

四阶定常 Bi-Wave 奇异摄动问题的协调 Galerkin 有限元拟一致超收敛分析

吴颜昧¹, 石东洋²

¹信息工程大学, 河南 郑州

²郑州大学, 数学与统计学院, 河南 郑州

收稿日期: 2022年2月28日; 录用日期: 2022年3月22日; 发布日期: 2022年3月29日

摘要

在本文中, 我们利用协调 Galerkin 有限元方法求解模拟高温超导体 d 波现象的四阶定常 Bi-wave 奇异摄动问题。首先, 分析其线性问题的变分格式下解的有界性; 其次, 利用 Brouwer 不动点定理证明非线性 Bi-wave 问题逼近解的存在唯一性; 进而, 基于 Bogner-Fox-Schmit 单元的高精度性质, 得到在能量模意义下不依赖于参数负次幂的拟一致超逼近和超收敛误差估计; 最后, 我们通过相应的数值算例验证理论分析的正确性。

关键词

Bi-Wave 问题, Bogner-Fox-Schmit 元, 解的存在唯一性, 拟一致超逼近和超收敛性

Quasi-Uniform Superconvergence Analysis of Conforming Galerkin Finite Element Method for the Fourth Order Stationary Bi-Wave Singular Perturbation Problem

Yanmi Wu¹, Dongyang Shi²

¹Information Engineering University, Zhengzhou Henan

²School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou Henan

Received: Feb. 28th, 2022; accepted: Mar. 22nd, 2022; published: Mar. 29th, 2022

Abstract

In this paper, the conforming Galerkin finite element method is presented to solve the fourth order stationary Bi-wave singular perturbation problem simulating high temperature superconductor d wave phenomenon. Firstly, the boundedness of the solution under the variational scheme of its linear problem is analyzed; Secondly, the existence and uniqueness of the approximate solution for the nonlinear Bi-wave problem are proved by using Brouwer fixed point theorem; Furthermore, based on the high accuracy property of Bogner-Fox-Schmit element, quasi-uniform superconvergence and superclose error estimates independent of the negative power of the parameter in the energy norm are obtained; Finally, the corresponding numerical examples are provided to verify the correctness of the theoretical analysis.

Keywords

Bi-Wave Problem, Bogner-Fox-Schmit Element, Existence and Uniqueness of the Solution, Quasi-Uniform Superclose and Superconvergence

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在研究高温超导体现象的实验中 [1], 研究学者已经有力证明了电子在形如四叶草的轨道上运动时, 实现了 d 波配对对称性 [2, 3]。最近, 用来模拟高温超导性质的 Ginzburg-Landau-type 模型以及其各种推广形式被建立起来 [4-6]。在 Ginzburg-Landau-type 模型中, 有两个标量序参数 ψ_s 和 ψ_d , 其量级代表超导荷载密度。其中参数 $\delta = -\frac{1}{\beta}$, β 与比率 $\frac{\ln(T_{s0}/T)}{\ln(T_{d0}/T)}$ 有关, T_{s0} 和 T_{d0} 是 s 波和 d 波分量的临界温度。特别地, [5] 表明, 当 $T \rightarrow T_{d0}$ ($T_{s0} < T_{d0}$) 时, 超导现象将完全只是 d 波状态; [6] 也指出, 当 $\beta \rightarrow -\infty$ 时, s 波分量逐渐消失, d 波分量成为主导项。考虑 $\beta \rightarrow -\infty$ 这种

极限情况, [7] 根据 Ginzburg-Landau-type 模型得到如下四阶定常 Bi-wave 奇异摄动问题:

$$\begin{cases} \delta\theta^2\psi - \Delta\psi + f(\psi) = g, & X \in \Omega, \\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = 0, & X \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $X = (x, y)$, θ 是双波算子,

$$\theta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \quad \theta^2\psi = \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}, \quad \bar{n} = (n_1, -n_2), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = \nabla\psi \cdot \bar{n}.$$

