Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 2017-2023
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114218

Hans汉斯

模糊赋范Riesz空间的性质

赵家锐，李 浩，潘相宇

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2022年3月22日；录用日期：2022年4月16日；发布日期：2022年4月24日

摘 要

本文证明了模糊赋范Riesz空间中的分解定理，引入了向上集(向下集)依模糊范数收敛的概念，并讨论了模糊赋范Riesz空间中有关收敛的一些性质。

关键词

模糊赋范Riesz空间，分解定理，向上集(向下集)模糊范数收敛

Properties of Fuzzy Normed Riesz Spaces

Jiarui Zhao, Hao Li, Xiangyu Pan

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 22nd, 2022; accepted: Apr. 16th, 2022; published: Apr. 24th, 2022

Abstract

In this paper, the decomposition theorem in fuzzy normed Riesz spaces is proved. With the concept of convergence of upwards directed set (downwards directed set) with respect to fuzzy norm being introduced, some properties of convergence in fuzzy normed Riesz spaces are discussed.

Keywords

Fuzzy Normed Riesz Space, Decomposition Theorem, Convergence of Fuzzy Norm of Upwards Directed Set (Downwards Directed Set)

文章引用: 赵家锐, 李浩, 潘相宇. 模糊赋范 Riesz 空间的性质[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 2017-2023.
DOI: 10.12677/aam.2022.114218

1. 引言

Riesz 空间的研究开始于 1930 年，F. Riesz [1]做了开创性的工作，他将格序结构引入到向量空间，建立了 Riesz 空间的一些基础理论。对于 Riesz 空间和 Banach 格的基本理论参考文献[2] [3] [4]有详细研究。

模糊数理论是模糊分析学的基础。1965 年，美国控制论专家 Zadeh [5]提出了模糊集的概念。1972 年 Zadeh 和 Chang [6]结合概率分布函数的性质，把实数域 R 上一族的模糊集(它们均具有一些特殊的性质)称之为模糊数。自此，展开了对模糊集的广泛研究。2003 年，Bag 和 Samanta [7]在线性空间中引入了一个模糊范数的新的定义。

模糊理论与 Riesz 空间的结合是以 1971 年 Zadeh 的文章[8]为标志，他在文章中首次定义了模糊序关系的概念。最近，C. Park [9]定义了 Riesz 模糊赋范空间，他分别用模糊范数与单调序列定义了模糊 Riesz 空间中的模糊范数收敛与模糊序收敛，并给出一些例子与基本结果。C. Park [9]主要是从模糊序列的角度研究模糊赋范 Riesz 空间上的收敛问题。本文主要是从模糊范数的角度研究模糊赋范 Riesz 空间上的问题。

2. 预备知识

首先给出经典 Riesz 空间的定义和结论。

定义 2.1 [4]设“$\le$”为一个关系，E 是一个具有关系“$\le$”的非空集合，若关系“$\le$”满足以下条件：

1) $x \le x$，对每个 $x \in E$，

2) 如果 $x \le y$ 且 $y \le x$，则 $x = y$，

3) 如果 $x \le y$ 且 $y \le z$，则 $x \le z$。

则称 E 为偏序集。

设 A 是 E 的非空子集，$x_0 \in E$。如果对任意的 $y \in A$，都有 $y \le x_0$，那么称 x_0 是 A 的一个上界。如果对于 A 的任意上界 $\bar{x}$，都有 $x_0 \le \bar{x}$，那么称 $\bar{x}$ 是 A 的最小上界或上确界，记为 $\sup A$。

类似的，可以定义一个集合的下界和下确界，A 的下确界记为 $\inf A$。

定义 2.2 [4]设 E 是一个偏序集。若每个包含两个元素的子集都有上确界和下确界，则称 E 为格。通常用 $x \vee y$ 与 $x \wedge y$ 分别表示 $\{x, y\}$ 的上确界与下确界。

定义 2.3 [4]设 E 是一个实向量空间，若赋予偏序关系“$\le$”，使得向量空间结构与序结构相容，即满足下列条件：

1) 如果 $x \le y$，则对任意 $z \in E$，有 $x + z \le y + z$；

2) 如果 $x \ge \theta$，则对任意 $0 \le a \in R$，有 $ax \ge \theta$。

则称 E 是序向量空间。其中，θ 为 E 的零向量(在以后的行文中，若无特别说明，θ 均表示向量空间的零向量)。特别的，若 E 还是格，则称 E 为 Riesz 空间或向量格。

