Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(4), 1757-1763**
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114192

最优分红问题的研究综述

何　月

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2022年3月14日；录用日期：2022年4月8日；发布日期：2022年4月19日

摘　要

最优分红问题是金融保险领域中受到广泛关注的问题之一，本文研究总结了最优分红问题中的经典贡献和进展。讨论了研究中使用的数学方法和在不同模型下遇到的困难。最后，给出了这一领域中的待解问题。

关键词

最优分红问题，值函数，最优策略

A Survey of Results on Optimal Dividend Problem

Yue He

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 8th, 2022; published: Apr. 19th, 2022

Abstract

The optimal dividend problem is one of the most concerned problems in the field of finance and insurance. This paper studies and summarizes the classical contributions and progress in the optimal dividend problem. The mathematical methods used in the research and the difficulties encountered in different models are discussed. Finally, the unsolved problems in this field are put forward.

Keywords

Optimal Dividend Problem, Value Function, Optimal Strategy

文章引用: 何月. 最优分红问题的研究综述[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 1757-1763.
DOI: 10.12677/aam.2022.114192

1. 引言

在 1903 Lundberg [1]提出用经典聚合风险模型来刻画保险公司的盈余过程之后，保险公司的破产概率就成为了这一领域中学者们最感兴趣的主要考量之一。然而，在经典聚合风险模型下，如果保险公司不破产，则其盈余过程的轨迹将超越每一有限水平最终趋于无穷。为了避免这种不符合实际的情况，De Finetti [2]在 1957 年提出了另一评价保险公司经营状况的指标。他提出用破产前期望贴现总分红的大小代替破产概率作为新的评价标准，在相对简单的离散时间随机游动模型下解决了这一问题。他的研究引起了其他学者对这一优化问题的兴趣，但是由于精算界少有掌握随机控制理论的学者，保险领域的最优分红问题在当时并没有太多进展。

Merton [3]首先开始研究以随机过程为辅助的连续时间下的投资–消费问题。后来其他学者将这一问题进行了扩展并给出了更加严格的数学处理。Magill 和 Constantinides [4]提出 Merton 在 1969 年的文章中的假设：交易机会连续可用且交易无成本，会导致保险公司的行为不符合现实情况。这也使他们开始在连续时间模型下研究带有交易费用的投资–消费问题。

随着随机控制理论的发展和其在金融领域投资–消费模型中的应用，保险领域的最优分红问题也快速地发展起来。Azcue 和 Muler [5]在没有交易费用的假设下，借助随机控制理论深入研究了 C-L 模型下的最优分红问题，找到了一个最优的动态选择的再保险和分红策略，并证明了最优分红策略是一个波段策略。他们的研究给保险领域的最优分红问题带来了实质性的发展。在此之后，许多这一领域的研究团队都致力于在更加一般且更加贴近现实情况的假设下解决这一优化问题。再保险、投资等可能的控制也被考虑了进来，有的模型中还加入了金融领域中提到的交易费用和效用函数。

2. 投资–消费模型

投资–消费模型考虑金融市场中有连续交易的 m + 1 种有价证券。其中一种是纯折价债券，其他的 m 种风险资产称为股票。这个模型中用布朗运动来描述股票价格的波动。假设公司的经纪代理人在这个金融市场中进行投资。目的是要找到一个最优的投资–消费策略，包括分别投资于 m 种股票的总资产的比例和提取资金用于消费的速率。

在上述条件下使消费效用贴现期望最大化问题的研究是由 Merton 开始的。他在不考虑交易费用，即交易机会连续可用且交易无成本假设下，找到了由最优投资比例和最佳消费速率构成的最优策略。这一结果中分别投资于债券和唯一股票的金额被称为 Merton 比例，与时间 t 无关。也就是说，这一随机过程在穿过原点坡度固定的一条直线上。这条直线被称为 Merton 线。后来，Sethi 和 Taksar [6]将 Merton 的工作进行了拓展并给出了严格的数学证明。