$\Omega \subset R^2$ 是具有分段光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $n = (n_1, n_2)$ 表示 $\partial\Omega$ 上的外法向量。其中对于超导体 d 波现象, δ 预计会很小, 且 $0 < \delta \ll 1$ 。[8] 给出了 $f(\psi)$ 的两种非线性类型: 类型(I): $f(\psi) = \lambda_1\psi^k$ ($\lambda_1 > 0, k > 0$); 类型(II): $f(\psi) = \lambda_2 e^\psi$ ($\lambda_2 > 0$)。可见, $f(\psi)$ 是一个单调递增函数。

高温超导体在材料工程中有着极其重要的应用, 而作为研究该材料状态的重要数学模型之一的 Bi-wave 方程, 关于它的理论分析和数值模拟方面的研究工作陆陆续续被提出来。例如, [8] 利用傅立叶分析的方法证明了问题 (1.1) 精确解的存在性。[7] 和 [9] 分别利用协调 Galerkin 有限元方法和改进的 Morley 型间断有限元方法, 得到了相应范数意义下的最优误差估计。[10] 和 [11] 分别基于协调元和非协调元的混合有限元方法, 推导出了该混合元格式下不依赖于参数负次幂的拟一致超收敛结果。[12] 和 [13] 采用非协调 Galerkin 有限元方法, 分别构造了加罚有限元逼近格式和修正加罚有限元逼近格式, 均证明了在能量范数意义下的拟一致收敛性质。然而, 在现有的文献中, 还没有关于问题(1.1) 的协调 Galerkin 有限元方法的拟一致超逼近和超收敛性质的研究。

在本文中, 我们先给出问题 (1.1) 的线性方程弱解的有界性。基于这一结论, 我们利用 Brouwer 不动点定理证明了问题 (1.1) 逼近格式下解的适定性, 并借助于 Bogner-Fox-Schmit 单元的高精度性质, 得到了其在能量范数下不依赖于参数负次幂的拟一致超逼近和超收敛误差估计。最后, 我们给出两个数值实验来验证理论分析是否正确。

2. 预备知识

首先, 我们引进如下的概念:

$$V = \{\omega \in H_0^1(\Omega), \theta\omega \in L^2(\Omega), \frac{\partial\omega}{\partial\bar{n}}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

我们先考虑下面的线性 Bi-wave 方程:

$$\begin{cases} \delta\theta^2\psi - \Delta\psi = g, & X \in \Omega, \\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = 0, & X \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

问题 (2.1) 的弱形式为: 求解 $\psi(X) \in V$, 满足

$$\delta(\theta\psi, \theta\varphi) + (\nabla\psi, \nabla\varphi) = (g, \varphi), \quad \forall \varphi \in V. \quad (2.2)$$

在 V 上定义一个能量模:

$$\|v\|_V = \sqrt{\delta(\theta v, \theta v) + (\nabla v, \nabla v)}.$$

为了方便证明非线性 Bi-wave 问题解的存在唯一性, 我们需要先给出线性问题 (2.1) 解的有界性 [7].

定理2.1. 假设 $u_0 \in V$, 有

$$\|\psi\|_V \leq C\|g\|_0, \tag{2.3}$$

$$\sqrt{\delta}\|\nabla\theta\psi\|_0 + \|\Delta\psi\|_0 \leq C\|g\|_0. \tag{2.4}$$

其中, 在这里及后续部分中, C 是一个与 h 无关且与 δ 的负次幂无关的正常数, 而且在不同的位置代表的值可能不同.

3. Bogner-Fox-Schmit 单元和逼近格式解的适定性

假设 \mathcal{T}_h 是 Ω 上的一个正则矩形剖分, 网格尺寸为 h . 对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$, 分别定义它的四个顶点和四条边为 a_i 和 $l_i = \overline{a_i a_{i+1}} i = 1 \sim 4(mod 4)$. 则定义 Bogner-Fox-Schmit 有限元空间 V_{h0} 为:

$$V_{h0} = \{\omega_h \in H^2(\Omega); \omega_h|_K \in Q_3(K), \forall K \in \Gamma_h, \omega_h|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_h}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

其中 Q_3 是双三次多项式空间.

