, x^{(0)}(2010) + \dots + x^{(0)}(2019)) \end{aligned} \quad (5)$$

式中:

$$x^{(0)}(k) = \sum_{i=2010}^k x^{(0)}(i), k = 2010, 2011, \dots, 2019 \quad (6)$$

$x^{(1)}$  的均值生成序列:

$$z^{(1)} = (z^{(1)}(2011), z^{(1)}(2012), \dots, z^{(1)}(2019)) \quad (7)$$

式中:

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1), k = 2011, 2012, \dots, 2019 \quad (8)$$

建立灰微分方程:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, k = 2011, 2012, \dots, 2019 \quad (9)$$

相应的白化微分方程为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (10)$$

记:

$$\begin{aligned} u &= [a, b]^T, Y = [x^{(0)}(2011), x^{(0)}(2012), \dots, x^{(0)}(2019)]^T \\ B &= \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2011) & 1 \\ -z^{(1)}(2012) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(2019) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

则由最小二乘法, 求得使  $J(u) = (Y - Bu)^T (Y - Bu)$  达到最小值的  $u$  的估计值为

$$\hat{u} = [\hat{a}, \hat{b}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y = [-0.0461817, 11296.69383]^T \quad (12)$$

求解式(10), 得:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left( x^{(0)}(2010) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}(k-2009)} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \quad (13)$$

求解预测值  $\hat{x}^{(1)}(k+1)$  以及模型还原值  $\hat{x}^{(0)}(k+1)$ , 令  $k = 2010, 2011, \dots, 2018$ , 由式(13)计算得  $\hat{x}^{(1)}$ , 取  $\hat{x}^{(1)}(1) = \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) = 11893.87$ 。

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), k = 2010, 2011, \dots, 2018 \quad (14)$$

得:

$$\hat{x}^{(0)} = (\hat{x}^{(0)}(2010), \hat{x}^{(0)}(2011), \dots, \hat{x}^{(0)}(2019)) \quad (15)$$

检验模型的准确性:

结果的检验值计算结果如下表 1 所示:

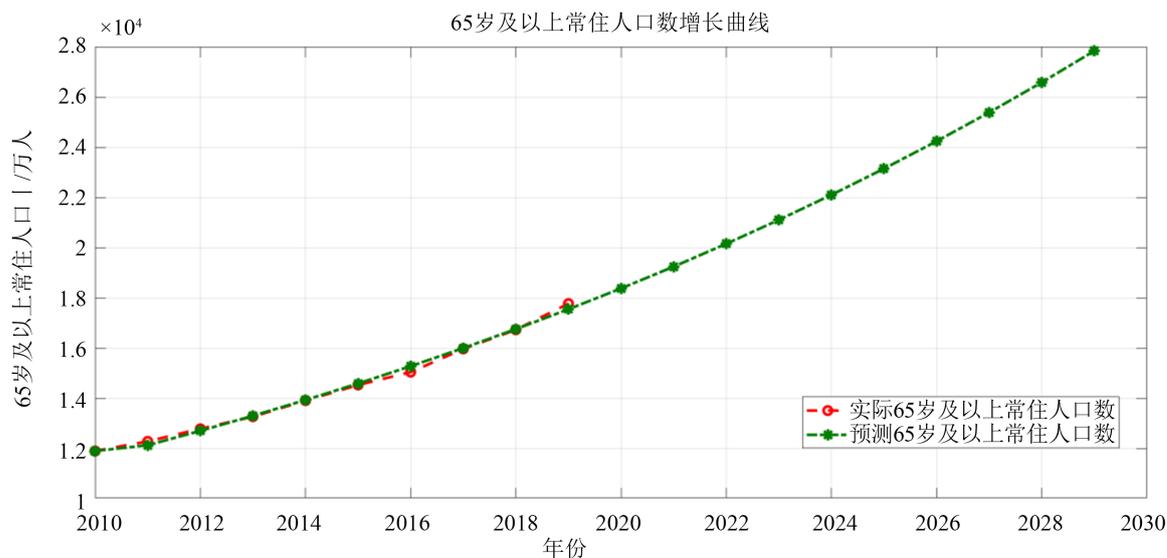
**Table 1.** Test table of grey prediction model