为了使模型贴近现实情况，后续的研究中引入了比例交易费用。假设在买入和卖出股票的时候分别需要缴纳比例不同的比例交易费用，这部分费用会从纯折价债券中扣除。此时要找的最优策略是使消费效用的贴现期望最大的消费–买进–卖出策略。由于消费过程是经典随机控制，买进和卖出过程是随机奇异控制，那么这一优化问题就是混合经典–奇异随机控制问题。这类问题的研究是从 Magill 和 Constantinides [4]开始的，他们用启发式的方法发现了存在交易费用时，投资者的投资组合行为中出现的一些根本性质的变化。并指出交易费用是金融中介，例如共同基金，存在的一个重要因素。Davis 和 Norman

[7]研究了同样的问题，利用动态规划原理给出了严格的分析，并提供了最优策略的数值算例。Shreve 和 Soner [8]在文献[7]的基础上去掉了一些假设条件并引入了粘性解的概念。

前面的研究中都假设市场中只有一种股票证券，即假设 $m = 1$。为了使模型更加符合现实情况，Akian *et al.* [9]去掉了 $m = 1$ 的假设，研究了有限证券(波动项互不相关即波动率矩阵是一个单位矩阵)的优化问题。他们将值函数刻画为拟变分不等式(QVI)的唯一粘性解，并给出了其数值解。Collings 和 Haussmann [10]去掉了有限证券之间波动项互不相关即波动率矩阵是单位矩阵的假设，求解了拟变分不等式，其唯一粘性解即为值函数。

前面的研究中虽然包含了交易费用，但是仍然不能反映实际的情况。为了使模型更贴近实际，假设在每次交易时除了缴纳比例交易费用还要缴纳一笔固定数额的交易费用。在每次交易时刻，对于持有股票的改变量，要缴纳比例为 k 的比例交易费用和数额为 K 的固定交易费用。交易费用和消费都由纯折价债券支付。由于每次交易都要缴纳固定交易费用，所以任何包含连续交易的策略都会导致破产，于是这类问题最优策略的交易时间都是离散的，称其为随机脉冲控制问题。在这类优化问题中，一般首先用启发式的方法找出值函数满足的拟变分不等式(QVI)的解，然后根据这个解构建相对应的 QVI-策略，最后再通过验证定理证明这个 QVI-策略就是最优策略。最先将随机脉冲控制理论引入这一优化问题的是 Eastham 和 Hastings [11]，他们在相对简单的条件(股票升值率小于利率，效用函数为线性函数等，贴现因子为 0，股票购买份额有界等条件)下，得到了这一优化问题的近似解。Hastings [12]在股票升值率大于利率，贴现因子为正，股票购买份额无界的条件下研究了最优策略具有的性质，但没有给出数值算例。Korn [13]在文献[11]的基础上将该优化问题转换成了最优停止问题，给出了求解最优策略的另一种思路。

除了上述几类优化问题，后来对于交易费用的设定越来越多样化，例如比例交易费用不是缴纳变化量的比例，而是缴纳总资产的固定比例；除了缴纳比例交易费用之外还要缴纳税费等。在这里我们不做过多的叙述，详细的介绍参见 Cadenillas [14]。

3. 聚合风险模型

经典的聚合风险模型用初始余额、连续收取的具有固定速率的保费和索赔来刻画保险公司的余额过程。因假设保险公司的索赔到达服从复合泊松过程，又被称为复合泊松模型。索赔额分布的任意性给经典聚合风险模型下最优分红问题的研究带来了难以解决的问题，因此学者们建立了经典聚合风险模型的一种推广模型——扩散逼近模型。扩散逼近模型用带漂移的布朗运动替换了原来的复合泊松过程来刻画索赔到达。本文主要总结这两个模型下最优分红问题取得的成果。

为了更好的阐述保险领域最优分红问题的研究成果，先介绍几个除了上面提到的交易费用和投资之外的因素。

再保险，是指保险公司为了转移一部分风险将保单再次投保的行为。这篇文章中只讨论保险公司向再保险公司支付部分保费，再保险公司替保险公司承担一部分提前约定好的风险(即索赔额)这种再保险方式。再保险一般含有两类重要元素：剩余损失函数，表示当索赔额已知时保险公司承担的索赔额大小；保险公司给再保险公司的保费率。常见的再保险方式有两种，分别是比例再保险和超额损失再保险。比例再保险中，再保险公司承担固定比例的索赔额。超额损失再保险中，再保险公司承担超过固定常数的索赔额。即索赔额若不超过规定常数则全部由保险公司承担；否则，保险公司只承担该规定常数额，剩余超过的部分由再保险公司承担。当再保险和分红两种控制同时存在时，我们的目标是找到使累积期望贴现分红最大的分红再保险策略。