在 V_{h0} 上定义相应的插值算子 $I_h|_K = I_K$, 满足

$$\begin{aligned} \psi(a_i) &= I_h\psi(a_i), \quad \psi_x(a_i) = I_h\psi_x(a_i), \\ \psi_y(a_i) &= I_h\psi_y(a_i), \quad \psi_{xy}(a_i) = I_h\psi_{xy}(a_i), \\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

为了后续的拟一致超收敛误差分析, 我们给出如下的高精度结论 [14]. 若 $\varphi \in H^6(\Omega)$, 有

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2(\varphi - I_h\varphi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} dX = \int_{\Omega} \frac{\partial^2(\varphi - I_h\varphi)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} dX = O(h^4)\|\varphi\|_6\|v_h\|_2, \quad \forall v_h \in V_{h0}. \tag{3.1}$$

问题 (1.1) 的变分形式为: 求解 $\psi \in V$, 满足

$$\delta(\theta\psi, \theta\nu) + (\nabla\psi, \nabla\nu) + (f(\psi), \nu) = (g, \nu), \quad \forall \nu \in V. \tag{3.2}$$

问题 (3.2) 的逼近格式为: 求解 $\psi_h \in V_{h0}$, 满足

$$\begin{cases} \delta(\theta\psi_h, \theta\nu_h) + (\nabla\psi_h, \nabla\nu_h) + (f(\psi_h), \nu_h) = (g, \nu_h), \quad \forall \nu_h \in V_{h0}, \\ \psi_h = I_h\psi_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

接下来我们将利用 Brouwer 不动点定理来分析问题 (3.3) 解的存在唯一性 [15].

定理3.1. 问题 (3.3) 有唯一解, 且对于类型(I) 的 $k = \frac{2n+1}{2m+1} (m, n \in \mathbb{N})$, 满足

$$\|\psi_h\|_V \leq C\|g\|_0. \tag{3.4}$$

证明. 首先, 我们证明问题 (3.3) 解的存在性. 事实上, 由 (3.2) 和 (3.3), 我们有

$$\delta(\theta(\psi - \psi_h), \theta\nu_h) + (\nabla(\psi - \psi_h), \nabla\nu_h) + (f(\psi) - f(\psi_h), \nu_h) = 0, \forall \nu_h \in V_{h0}. \tag{3.5}$$

利用泰勒展开, 可知

$$f(\psi_h) = f(\psi) + f'(\psi)(\psi_h - \psi) + \frac{1}{2}f''(\mu)(\psi - \psi_h)^2,$$

其中 $\mu = \psi + \epsilon(\psi_h - \psi)$, $0 \leq \epsilon \leq 1$.

取 $R_f(\psi - \psi_h) = \frac{1}{2}f''(\mu)(\psi - \psi_h)^2$, 对于 $\nu_h \in V_{h0}$, 我们可以将 (3.5) 重新写成:

$$\delta(\theta(\psi - \psi_h), \theta\nu_h) + (\nabla(\psi - \psi_h), \nabla\nu_h) + (f'(\psi)(\psi - \psi_h), \nu_h) - (R_f(\psi - \psi_h), \nu_h) = 0. \tag{3.6}$$

为了研究 (3.6), 我们考虑下面的对偶问题: 求解 $\tilde{\psi}_h \in V_{h0}$, 满足

$$\delta(\theta(\psi - \tilde{\psi}_h), \theta\nu_h) + (\nabla(\psi - \tilde{\psi}_h), \nabla\nu_h) + (f'(\psi)(\psi - \tilde{\psi}_h), \nu_h) = 0. \tag{3.7}$$

