Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(3), 1406-1411
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113153

Hans汉斯

积分型Cauchy中值定理中间点的渐近性研究

加羊杰

青海师范大学民师院，数学系，青海　西宁

收稿日期：2022年2月28日；录用日期：2022年3月22日；发布日期：2022年3月29日

摘　要

本文分别介绍了积分第一中值定理与积分第二中值定理，并就积分型Cauchy中值定理分别讨论了在积分区间长度趋于零和积分区间长度趋于无穷大时中间点ξ的渐近性质，并且取得了一些积分型Cauchy中值定理中间点的渐近性质的重要推广。

关键词

积分型Cauchy中值定理，积分区间长度，中间点ξ的渐近性

Cauchy Mean Value Theorem of Integral Type and Approachability of Betweenness Point

Yangjie Jia

Department of Mathematics, Nationalities College of Qinghai Normal University, Xining Qinghai

Received: Feb. 28th, 2022; accepted: Mar. 22nd, 2022; published: Mar. 29th, 2022

Abstract

In this paper, we introduce the First integral mean value theorem and the Second integral mean value theorem, and discuss the approachability of inter mediate point ξ on the Cauchy mean value theorem of integral type when the length of integral tends to zero and infinity, and attain some advanced theorems on the basic of the approachability.

文章引用: 加羊杰. 积分型 Cauchy 中值定理中间点的渐近性研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1406-1411.
DOI: 10.12677/aam.2022.113153

Keywords

Cauchy Mean Value Theorem of Integral Type, Length of Integral Tend, Approachability of Inter Mediate Point ξ

1. 引言

积分中值定理在微积分理论中占有极其重要的地位，近年来，积分中值定理中间点的渐近性质越来越引起人们的重视，并且取得了一些很好的结论。本文中定理[1] [2]分别介绍了积分第一中值定理与积分第二中值定理；定理[3] [4] [5] [6]就积分型 Cauchy 中值定理讨论了在积分区间长度趋于零时中间点ξ的渐近性质；定理[7]就积分型 Cauchy 中值定理讨论了在积分区间长度趋于无穷大时中间点ξ的渐近性质。本文在已经取得的一些渐进性质的基础之上所取得的重要推广，它们都是更为一般的结论：

1) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x\in[a,b]$， $g(x)\neq 0$ 且不变号；在 a 点处为 n 次可微，且 $f^{(i)}(a)=g^{(i)}(a)=0\ (i=1,\cdots,n-1)$， $f^{(n)}(a)\neq 0$， $g^{(n)}(a)\neq 0$

$$f^{(n)}(a)g(a)-f(a)g^{(n)}(a)\neq 0.$$

若 ξ 是 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 所确定的，则有： $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{\xi-a}{b-a}=\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$。

2) 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上具有直至 n 阶和 m 阶连续导数， $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(i)}(x)=+\infty\ (i=0,\cdots,n-1)$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)=A\neq 0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=+\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{(i)}(x)=+\infty\ (i=0,\cdots,m-1)$， $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{(m)}(x)=B\neq 0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=+\infty$.

对 $\forall x\in[a,+\infty)$， $g(x)\neq 0$ 且不变号。

若 ξ 是由 $\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 所确定的，则有： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\left(\dfrac{1+m}{1+n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$， 其中 A，B 为常数。

2. 关于积分型 Cauchy 中值定理

定理 1 (积分第一中值定理)若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $g(x)\neq 0, x\in[a,b]$，则在 (a,b) 中至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

定理 2 (积分第二中值定理)设函数 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积， $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上单调，则在 $[a,x]$ 上存在一点 ξ，使得

$$\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(a)\int_a^{\xi} f(t)\mathrm{d}t + g(x)\int_{\xi}^x f(t)\mathrm{d}t$$

3. 积分区间长度趋于零时，中间点ξ的渐近性

定理 3 设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在区间 $[a,x]$ 上连续，$f(t)$ 在点 a 可导，$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上不变号，且 $f'(a)g(a)\neq 0$。由积分第一中值定理[本文中定理 1]，则存在由

$$\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

所确定的ξ [$\xi\in[a,x]$]，有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=1/2.$$