在前面的讨论中，认为盈余小于零时保险公司破产，盈余过程结束。而事实上，破产并不代表结束，而是有必要引入额外的资金，所以只要适当的注资，风险过程仍然可以继续。当注资和分红两种控制同

时存在时，我们的目标是找到使累计折现分红和累积折现注资之差的期望最大的分红注资策略。注资一般是由少数几个股东提供资金帮助公司度过难关。在后续的讨论中，有的学者还研究了公开向社会人士融资(允许公司发行股票)的情况，本文不做过多介绍。

扩散模型允许人们计算最优控制的清晰解以及光滑的值函数，使最优分红问题得以简化，因此扩散模型的研究成果比经典聚合风险模型产生的更早。学者们通过将最优分红问题的求解转换成相应的 HJB 不等式或 QVI 的求解，启发式的得到了值函数的解析解及与之对应的最优策略。Asmussen 和 Taksar [15]研究了扩散模型下分红速率有上限的约束分红问题并证明了其最优分红策略为阈值分红策略。Højgaard [16]在此基础上又考虑了比例再保险。He [17]在扩散模型下首次研究了允许再保险和融资的最优分红问题。提出了没有融资的模型和具有融资永不破产两类子问题。并在系数满足不同条件的情况下用子问题的解构建了原问题的值函数和最优分红策略。Zhou [18]讨论了允许再保险和注资的最优分红问题。假设再保险的保费是根据方差保费原则而不是期望保费原则厘定的，并且在有无注资和有无分红约束四种不同情况下都得到了值函数的解析解和相应的最优策略。Schmidli [19]讨论了与文献[18]相同的优化问题，并在其基础上假定分红需要上缴税费而注资则可以免税。他完整的解决了这个优化问题得到了值函数的解析解并证明最优策略是一个障碍策略。

引入固定交易费用后，一般分红问题转变成脉冲分红问题，即分红是不连续的。Cadenillas [20]讨论了只有分红一种控制的最优分红问题。在混合经典–脉冲控制下，通过求解该问题相应的拟变分不等式(二阶非线性微分方程)得到了值函数的解析解和相应的最优策略。He [21]在文献[17]的基础上加入了固定交易费用讨论了最优分红问题。但在建模的过程中忽略了分红时的固定交易费用只留下了融资过程中的固定交易费用。该文章延续了在文献[17]中提出的没有融资的模型和具有融资永不破产两类子问题。也在系数满足不同条件的情况下用子问题的解构建了原问题的值函数和最优分红策略。Cheng [22]讨论了允许再保险和注资的最优分红问题。他在索赔额服从一般分布，参数满足不同条件时分别求出了 QVI 的闭式解，找到了注资、再保险和分红的联合最优控制策略。