对 Riesz 空间 E，给出如下定义和记号。

1) 称子集 $E^+ = \{f : \theta \le f \in E\}$ 为 E 的正部，E^+ 的元素称为 E 的正元。

2) 对 $f \in E$，记 $f^+ = f \vee \theta$，$f^- = (-f) \vee \theta$，$|f| = f \vee (-f)$。

3) 若 $x, y \in E$ 且满足 $|x| \wedge |y| = \theta$，则称 x 和 y 是不交的，记作 $x \perp y$。

对于 Riesz 空间，有如下简单性质。

引理 2.4 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，对 E 中的 f，g 和 h，有

1) $f = f^+ - f^-$，$f^+ \wedge f^- = \theta$，$|f| = f^+ + f^-$，因此 $|f| \in V^+$。

2) $(f \vee g) + (f \wedge g) = f + g$，$(f \vee g) - (f \wedge g) = |f - g|$。

3) $(f + g)^+ \le f^+ + g^+$，$(f + g)^- \le f^- + g^-$，$\big||f| - |g|\big| \le |f + g| \le |f| + |g|$。

4) $|f\vee h-g\vee h|\le|f-g|$。

定义 2.5 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，且 E 的子集与 E 有相同的序关系。

1) 设 V 是 E 的线性子空间。如果对 V 的任意两个元素 f、g，有 $f\vee g$ 与 $f\wedge g$ 属于 V，则称 V 为 E 的 Riesz 子空间。

2) 设 S 是 E 的子集。如果对任意 g， $f\in S$，当 $f\in S$ 且 $|g|\le|f|$，有 $g\in S$，则称 S 为实心的。

3) 设 A 是 E 的子集。如果 A 是 E 的一个实心的线性子空间，则称 A 为 E 的理想。

现在回顾 Riesz 空间中的两个重要概念，向上集和向下集。

定义 2.6 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，D 是 E 的非空子集。如果对 D 中任意两个元素 f 和 g，存在一个元素 $h\in D$，使得 $h\ge f\vee g$，则称 D 为向上集，记为 $D\uparrow$。类似地可定义向下集，记为 $D\downarrow$。

下面，回顾 Riesz 空间中序列收敛的有关概念。

定义 2.7 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，$\{f_n\}$ 为 E 中序列。如果 $f_1\le f_2\le\cdots$，则称 $\{f_n\}$ 为单调递增的，记为 $f_n\uparrow$。如果 $f_1\ge f_2\ge\cdots$，则称 $\{f_n\}$ 为单调递减的，记为 $f_n\downarrow$。如果 $f_n\uparrow$， $f=\sup f_n$ 存在，则称 $\{f_n\}$ 单增趋于 f，记为 $f_n\uparrow f$；相同地，如果 $f_n\downarrow$，并且 $\inf f_n$ 在 E 中存在，则称 f_n 单减趋于 f，记为 $f_n\downarrow f$。如果 $f_n\uparrow f$ 或 $f_n\downarrow f$，则称 $\{f_n\}$ 单调趋于 f。

定义 2.8 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，$\|\bullet\|$ 为 E 上的一个范数。如果对任意 $x,y\in E$，且 $|x|\le|y|$，都有 $\|x\|\le\|y\|$，则称 $\|\bullet\|$ 为 Riesz 范数(或格范数)。一个被赋予 Riesz 范数的空间叫做赋范 Riesz 空间。

定义 2.9 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，$\{f_n\}$ 为 E 中序列，$f\in E$。若存在 E 中单减趋于零的序列 $\{p_n\}$ (即 $p_n\downarrow\theta$)，使得对任意自然数 n，都有 $|f_n-f|\le p_n$，则称 $\{f_n\}$ 序收敛于 f，也称 f 为 $\{f_n\}$ 的序极限，记为 $f_n\xrightarrow{order}f$。对于 E 中序列 $\{g_n\}$，若存在 $g\in E$，使得 $g_n\xrightarrow{order}g$，则称 $\{g_n\}$ 序收敛。