令 $\psi - \tilde{\psi}_h = (\psi - I_h\psi) + (I_h\psi - \tilde{\psi}_h) := \eta_1 + \xi_1$, 我们取 $\nu_h = \xi_1 \in V_{h0}$, 可得

$$\|\xi_1\|_W^2 + (f'(\psi)(I_h\psi - \tilde{\psi}_h), \xi_1) = -\delta(\theta\eta_1, \theta\xi_1) + (\nabla\eta_1, \nabla\xi_1) - (f'(\psi)(\psi - I_h\psi), \xi_1).$$

注意到 $f'(\psi) = \lambda_1 k \psi^{k-1} \geq 0$ ($\lambda_1 > 0, k > 0$) 或者 $f'(\psi) = \lambda_2 e^\psi > 0$ ($\lambda_2 > 0$), 有

$$(f'(\psi)(I_h\psi - \tilde{\psi}_h), I_h\psi - \tilde{\psi}_h) \geq 0.$$

结合 (2.3)-(2.4) 式, 有

$$\|\xi_1\|_V^2 \leq C\delta h^4 \|\psi\|_6 \|\xi_1\|_2 + Ch^3 \|\psi\|_4 \|\nabla\xi_1\|_0 + Ch^4 \|\psi\|_4 \|\xi_1\|_0.$$

利用逆不等式和 Friedrichs 不等式, 可得

$$\|\xi_1\|_V^2 \leq C\delta h^3 \|\psi\|_6 \|\nabla\xi_1\|_0 + Ch^3 \|\psi\|_4 \|\nabla\xi_1\|_0 + Ch^4 \|\psi\|_4 \|\xi_1\|_0,$$

进而, 有

$$\|\xi_1\|_V \leq Ch^3 (\sqrt{\delta} \|\psi\|_6 + \|\psi\|_4).$$

因此, 当 $\psi \in H^6(\Omega)$, 我们有

$$\|\psi - \tilde{\psi}_h\|_V \leq C_0(\psi)(\sqrt{\delta} + 1)h^3, \tag{3.8}$$

其中, $C_0(\psi)$ 是一个与 h 和 δ 无关, 但依赖于 ψ 的正常数。

对于 $\alpha_h \in V_{h0}$, 我们定义映射 $S_h : V_{h0} \rightarrow V_{h0}$ 且 $S_h(\alpha_h) = \psi_l$, 满足

$$\delta(\theta(\psi - \psi_l), \theta\nu_h) + (\nabla(\psi - \psi_l), \nabla\nu_h) + (f'(\psi)(\psi - \psi_l), \nu_h) - (R_f(\psi - \alpha_h), \nu_h) = 0. \tag{3.9}$$

令 $\psi - \psi_l = (\psi - \tilde{\psi}_h) + (\tilde{\psi}_h - \psi_l) := \eta_2 + \xi_2$ 。结合 (3.7), 我们取 $\nu_h = \xi_2 \in V_{h0}$, 可得

$$\|\xi_2\|_V^2 + (f'(\psi)(\tilde{\psi}_h - \psi_l), \xi_2) = (R_f(\psi - \alpha_h), \xi_2).$$

下面, 我们需要证明映射 S_h 有一个定点, 即 S_h 将一个圆 $O_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi}_h)$ 映射到它自身, 且

$$O_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi}_h) = \{\alpha_h \in V_{h0} : \|\alpha_h - \tilde{\psi}_h\|_V \leq \tilde{\gamma}\}. \tag{3.10}$$

由 (3.8), 可知

$$\|\psi - \alpha_h\|_{0,4} \leq C(\|\psi - \tilde{\psi}_h\|_V + \|\tilde{\psi}_h - \alpha_h\|_V) \leq (C_0(\psi)(\sqrt{\delta} + 1)h^3 + \tilde{\gamma}). \tag{3.11}$$

利用 (3.11), 我们有

$$\begin{aligned} & |(R_f(\psi - \alpha_h), \xi_2)| \\ & \leq \|\frac{1}{2}f''(\psi + \epsilon(\alpha_h - \psi))\|_{0,4}\|\psi - \alpha_h\|_{0,4}^2\|\xi_2\|_{0,4} \leq (C_0(\psi)(\sqrt{\delta} + 1)h^3 + \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}^2\|\xi_2\|_V. \end{aligned}$$