**表 1.** 灰色预测模型的检验表

年份	原始值	预测值	残差	相对误差	级别偏差
2010	11893.87	11893.87	0	0	
2011	12277	12123.76638	153.2336226	0.012481357	-0.014590882
2012	12777	12696.79234	80.20765854	0.006277503	-0.006290527
2013	13262	13296.9022	-34.90219558	0.002631745	-0.008973813
2014	13902	13925.37605	-23.37605119	0.001681488	0.000939559
2015	14524	14583.55452	-59.55452382	0.004100422	-0.002423103
2016	15037	15272.84159	-235.8415927	0.015684085	-0.011544665
2017	15961	15994.7076	-33.70759588	0.002111872	0.013354532
2018	16724	16750.69237	-26.69236619	0.001596052	0.000506528
2019	17767	17542.40852	224.5914836	0.012640935	0.014206206

经验证, 该模型精度较高, 可以进行预测。

预测出 2020 年~2029 年 65 岁及以上的常住人口数量, 绘制 65 岁及以上常住人口增长曲线如图 1 所示:



**Figure 1.** Growth curve of resident population aged 65 and above

**图 1.** 65 岁及以上常住人口增长曲线

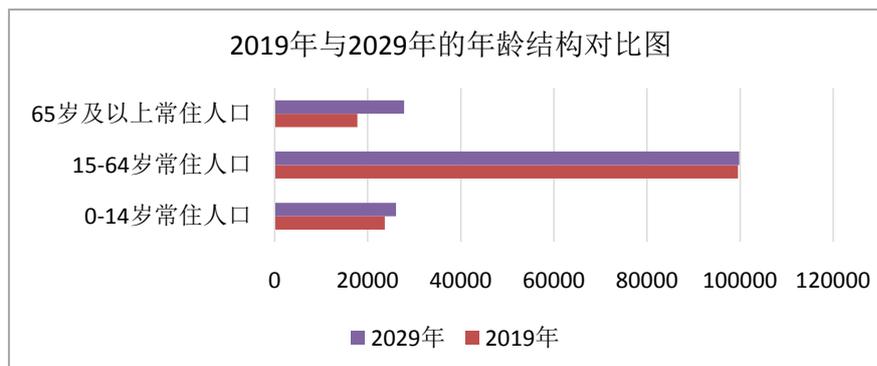
同理，可预测出 2020 年~2029 年各个年龄段的常住人口数据，如表 2 所示：

**Table 2.** Resident population data by age group  
**表 2.** 各个年龄段的常住人口数据

年份	0~14 岁 常住人口 预测值	15~49 岁 常住人口 预测值	50~59 岁 常住人口 预测值	60~64 岁 常住人口 预测值	65 岁及以上 常住人口 预测值
2020	24038	69646	21871	8568	18372
2021	24255	68490	22703	8822	19240
2022	24475	67303	23568	9082	20149
2023	24697	66084	24465	9351	21102
2024	24920	64833	25396	9627	22099
2025	25146	63547	26363	9912	23143
2026	25374	62225	27367	10205	24237
2027	25604	60867	28409	10507	25383
2028	25836	59469	29491	10817	26583
2029	26070	58032	30614	11137	27839

## 2.2. 从年龄结构角度分析延迟退休的必要性

根据预测出的数据，绘制 2029 年我国人口的年龄结构图，如图 2 所示：



**Figure 2.** Comparison of age structure between 2019 and 2029

**图 2.** 2019 年与 2029 年的年龄结构对比图

由图 2 可以看出从 2019 年到 2029 年，各年龄段的常住人口数虽然持续增加，但 65 岁及以上的常住人口数的增幅大于另两个年龄段的常住人口数增幅之和。该现象说明未来我国将加速进入老龄化社会，而人口老龄化会对经济产生消极影响，因此，为了缓解人口老龄化带来的消极影响，迟延迟迟退休政策势在必得。