定理 4 设函数 $f(t)$ 在区间 $[a,x]$ 上连续，$f^{(n-1)}(a)$ 存在，且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-2)}(a)=0$，$f^{(n-1)}(a)\neq 0$；$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上有连续的导函数，且 $g'(t)\neq 0$。

若ξ是由 $\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(a)\int_a^{\xi} f(t)\mathrm{d}t + g(x)\int_{\xi}^x f(t)\mathrm{d}t$ 所确定的，则有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

上面我们看到了积分中值定理的一些渐进性质，对上面的性质作一些推广，可以得到更一般的结论。

定理 5 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x\in[a,b]$，$g(x)\neq 0$ 且不变号；在 a 点处为 n 次可微，且 $f^{(i)}(a)=g^{(i)}(a)=0(i=1,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，$g^{(n)}(a)\neq 0$

$$f^{(n)}(a)g(a)-f(a)g^{(n)}(a)\neq 0.$$

若ξ是 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 所确定的，则有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

证明 把 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 展开成 Tayor 公式：

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\theta_1(x)(x-a)^n \tag{1}$$

$$g(x)=g(a)+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\theta_2(x)(x-a)^n \tag{2}$$

其中 $\theta_1(x),\theta_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\theta_i(x)=0(i=1,2)$

由(1)，(2)可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b\left[f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\theta_1(x)(x-a)^n\right]\mathrm{d}x\\ &= f(a)(b-a)+\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}+\int_a^b\theta_1(x)(x-a)^n\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3}$$

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[g(a) + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \theta_2(x)(x-a)^n \right] \mathrm{d}x$$
$$= g(a)(b-a) + \frac{g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \theta_2(x)(x-a)^n \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$f(\xi) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n + \theta_1(\xi)(\xi-a)^n \tag{5}$$

$$g(\xi) = g(a) + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n + \theta_2(\xi)(\xi-a)^n \tag{6}$$

将(3)，(4)，(5)，(6)代入 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$，并化简可得

$$\frac{f(a)g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)(\xi-a)^n + f(a)(b-a)\theta_2(\xi)(\xi-a)^n + \frac{f^{(n)}(a)g(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\theta_2(\xi)(\xi-a)^n + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n \int_a^b \theta_1(x)(x-a)^n \mathrm{d}x$$
$$+g(a)\int_a^b \theta_1(x)(x-a)^n \mathrm{d}x + \int_a^b \theta_1(x)(x-a)^n \mathrm{d}x\theta_2(\xi)(\xi-a)^n$$
$$= \frac{f^{(n)}(a)g(a)}{n!}(b-a)(\xi-a)^n + g(a)(b-a)\theta_1(\xi)(\xi-a)^n + \frac{f(a)g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
$$+\frac{g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\theta_1(\xi)(\xi-a)^n + f(a)\int_a^b \theta_2(x)(x-a)^n \mathrm{d}x$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n \int_a^b \theta_2(x)(x-a)^n \mathrm{d}x + \int_a^b \theta_2(x)(x-a)^n \mathrm{d}x\theta_1(\xi)(\xi-a)^n$$

现在，以 $(b-a)^{n+1}$ 除上式的两边，并且令 $b \to a$，再利用 L'Hospital 法则可以推出

$$\frac{f^{(n)}(a)g(a) - f(a)g^{(n)}(a)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n)}(a)g(a) - f(a)g^{(n)}(a)}{n!} \lim_{b\to a}\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)^n$$

由于 $f^{(n)}(a)g(a) - f(a)g^{(n)}(a) \neq 0$，故有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

证毕。

在定理 5 中，令 $n=1$，便可以得到以下的结果：

推论 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x \in [a,b]$，$g(x) \neq 0$ 且不变号；$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 点处可导，且 $f(a) = g(a) = 0$，$f'(a) \neq 0$，$g'(a) \neq 0$，$f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \neq 0$.