类似地, 根据

$$(f'(\psi)(\tilde{\psi}_h - \psi_l), \tilde{\psi}_h - \psi_l) \geq 0,$$

有

$$\|\xi_2\|_V \leq (C_0(\psi)(\sqrt{\delta} + 1)h^3 + \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}^2.$$

进而, 可得

$$\|\alpha_h - \tilde{\psi}_h\|_V \leq \|\psi_l - \tilde{\psi}_h\|_V \leq C_1(\psi)((\sqrt{\delta} + 1)h^3 + \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}^2.$$

其中, $C_1(\psi)$ 是一个与 h 和 δ 无关, 但依赖于 $C_0(\psi)$ 的正常数。

因此, 令 $h \leq (C_1(\psi))^{-2}$, 选取 $\tilde{\gamma} = C_1(\psi)h$, 有

$$\|\alpha_h - \tilde{\psi}_h\|_V \leq \tilde{\gamma}.$$

即, 对于充分小的网格尺寸 h , S_h 将以 $\tilde{\psi}_h$ 为球心, $\tilde{\gamma} = O(h) > 0$ 为半径的圆映射到自身中。

接下来, 我们将通过证明 S_h 是圆 $O_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi}_h)$ 中的一个压缩映射来证明问题 (3.3) 解的唯一性。事实上, 令 ψ_1 和 ψ_2 是问题 (3.3) 两个不同的解, 有

$$\|\psi_i - \tilde{\psi}_h\|_V \leq C_2(\psi)((\sqrt{\delta} + 1)h^3 + \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}^2, \quad i = 1, 2,$$

其中 $C_2(\psi)$ 是一个与 h 和 δ 无关, 但依赖于 ψ_1 和 ψ_2 的正常数。

对于任意 $\nu_h \in V_{h0}$ 和 $\alpha_1, \alpha_2 \in O_{\tilde{\gamma}_1}(\tilde{\psi}_h)$, 我们有

$$\delta(\theta(\psi_1 - \psi_2), \theta\nu_h) + (\nabla(\psi_1 - \psi_2), \nabla\nu_h) + (f'(\psi)(\psi_1 - \psi_2), \nu_h) - (R_f(\psi - \alpha_1) - R_f(\psi - \alpha_2), \nu_h) = 0.$$

类似之前的估计, 可得

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_V \leq C_2(\psi)((\sqrt{\delta} + 1)h^3 + \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}^2\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\delta,h}.$$

选取 $h \leq (C_2(\psi))^{-2}$ 和 $\tilde{\gamma} = C_2(\psi)h$, 有

$$\|S_h(\alpha_1) - S_h(\alpha_2)\|_V \leq ((\sqrt{\delta} + 1)h^2 + 1)h\|\alpha_1 - \alpha_2\|_V.$$

因此, 对于充分小的 h , S_h 是圆 $O_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi}_h)$ 上的压缩映射。

另一方面, 我们在问题 (3.3) 中取 $\nu_h = \psi_h \in V_{h0}$, 有

$$\|\psi_h\|_V^2 + (f(\psi_h), \psi_h) \leq \|g\|_0\|\psi_h\|_0.$$

注意到类型 (I) : $f(\psi) = \lambda_1\psi^k$ ($\lambda_1 > 0$), 当 $k = \frac{2n+1}{2m+1}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) 时, 可知

$$(f(\psi_h), \psi_h) \geq 0,$$

进而有

$$\|\psi_h\|_V \leq \|g\|_0.$$

证毕. □

4. 拟一致的超逼近和超收敛误差估计

现在我们推导拟一致的超逼近和超收敛误差估计。首先, 我们将下列的误差分裂为:

$$\psi - \psi_h = (\psi - I_h\psi) + (I_h\psi - \psi_h) \triangleq \eta_3 + \xi_3.$$