## 2.3. 从总抚养比角度分析延迟退休的必要性

由经验公式得：人口总抚养比 = 总体人口中非劳动年龄人口数 ÷ 劳动年龄人口数，即：总抚养比 = (0~14 岁常住人口数量 + 65 岁及以上常住人口数量) ÷ (15~64 岁常住人口数量)。

根据预测出的数据，计算出 2020~2029 年我国的人口总抚养比，如表 3 所示：

**Table 3.** Forecast of China's total dependency ratio from 2020 to 2029

**表 3.** 2020~2029 年我国的人口总抚养比预测表

年份	总抚养比
2020	0.423734176
2021	0.434890265
2022	0.446453826
2023	0.458441214
2024	0.470869378
2025	0.483755886
2026	0.497118932
2027	0.510977351
2028	0.525350641
2029	0.540258968

由表 3 分得出：从 2020 至 2029 年，我国的人口总抚养比在不断增加，这意味着每 100 名劳动年龄人口需要负担的非劳动年龄人口在不断增加，为了缓解劳动年龄人口的负担，延迟退休政策需提上日程。

#### 2.4. 从人口红利角度分析延迟退休的必要性

经济学家将由于人口中适龄劳动力资源相对丰富形成的对经济发展十分有利的“黄金时期”称为人口红利。因此，本文从人口红利角度研究延迟退休政策的必要性时，选取适龄劳动力占总人口的比例作为本文的研究对象。

根据预测出的数据，计算出 2020~2029 年我国适龄劳动力占总人口的比例，如表 4 所示：

**Table 4.** Proportion of the working-age population in China

**表 4.** 我国适龄劳动力占总人口的比例表

年份	适龄劳动人口占总人口的比例
2020	0.702378307
2021	0.696917405
2022	0.691345954
2023	0.685663564
2024	0.679870024
2025	0.673965313
2026	0.667949606
2027	0.661823289
2028	0.655586967
2029	0.649241472

由表 4 分得出：从 2020 至 2029 年，我国适龄劳动力占总人口的比例逐年下降，适龄劳动力资源不断减少，人口红利时期会逐渐消失，为了延长人口红利对经济的促进作用，实行延迟退休政策，维持较高的适龄劳动力占总人口的比例。

## 2.5. 从养老金缺口角度分析延迟退休的必要性

本文搜集 2010 年~2019 年我国基本养老保险基金收入、支出数据，以基本养老金收入为例，对数据进行检验和处理，已知 2010 年~2019 年我国基本养老金收入：

$$y^{(0)} = (y^{(0)}(2010), y^{(0)}(2011), \dots, y^{(0)}(2019)) \quad (16)$$

计算 2010 年~2019 年我国基本养老金收入序列的级比：

$$\varphi(k) = \frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)}, k = 2011, 2012, \dots, 2019 \quad (17)$$

计算得：

$$\varphi(k) \in [0.8381, 0.9808] \quad (18)$$

由于所有级比  $\varphi(k)$  都落在  $\theta = \left( e^{-\frac{2}{11}}, e^{\frac{2}{12}} \right)$  内，建立 GM(1,1) 灰色预测模型，得到预测值：

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \left( y^{(0)}(2010) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}(k-2009)} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, k = 2010, 2011, \dots, 2018 \quad (19)$$

$$\hat{y}^{(0)}(k+1) = \hat{y}^{(1)}(k+1) - \hat{y}^{(1)}(k)$$

预测出 2020 年~2029 年我国基本养老保险基金收入，同理，预测出 2020 年~2029 年我国基本养老保险基金支出数据，如下表 5 所示：

**Table 5.** Income and expenditure data of China's basic endowment insurance fund from 2020 to 2029

**表 5.** 2020 年~2029 年我国基本养老保险基金收入、支出数据

年份	基金收入预测值	基金支出预测值
2020	68523	64007
2021	79247	75464
2022	91650	88973
2023	105993	104900
2024	122582	123677
2025	141766	145817
2026	163953	171919
2027	189613	202693
2028	219288	238977
2029	253608	281755