定义 2.10 [4]设 E 是一个 Riesz 空间，$\theta<u\in E$，$\{f_n\}$ 为 E 中序列，如果对任意的数 $\varepsilon>0$，存在 $n(\varepsilon)$，使得当 $n>n(\varepsilon)$ 时，有 $|f-f_n|\le\varepsilon u$，则称 $\{f_n\}$ u-一致收敛到 f，记为 $f_n\xrightarrow{u\text{-}uniform}f$。等价地，$f_n\xrightarrow{u\text{-}uniform}f$ 当且仅当存在单减趋于零的实数列 $\{\varepsilon_n\}$，使对任意 n，有 $|f-f_n|\le\varepsilon_n u$。若对 $\forall\varepsilon>0$，当 $m,n\ge n(\varepsilon)$ 有 $|f_m-f_n|\le\varepsilon u$，则称 $\{f_n\}$ 是 u-uniformly Cauchy 列。

现在，回顾模糊赋范 Riesz 空间的概念和一些性质。首先回顾模糊赋范线性空间的一些概念和性质。

定义 2.11 [7]设 E 为数域 F 的线性空间。设 N 为 $E\times\mathbb{R}$ 的模糊子集，如果对任意的 $x,y\in E$ 和 $c\in F$，满足：

(N1) $N(x,t)=0$； $\forall t\in\mathbb{R}$ 与 $t\le 0$；

(N2) $N(x,t)=1$， $\forall t\ge 0\in\mathbb{R}$，当且仅当 $x=\theta$；

(N3) $N(cx,t)=N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)$； $\forall t\in\mathbb{R}$， $t>0$ 和 $c\neq 0$；

(N4) $N(x+y,t+s)\ge\min\{N(x,s),N(y,t)\}$，其中 $s,t\in\mathbb{R}$；

(N5) $N(x,.)$ 是 $\mathbb{R}$ 上一个非递减函数，且 $\lim_{t\to\infty}N(x,t)=1$。

则称 N 为 E 上的模糊范数，并且 (E,N) 是一个模糊赋范线性空间。

模糊赋范线性空间中有一个重要定理——分解定理。

引理 2.12 [7]设 (E,N) 为一个模糊赋范空间，且满足条件：

(N6) $N(x,t)>0$， $\forall t>0$，就有 $x=\theta$。

令 $\|x\|_\alpha=\inf\{t>0:N(x,t)\ge\alpha\}$， $\alpha\in(0,1)$。

则 $\{\|\cdot\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\}$ 是 E 上的一个单增范数族。称这个范数为 E 上的 α -范数。

引理 2.13 [7]令 (E,N) 是一个模糊赋范线性空间，且满足(N6)和条件：

(N7) 假设对 $x\neq 0$，$N(x,\bullet)$ 是 R (实数集)上的一个连续泛函并且在 R 的子集 $\{t:0<N(x,t)<1\}$ 上是严格单调递增的。

令 $N':E\times R\to[0,1]$ 是一个如下定义的泛函：

$$N'(x,t)=\begin{cases}\vee\{\alpha\in(0,1):\|x\|_\alpha\le t\} & (x,t)\neq(\theta,0)\\ 0 & (x,t)=(\theta,0)\end{cases}$$

则：

1) N' 是 E 上的一个模糊范数，

2) $N'=N$。

定义 2.14 [9]设 (E,N) 是一个模糊赋范空间，$\{x_n\}$ 为 E 中序列，$x\in E$。若对所有 $t>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}N(x_n-x,t)=1$，则称 $\{x_n\}$ 按模糊范数收敛于 x，也称 x 为序列 $\{x_n\}$ 的模糊范极限，记为 $x_n\xrightarrow{FN}x$。

定义 2.15 设 (E,N) 是一个模糊赋范空间，$\{x_n\}_n$ 为 (E,N) 中的序列。若对每个 $\alpha\in(0,1)$ 和 $t>0$，$\exists n_0$，使得当 $m,n\ge n_0$，有 $N(x_m-x_n,t)\ge 1-\alpha$，则称 $\{x_n\}_n$ 为模糊范柯西序列。

定义 2.16 设 (E,N) 是一个模糊赋范空间，F 为 E 的子集。若对 F 中任一序列 $\{f_n\}$，只要 $f_n\xrightarrow{FN}f$，就有 $f\in F$，则称 F 为模糊闭集。