定理4.1. 令 ψ 和 ψ_h 分别是问题 (3.2) 和问题 (3.3) 的解。假设 $\psi \in H^6(\Omega)$, 我们有

$$\|I_h\psi - \psi_h\|_V \leq Ch^3(\sqrt{\delta}\|\psi\|_6 + \|\psi\|_4). \tag{4.1}$$

证明. 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得下面的误差方程:

$$\delta(\theta\xi_3, \theta\nu_h) + (\nabla\xi_3, \nabla\nu_h) + (f(I_h\psi) - f(\psi_h), \nu_h) = -\delta(\theta\eta_3, \theta\nu_h) - (\nabla\eta_3, \nabla\nu_h) - (f(\psi) - f(\psi_h), \nu_h).$$

取 $\nu_h = \xi_3 \in V_{h0}$, 利用 (3.1), 我们有

$$\|\xi_3\|_V^2 + (f(I_h\psi) - f(\psi_h), \xi_3) \leq C\delta h^4 \|\psi\|_6 \|\xi_3\|_2 + Ch^3 \|\psi\|_4 \|\nabla\xi_3\|_0 + Ch^4 \|\psi\|_4 \|\xi_3\|_0.$$

注意到

$$(f(I_h\psi) - f(\psi_h), \xi_3) \geq 0,$$

结合逆不等式和 Friedrichs 不等式, 可知

$$\|\xi_3\|_V^2 \leq C\delta h^3 \|\psi\|_6 \|\nabla\xi_3\|_0 + Ch^3 \|\psi\|_4 \|\nabla\xi_3\|_0 + Ch^4 \|\psi\|_4 \|\xi_3\|_0.$$

因此, 有

$$\|\xi_3\|_V \leq Ch^3(\sqrt{\delta}\|\psi\|_6 + \|\psi\|_4).$$

证毕. □

我们利用文献 [16] 中的插值后处理算子, 给出拟一致的整体超收敛误差估计。

定理4.2. 在定理 (4.1) 的条件下, 我们有

$$\|\psi - I_{2h}\psi_h\|_V \leq Ch^3(\sqrt{\delta}\|\psi\|_6 + \|\psi\|_4) \tag{4.2}$$

5. 数值实验

在本节中, 我们在区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 上给出下面两个数值算例。

Table 1. Numerical results of ψ for $\delta = 10 \sim 1.0$

表 1. 当 $\delta = 10 \sim 1.0$ 时, ψ 的数值结果

$\delta = 10$					$\delta = 1.0$				
$n \times n$	$\ \psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ I_h\psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ \psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ I_h\psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	
4×4	4.0076e-02	-	8.5735e-01	-	4.0135e-02	-	8.5655e-01	-	
8×8	8.2861e-03	2.2740	1.7137e-01	2.2693	8.3250e-03	1.9913	1.7136e-01	2.3215	
16×16	1.9219e-03	2.1082	2.1862e-02	2.9706	1.9247e-03	2.1128	2.1862e-02	2.9705	
32×32	4.7210e-04	2.0253	2.6581e-03	3.0399	4.7227e-04	2.0270	2.6581e-03	3.0399	

算例1. 我们取真解为 $\psi(x, y) = \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)$, 其中源函数项 g 可由该真解计算得到。

我们在表 1 ~ 3 中分别列出了不同参数 $\delta = 10^{-4} \sim 10$ 的误差估计值和收敛阶, 可以看到, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|\psi - \psi_h\|_V$ 是以 $O(h^2)$ 的最优速率收敛, $\|\psi_h - I_h\psi\|_V$ 是以 $O(h^3)$ 的速率收敛, 这与我们的理论分析是相符合。

算例2. 我们通过取源函数 $g = 1.0$ 来分析问题(1.1)。

考虑到精确解 ψ 是未知的, 当选择 $\delta = 10, 1, 10^{-2}$ 和 10^{-6} 时, 我们分别绘制在剖分 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}$ 下数值解 ψ_h 的图像如图 1 所示。正如所期望的, 随着 δ 值变得越来越小, 这些解的图像越来越像 [7] 中相应泊松问题解的图像。