根据预测得出的数据，绘制未实施延迟退休政策的养老金收入、支出预测图，如图 3 所示：



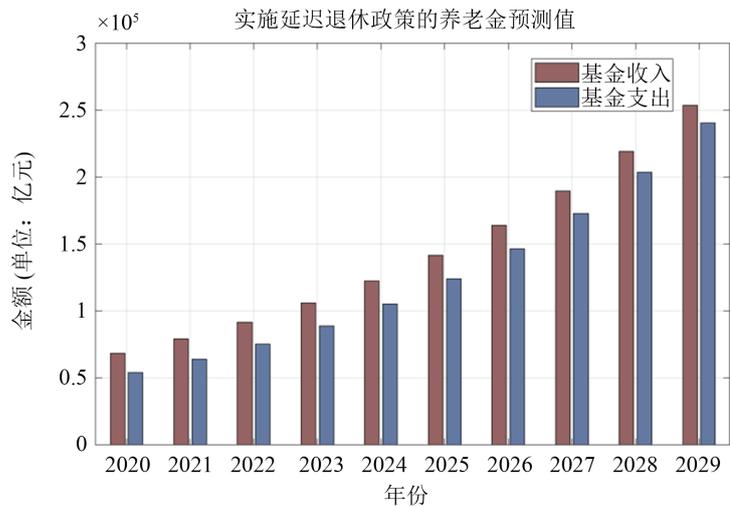
**Figure 3.** Forecast of pension income and expenditure without delayed retirement policy

**图 3.** 未实施延迟退休政策的养老金收入、支出预测图

由图 3 分析可知：2020 年~2029 年我国基本养老保险基金收入逐渐少于基金支出，出现养老金赤字现象，且养老金缺口越来越大。

研究实施延迟退休政策对养老金的影响时，本文选取 2020 年~2029 年 50~54 岁的女性常住人口、60~64 岁的男性常住人口作为受延迟退休政策影响的主要人群。

由于实行延迟退休政策，该人群继续工作，国家不向该群体提供养老金方面的支出，同时该群体亦不用上缴养老保险，即对国家养老金收入没有贡献，预测出 2020 年~2029 年我国实施延迟退休政策后养老金收入、支出，如下图 4 所示：



**Figure 4.** Forecast of pension income and expenditure with delayed retirement policy

**图 4.** 实施延迟退休政策的养老金收入、支出预测图

由图 4 可知：实施延迟退休政策后，2020 年~2029 年我国将不再出现养老金赤字现象。我国基本养老金支出相较未实施延迟退休政策时的支出有了大幅度的减少，如图 5 所示：

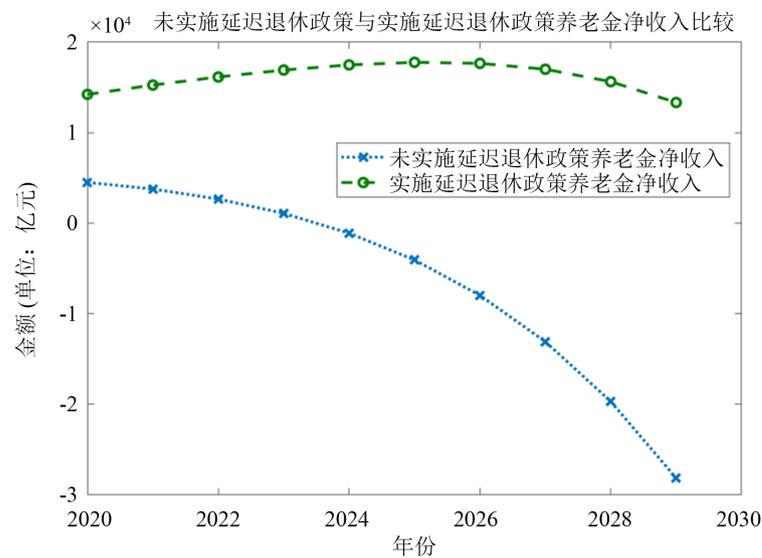


Figure 5. Comparison of net pension income with and without delayed retirement policy