经典聚合风险模型下最优分红问题的实质性进展在 2005 年前后。Azcue 和 Muler [5]讨论了允许再保险的最优分红问题。他们引入了粘性解的概念，解决了大多数时候解出的值函数都不满足连续可微条件的问题。他们的研究为最优分红问题的研究提供了新的思路，被认为是该优化问题中里程碑式的成果。Schmidli [23]讨论了允许注资的最优分红问题。与文献[5]中定义的值函数不同，他在累计贴现注资项前面乘上了一个惩罚因子，当惩罚因子为 1 时，所有余额都用来分红，索赔全部由注资承担。他在受限分红(经典控制)和不受限分红(奇异控制)两类情况下分别推导了 HJB 方程。在经典控制下证明了最优分红策略是一种障碍策略。该策略对于给定的障碍 $b > 0$，在初始余额高于 b 时则将高出的部分脉冲分红，并且将之后的新保费全部分红。在奇异控制下给出了索赔为指数分布时值函数的解析解和数值算例。Albrecher 和 Thonhauser [24]加入了利率，即假设现有余额将额外产生利息收入。与文献[5]中的方法类似，他们也借助粘性解的概念在索赔额服从指数分布时，证明了最优策略是障碍策略。Azcue 和 Muler [25]讨论了允许投资的最优分红策略。即假设允许公司将盈余投资于布莱克–斯科尔斯(Black-Scholes)金融市场，并再次假设下寻找最优投资分红的策略。他们将值函数刻画为相关二阶积分–微分方程的最小粘性解并证明了最优分红策略是波段策略。李岩[26]讨论了与文献[23]相同的优化问题。也在累计贴现注资项前面乘上了一个惩罚因子。除了文献[23]中已获得的结果，还找到了较低注资障碍和较高注资障碍。在索赔服从指数分布时给出了求解的具体过程和值函数的精确表达式。Strini 和 Thonhauser [27]讨论了允许融资的最优分红问题。他们指出保险公司引入原始股东注资的最终目的是防止破产，而他们研究的融资问题中存在新的投资人，并且保险公司仍然有破产的可能性。他们使用一个独立泊松过程的跳跃时间来刻画融资机会，在融资机会出现的时间选择一个适当的融资高度。启初他们尝试了障碍策略和简单的波段策略猜想可能

是最优策略。发现猜想不正确后采用了数值分析的方法来寻找最优策略。在指数分布索赔的情况下，给出了该优化问题的显式解，并推导出了最优策略。

经典聚合风险模型下的脉冲分红问题更加复杂，因此研究成果并不丰富。Bai 和 Guo [28]讨论了只有分红一种控制的最优分红问题。他们在索赔额呈指数分布的情况下，对值函数满足的拟变分不等式作了细致的分析。在参数满足不同条件的三种情况下分别得出了拟变分不等式的闭式解，并在每种情况下都给出了与值函数相对应的最优分红策略。Thonhauser 和 Albrecher [29]引入了效用函数，以分红效用的贴现期望作为值函数证明了当索赔服从指数分布时最优策略即为常见的简单策略，并且给出了索赔分布一般时的数值分析过程。前面叙述的研究中都假设分红是以给定常数贴现因子的指数形式进行贴现，即认为投资人对较早分红和较晚分红的偏好是相同的，这种假设被称为时间一致性偏好假设。然而在实验研究中表明，这种时间一致性偏好假设与实际情况不符。研究发现，人们在短期投资中做决定时没有耐心，而在长期投资中情况则相反。Chen Shumin [30]以时间一致性偏好假设下的模型为基准考虑了时间不一致性偏好假设下的最优分红问题。说明了时间不一致性偏好假设对分红策略的影响。证明了在索赔额服从混合指数分布时，最优分红策略是简单分红策略。该策略有一个较低的障碍和一个较高的障碍，当余额到达较高的障碍时，脉冲分红使余额到回到较低的障碍。

4. 关于待解问题的讨论

虽然目前对经典风险模型和扩散模型中的最优分红问题的理解已经达到了一定的成熟状态，但是仍有待解决的问题存在。可以看出，目前大部分研究结果都是在扩散模型下索赔服从一般分布时获得值函数解析表达式和相对应的最优策略；或者在 C-L 模型下假设索赔服从指数分布来得到值函数解析表达式和相对应的最优策略。正如 Albrecher 和 Thonhauser [31]中指出的最优分红问题还有如下问题待解：

1) 最优分红问题还没有求解值函数的一般方法。

2) 障碍策略最优的充分必要条件还没有找到。

不论在带交易费用还是不带交易费用的情形下，对给定的任意索赔额分布来决定一般最优策略至今还没有严格的数值分析与描述。要突破瓶颈，需要研究路径和研究方法上的创新。文献[29]在研究带效用函数和交易费用的最优脉冲分红问题时引入了策略迭代的思想，虽然没有给出完整的策略迭代算法但也为后续的研究提供了思路。Liu *et al.* [32]对带约束分红率的 Sparre Anderson 保险风险模型的最优分红问题给出了相应时间相依的“阈值”策略迭代算法并得到了值函数和最优分红策略的近似解。这说明策略迭代算法对最优分红问题的适用性和有效性。