Table 2. Numerical results of ψ for $\delta = 10^{-1} \sim 10^{-2}$

表 2. 当 $\delta = 10^{-1} \sim 10^{-2}$ 时, ψ 的数值结果

$\delta = 10^{-1}$					$\delta = 10^{-2}$				
$n \times n$	$\ \psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ I_h\psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ \psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ I_h\psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	
4×4	4.1256e-02	-	8.5648e-01	-	4.5366e-02	-	8.5649e-01	-	
8×8	8.7351e-03	2.2397	1.7136e-01	2.3214	1.2035e-02	1.9144	1.7136e-01	2.3214	
16×16	1.9582e-03	2.1573	2.1862e-02	2.9705	2.5140e-03	2.2592	2.1862e-02	2.9705	
32×32	4.7430e-04	2.0456	2.6581e-03	3.0399	5.2190e-04	2.2681	2.6581e-03	3.0399	

Table 3. Numerical results of ψ for $\delta = 10^{-3} \sim \delta = 10^{-4}$

表 3. 当 $\delta = 10^{-3} \sim \delta = 10^{-4}$ 时, ψ 的数值结果

$\delta = 10^{-3}$					$\delta = 10^{-4}$				
$n \times n$	$\ \psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ I_h\psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ \psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	$\ I_h\psi - \psi_h\ _V$	收敛阶	
4×4	4.9008e-02	-	8.5650e-01	-	6.4473e-03	-	8.5651e-01	-	
8×8	1.8471e-02	1.4078	1.7136e-01	2.3215	1.3481e-03	2.2578	1.7136e-01	2.3215	
16×16	6.1603e-03	1.5841	2.1862e-02	2.9705	2.9308e-04	2.2015	2.1862e-02	2.9705	
32×32	1.4266e-03	2.1104	2.6581e-03	3.0399	5.9365e-05	2.3036	2.6581e-03	3.0399	

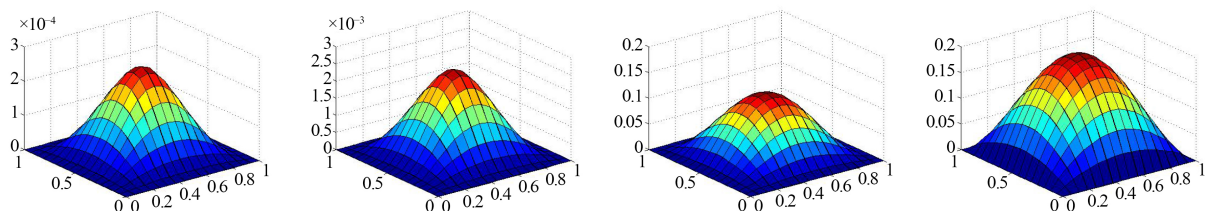


Figure 1. The graphics of ψ_h when $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}$ at $t = 0.1$ with $\delta = 10, 1.0, 10^{-2}$ and 10^{-6} , respectively

图 1. 当 $\delta = 10, 1, 10^{-2}, 10^{-6}$ 和剖分 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}$ 时数值解 ψ_h 的图像

6. 结论

本文中, 我们利用协调 Galerkin 有限元方法求解模拟高温超导体 d 波现象的四阶定常 Bi-wave 奇异摄动问题。基于 Brouwer 不动点定理给出了非线性 Bi-wave 问题数值解的存在唯一性证明, 并结合 Bogner-Fox-Schmit 单元的高精度性质, 得到在能量模意义下拟一致超逼近和超收敛结果。最后我们给出数值实验验证理论估计的正确性。其中, 定理 (4.2) 中的 (4.2) 式是对文献 [9] 中在能量范数意义下收敛阶为 $O(h^2)$ 误差估计的改善, 这表明我们可以用更小的计算成本获得相同的逼近精度。而如何将本项目的研究进一步延伸得到与奇异摄动参数完全无关的误差估计即一致收敛性这一丰满结果, 将是我们今后工作中的重点研究方向。