图 5. 实施延迟退休政策与未实施延迟退休政策的养老金净收入比较图

## 2.6. 基于差分方程给出关于我国养老保险公司投资收益率的建议

研究发现实施延迟退休政策是势在必得的。因此，本文建立差分方程模型，研究实施延迟退休后，若每月缴费 400 元至 64 岁年底，65 岁退休后开始领取养老金，寿命为 75 岁的男子从 25 岁开始投保，退休后月养老金 3000 元，我国保险公司每月至少应有的投资收益率，给出合理建议。

设  $r$  为养老基金的投资收益率，未退休常住人口每月缴费  $p$  元，退休的常住人口每月领  $q$  元，未退休的常住人口需缴  $n$  个月养老保险，退休的常住人口在死亡时领取养老金的月数为  $m$ ，未退休的投保人在缴费后第  $k$  个月所交的养老保险及收益的累积总额为  $F_k$ ，建立分段表示的差分方程模型：

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k(1+r) + p, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ F_{k+1} &= F_k(1+r) - q, k = n, n+1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (20)$$

可推出差分方程的解为：

$$\begin{aligned} F_0 &= F_m = 0 \\ F_k &= \left[ (1+r)^k - 1 \right] \frac{p}{r}, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ F_k &= \frac{q}{r} \left[ 1 - (1+r)^{k-m} \right], k = n, n+1, \dots, m \end{aligned} \quad (21)$$

求得：

$$\begin{aligned} F_n &= \left[ (1+r)^n - 1 \right] \frac{p}{r} \\ F_{n+1} &= \frac{q}{r} \left[ 1 - (1+r)^{n+1-m} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

由于  $F_{n+1} = F_n(1+r) - q$ ，整理可得：

$$\frac{q}{r} \left[ 1 - (1+r)^{n+1-m} \right] = \left[ (1+r)^n - 1 \right] \frac{p}{r} (1+r) - q \quad (23)$$

化简得:

$$(1+r)^m - \left(1 + \frac{q}{p}\right)(1+r)^{m-n} + \frac{q}{p} = 0 \quad (24)$$

将  $p = 400, q = 3000, n = 480, m = 600$  带入方程, 求得收益率  $r = 0.20\%$ 。

即我国保险公司为了兑现保险责任, 每月至少应有 0.20% 的投资收益率。

### 3. 总结

本文通过建立 GM (1, 1) 灰色预测模型, 根据 2010 年~2019 年我国各年龄段的常住人口数量、养老金收支情况, 预测出 2020 年~2029 年我国各年龄段的常住人口数量、养老金收支情况。从年龄结构、总抚养比、人口红利角度来看, 从 2020 年到 2029 年 65 岁及以上的常住人口数的增幅大于另两个年龄段的常住人口数增幅之和, 总抚养比持续上升, 单位劳动年龄人口需负担的非劳动年龄人口不断增加, 适龄劳动人数占总常住人口的比例逐年下降, 人口中适龄劳动资源匮乏, 我国的人口红利优势即将消失。从我国基本养老基金的收支情况分析, 养老金赤字日益加剧, 而实施延迟退休政策可以有效缓解这些问题, 因此, 实施延迟退休政策迫在眉睫。除此之外, 本文建立差分方程模型, 求解出投资收益率的函数表达式, 分析得出我国保险公司每月至少应有 0.20% 的投资收益率。

### 基金项目

基金编号: Z202110143110。

### 参考文献

- [1] 宗艳红. 人口老龄化背景下延迟退休对国民经济的影响[J]. 经济管理文摘, 2021(24): 108-109.
- [2] 王娜. 退休对健康的影响机制研究[D]: [博士学位论文]. 泉州: 华侨大学, 2021.
- [3] 杨孟霞. “延迟退休”对我国就业市场的影响分析[J]. 时代金融(上旬), 2022(1): 91-92+95.