若 ξ 是 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 所确定的，则有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a} = \frac{1}{2}.$$

又在定理 5 中，若取 $g(x)\equiv 1$，即得：

推论 2 若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的联续函数，且 $f^{(i)}(a)=0(i=0,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(a)\neq 0$

若 ξ 是 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 所确定的，则有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

当 $f(x)$ 为 n 阶可导，$g(x)$ 为 m 阶可导时($m\neq n$)，积分型 Cauchy 中值定理的中间点 ξ 有如下的渐近性质：

定理 6 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别在 $[a,b]$ 上有 n 阶和 m 阶的连续导数，$f^{(i)}(a)=0(i=0,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(a)\neq 0$；$g^{(i)}(a)=0(i=0,\cdots,m-1)$，$g^{(m)}(a)\neq 0$，对 $\forall x\in(a,b)$，$g(x)\neq 0$ 且不变号。

若 ξ 是由 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 所确定的，则有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-m}}. \tag{8}$$

4. 积分区间长度趋于无限时，中间点 ξ 的渐近性

为了讨论 $x\to+\infty$ 时中间点 ξ 的渐近性质，我们先给出两个引理：

引理 1 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有意义，且满足

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$；

2) $f(x),g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可微且 $g'(x)\neq 0$；

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ (有限或无穷)。

则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$。

此称为改进的罗比塔法则。

引理 2 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$，则

1) 当 $A<0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=-\infty$；

2) 当 $A>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=+\infty$。

定理 7 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $g(x)$ 不变号，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=\infty$，$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，又有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\beta} g(x)=B$。

则对 $\forall x\in(a,+\infty)$，必存在 $\xi\in(a,x)$，使得

$$\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}. \tag{9}$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}. \tag{10}$$

其中 A,B 为非零常数， α,β 为实数， $\alpha<1,\beta<1$ 且 $\alpha\neq\beta$ 。

若令 $g(x)\equiv1$ ， $\beta=0$ ，则有：

推论 3 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续， $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\infty$ ，且对 $\forall x\in(a,+\infty)$ ， $f(x)\neq0$ ，又有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)=A$ ，则对 $\forall x\in(a,+\infty)$ ，必存在 $\xi\in(a,x)$ ，使得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a).$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi-a}{x-a}=(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

此即为第一积分中值定理的中间点在 $x\to+\infty$ 时的渐近性。

上面我们看到了积分中值定理的一些渐进性质，对上面的性质作一些推广，又可以得到更一般的结论。

本文通过运用积分型 Cauchy 中值定理，分别讨论了在积分区间长度趋于零和积分区间长度趋于无穷大时中间点 ξ 的渐近性质。定理 5 与定理 7 是本文在已经取得的一些渐进性质的基础之上所取得的重要推广，它们都是更为一般的结论，并且它们的特殊情况[本文中推论 1，2，3]是渐进性质的一些经典结论，其在实际解决一些问题的时候十分的简洁、方便。

基金项目

青海省自然科学基金(2021-ZJ-708)项目。

参考文献

[1] 戴立辉，刘龙章. 积分型柯西中值定理中间点的渐近线[J]. 大学数学, 2009, 25(3): 35-43.

[2] 杜争光. 广义积分型 Cauchy 中值定理中间点的渐近性[J]. 宁夏师范学院学报, 2018, 39(1): 6-10.

[3] 刘文武，严忠权. 积分型 Cauchy 中值定理中间点的渐近性[J]. 数学的实践与认识, 2008, 40(11): 228-332.

[4] 李文荣. 关于中值定理“中间点”的渐进性[J]. 数学的实践与认识, 1985, 23(2): 112-122.

[5] 陈纪修，於崇华，金路. 数学分析[M]. 北京：高等教育出版社, 2004.

[6] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京：高等教育出版社, 1993.

[7] 聂辉，张树义. 柯西中值定理“中间点”的渐近性研究[J]. 湖南城市学院学报(自然科学版), 2019, 1(3): 11-18.