参考文献

- [1] Joynt, R. (1990) Upward Curvature of H_{c2} in High- T_c Superconductors: Possible Evidence for $s + d$ Pairing. *Physical Review B*, **41**, 4271-4277. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.41.4271>
- [2] Ren, Y., Xu, J.H. and Ting, C.S. (1996) Ginzburg-Landau Equations for Mixed $s+d$ Symmetry Superconductors. *Physical Review B*, **53**, 2249-2252. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.2249>
- [3] Feder, D.L. and Kallin, C. (1997) Microscopic Derivation of the Ginzburg-Landau Equations for a d-Wave Superconductor. *Physical Review B*, **55**, 559-574. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.559>
- [4] Dai, M.C. and Yang, T.J. (1999) The Anomalous Hall Effect for a Mixed s-Wave and d-Wave Symmetry Superconductor. *Solid State Communications*, **110**, 425-430. [https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(99\)00092-7](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(99)00092-7)
- [5] Xu, J.H., Ren, Y. and Ting, C.S. (1996) Structures of Single Vortex and Vortex Lattice in a d-Wave Superconductor. *Physical Review B*, **53**, 2991-2993. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.R2991>
- [6] Du, Q. (1999) Studies of Ginzburg-Landau Model for d-Wave Superconductors. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **59**, 1225-1250. <https://doi.org/10.1137/S0036139997329902>
- [7] Feng, X.B. and Neilan, M. (2010) Finite Element Methods for a Bi-Wave Equation Modeling d-Wave Superconductors. *Journal of Computational Mathematics*, **28**, 331-353. <https://doi.org/10.4208/jcm.2009.10-m1011>
- [8] Fushchych, W.I. and Roman, O.V. (1996) Symmetry Reduction and Some Exact Solutions of Nonlinear Bi-Wave Equations. *Reports on Mathematical Physics*, **37**, 267-281. [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(96\)89767-9](https://doi.org/10.1016/0034-4877(96)89767-9)
- [9] Feng, X.B. and Neilan, M. (2010) Discontinuous Finite Element Methods for a Bi-Wave Equation Modeling d-Wave Superconductors. *Mathematics of Computation*, **80**, 1303-1333. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2010-02436-6>

-
- [10] Shi, D.Y. and Wu, Y.M. (2018) Uniform Superconvergence Analysis of Ciarlet-Raviart Scheme for Bi-Wave Singular Perturbation Problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 7906-7914. <https://doi.org/10.1002/mma.5254>
- [11] Shi, D.Y. and Wu, Y.M. (2020) Uniformly Superconvergent Analysis of an Efficient Two-Grid Method for Nonlinear Bi-Wave Singular Perturbation Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **367**, Article ID: 124772. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124772>
- [12] Wu, Y.M. and Shi, D.Y. (2021) Quasi-Uniform Convergence Analysis of a Modified Penalty Finite Element Method for Nonlinear Singularly Perturbed Bi-Wave Problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **37**, 1766-1780. <https://doi.org/10.1002/num.22607>
- [13] Shi, D.Y. and Wu, Y.M. (2021) Quasi-Uniform Convergence Analysis of Rectangular Morley Element for the Singularly Perturbed Bi-Wave Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **161**, 169-177. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.11.002>
- [14] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.
- [15] Browder, F.E. and Finn, R. (1965) Existence and Uniqueness Theorems for Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **17**, 24-49. <https://doi.org/10.1090/psapm/017/0197933>
- [16] Lin, J.F. and Luo, Q. (2004) Superconvergence for the Bogner-Fox-Schmit Element. *Computational Mathematics*, **26**, 47-50. <https://doi.org/10.3321/j.issn:0254-7791.2004.01.006>