那么我们能否借助策略迭代算法来逼近 C-L 模型下索赔服从一般分布的最优分红问题值函数和最优分红策略，得到其近似解呢？如果可以构建一列辅助优化问题并证明其收敛性，通过完整的解决辅助优化问题得到相应的值函数与最优策略，再构建策略迭代算法进行迭代就能得到原问题的近似解。这一过程中找到能够被完整解决的一列辅助优化问题至关重要。

根据目前的研究结果，对于一般分红问题，最优策略为波段策略，且当索赔额服从指数分布时退化为障碍策略。如果将最优分红策略建模为“多波段结构”，其值函数则为两类曲线(或曲面)交替拼接而成。这两类曲线(或曲面)分别对应两个一阶线性微分方程(HJB 方程)的通解。即通过求解两类曲线(或曲面)的最优拼接点(或拼接曲线)就可以得到值函数。

根据上述描述，能否通过几何关系来界定障碍策略是否最优呢？如果能够分析出值函数满足 HJB 方程时相应的几何条件关系就能快速地判断出与值函数相对应的最优分红策略是“几”波段的。这样一来就能够通过几何关系倒推出障碍策略最优的充分必要条件。这一过程中找到明确且容易表达的几何关系至关重要。

上面讨论了对于两大主要待解问题可能的解决方法和途径，也指出了其中的关键，但提出的想法都还需要严格的数学分析与证明。

参考文献

[1] Lundberg, F. (1903) Approximerad Framstifillning av Sannolikhetsfunktionen. Aterfifirsikring avKollektivrisker. Akad. Afhandling. Almqvist o. Wiksell, Uppsala.

[2] De Finetti, B. (1957) Su un'impostzione alternativa della teoria collettiva del rischio. In: *Transactions of the* 15*th International Congress of Actuaries*, Congres International d'Actuaires, New York, 433-443.

[3] Merton, R.C. (1969) Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, **51**, 247-257. https://doi.org/10.2307/1926560

[4] Magill, M.J.P. and Constantinides, G.M. (1976) Portfolio Selection with Transactions Costs. *Journal of Economic Theory*, **13**, 245-263. https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90018-1

[5] Azcue, P. and Muler, N. (2005) Optimal Reinsurance and Dividend Distribution Policies in the Cramér-Lundberg Model. *Mathematical Finance*, **15**, 261-308. https://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2005.00220.x

[6] Suresh, P., *et al*. (1988) A Note on Merton's "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model". *Journal of Economic Theory*, **46**, 395-401. https://doi.org/10.1016/0022-0531(88)90138-X

[7] Davis, M.H.A. and Norman, A.R. (1990) Portfolio Selection with Transaction Costs. *Mathematics of Operations Research*, **15**, 676-713. https://doi.org/10.1287/moor.15.4.676

[8] Shreve, S.E. and Soner, H.M. (1994) Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 609-692. https://doi.org/10.1214/aoap/1177004966

[9] Akian, M., Menaldi, J.L. and Sulem, A. (1996) On an Investment-Consumption Model with Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **34**, 329-364. https://doi.org/10.1137/S0363012993247159

[10] Collings, P. and Haussmann, U.G. (1998) Optimal Portfolio Selection with Transaction Costs. In: *Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems*, Springer, Berlin, 189-197. https://doi.org/10.1007/978-0-387-35359-3_23

[11] Eastham, J.F. and Hastings, K.J. (1988) Optimal Impulse Control of Portfolios. *Mathematics of Operations Research*, **13**, 588-605. https://doi.org/10.1287/moor.13.4.588

[12] Hastings, R. (1992) Purify: Fast Detection of Memory Leaks and Access Errors. *Proceedings* 1992 *Winter USENIX Conference*, San Francisco, 20-24 January 1992, 125-136.

[13] Korn, R. (1998) Portfolio Optimisation with Strictly Positive Transaction Costs and Impulse Control. *Finance and Stochastics*, **2**, 85-114. https://doi.org/10.1007/s007800050034

[14] Cadenillas, A. (2000) Consumption-Investment Problems with Transaction Costs: Survey and Open Problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, **51**, 43-68. https://doi.org/10.1007/s001860050002

[15] Asmussen, S. and Taksar, M. (1997) Controlled Diffusion Models for Optimal Dividend Pay-Out. *Insurance Mathematics and Economics*, **20**, 1-15. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(96)00017-0

[16] Højgaard, B. (1997) Optimal Dividend Payout with the Option of Proportional Reinsurance in the Diffusion Model. *Insurance Mathematics and Economics*, **20**, 151. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(97)80669-5

[17] He, L. and Liang, Z. (2008) Optimal Financing and Dividend Control of the Insurance Company with Proportional Reinsurance Policy. *Insurance Mathematics & Economics*, **42**, 976-983. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.11.003

[18] Zhou, M. and Yuen, K.C. (2012) Optimal Reinsurance and Dividend for a Diffusion Model with Capital Injection: Variance Premium Principle. *Economic Modelling*, **29**, 198-207. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2011.09.007

[19] Schmidli, H. (2017) On Capital Injections and Dividends with Tax in a Diffusion Approximation. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2017**, 751-760. https://doi.org/10.1080/03461238.2016.1248480

[20] Cadenillas, A., Choulli, T., Taksar, M., *et al*. (2006) Classical and Impulse Stochastic Control for the Optimization of the Dividend and Risk Policies of an Insurance Firm. *Mathematical Finance*, **16**, 181-202. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2006.00267.x

[21] He, L. and Liang, Z. (2009) Optimal Financing and Dividend Control of the Insurance Company with Fixed and Proportional Transaction Costs. *Insurance Mathematics & Economics*, **44**, 88-94. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.10.001

[22] Cheng, G., Wang, R. and Yao, D. (2018) Optimal Dividend and Capital Injection Strategy with Excess-of-Loss Rein-

surance and Transaction Costs. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**, 371-395. https://doi.org/10.3934/jimo.2017051

[23] Kulenko, N. and Schmidli, H. (2008) Optimal Dividend Strategies in a Cramer-Lundberg Model with Capital Injections. *Insurance Mathematics & Economics*, **43**, 270-278. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.013

[24] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2008) Optimal Dividend Strategies for a Risk Process under Force of Interest. *Insurance Mathematics & Economics*, **43**, 134-149. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.03.012

[25] Azcue, P. and Muler, N. (2010) Optimal Investment Policy and Dividend Payment Strategy in an Insurance Company. *Annals of Applied Probability*, **40**, 1253-1320. https://doi.org/10.1214/09-AAP643

[26] 李岩. 经典风险模型中最优分红与注资及最优再保险策略的研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2009.

[27] Strini, J.A. and Thonhauser, S. (2019) On a Dividend Problem with Random Funding. *European Actuarial Journal*, **9**, 607-633. https://doi.org/10.1007/s13385-019-00208-y

[28] Bai, L.H. and Guo, J.Y. (2010) Optimal Dividend Payments in the Classical Risk Model When Payments Are Subject to both Transaction Costs and Taxes. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010**, 36-55. https://doi.org/10.1080/03461230802591098

[29] Thonhauser, S. and Albrecher, H. (2011) Optimal Dividend Strategies for a Compound Poisson Process under Transaction Costs and Power Utility. *Stochastic Models*, **27**, 120-140. https://doi.org/10.1080/15326349.2011.542734

[30] Chen, S.M., Zeng, Y. and Hao, Z.F. (2017) Optimal Dividend Strategies with Time-Inconsistent Preferences and Transaction Costs in the Cramér-Lundberg Model. *Insurance Mathematics & Economics*, **74**, 31-45. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.02.009

[31] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009) Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *Revista De La Real Academia De Ciencias Exactas Fisicas Y Naturales Serie A Matematicas*, **103**, 295-320. https://doi.org/10.1007/BF03191909

[32] Liu, Y.Y., Liu, Z.Y. and Liu, G.X. (2020) Optimal Dividend Problems for Sparre Andersen Risk Model with Bounded Dividend Rates. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2020**, 128-151. https://doi.org/10.1080/03461238.2019.1655475