现在，回顾本文的重要概念——模糊赋范 Riesz 空间。

定义 2.17 [9]设 $(E,\le)$ 是一个 Riesz 空间。N 为 E 上模糊范数。如果 N 满足条件：

(N8) 当 $|x|\le|y|$，有 $N(x,t)\ge N(y,t)$，其中 $x,y\in E$，$s,t\in\mathbb{R}$。

则称 N 为 Riesz 模糊范数，并且称 $(E,\le,N)$ 为一个模糊赋范 Riesz 空间(以下简称 FNRS)。

关于模糊赋范 Riesz 空间，有如下主要性质。

引理 2.18 [9]在模糊赋范 Riesz 空间 E 中，若 $f_n\xrightarrow{FN}f$ 且 $g_n\xrightarrow{FN}g$，则：

1) $f_n+g_n\xrightarrow{FN}f+g$；$f_n-g_n\xrightarrow{FN}f-g$

2) $f_n\vee g_n\xrightarrow{FN}f\vee g$；$f_n\wedge g_n\xrightarrow{FN}f\wedge g$

注：由以上引理，容易得出，若 $f_n\xrightarrow{FN}f$，则有 $f_n^+\xrightarrow{FN}f^+$、$f_n^-\xrightarrow{FN}f^-$ 和 $|f_n|\xrightarrow{FN}|f|$。

3. 模糊赋范 Riesz 空间中的分解定理

本节主要讨论模糊赋范 Riesz 空间中的分解定理。

定理 3.1 设 $(E,\le,N)$ 为一个模糊赋范 Riesz 空间，且满足(N6)条件，令 $\|x\|_\alpha=\inf\{t>0:N(x,t)\ge\alpha\}$，$\alpha\in(0,1)$，则 $\{\|\cdot\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\}$ 是 E 上的一个单增 Riesz 范数族。我们将这个 Riesz 范数称为 E 上的 α -Riesz 范数。

证明：由模糊 Riesz 范数的定义知，(E,N) 为模糊赋范线性空间，且 N 满足条件(N6)，由引理 2.12 知，$\|\cdot\|_\alpha$ 为 E 上的一族单增范数族。因此，为证本定理，只须证若 $x,y\in E$，且 $|x|\le|y|$，则有 $\|x\|_\alpha\le\|y\|_\alpha$。

事实上，由(N8)知若 $|x|\le|y|$，则 $N(x,t)\ge N(y,t)$，所以有 $\|x\|_\alpha=\wedge\{t:N(x,t)\ge\alpha\}\le\|y\|_\alpha=\wedge\{t:N(y,t)\ge\alpha\}$。故 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 E 上的 α -Riesz 范数。

定理 3.2 设 $(E,\le,N)$ 是一个满足(N6)和(N7)的模糊赋范 Riesz 空间。令 $\|x\|_\alpha=\inf\{t>0:N(x,t)\ge\alpha\}$，$\alpha\in(0,1)$，并且 $N':U\times R\to[0,1]$ 是一个如下定义的泛函：

$$N'(x,t)=\begin{cases}\vee\{\alpha\in(0,1):\|x\|_\alpha\le t\} & (x,t)\neq(0,0)\\ 0 & (x,t)=(0,0)\end{cases}$$

则：

1) N' 是 E 上的一个 Riesz 模糊范数，

2) $N'=N$。

证明：由引理 2.13 知 N' 是 E 上的一个模糊范数，因此，为证本定理，只需证当 $|x|\le|y|$ 有 $N'(x,t)\ge N'(y,t)$。

事实上，由定理 3.1 知，若 $|x|\le|y|$，有 $\|x\|_\alpha\le\|y\|_\alpha$，所以当 $(x,t)\ne(0,0)$ 时，$N'(x,t)=\vee\left\{\alpha\in(0,1):\|x\|_\alpha\le t\right\}\ge N'(y,t)=\vee\left\{\alpha\in(0,1):\|y\|_\alpha\le t\right\}$；当 $(x,t)\ne(0,0)$ 时，$N'(x,t)=N'(y,t)=0$。所以当 $|x|\le|y|$ 有 $N'(x,t)\ge N'(y,t)$，本定理得证。

4. 模糊赋范 Riesz 空间中的各种收敛

本节主要讨论了模糊赋范 Riesz 空间中的各种收敛性质，给出了模糊赋范 Riesz 空间中向上集(向下集)收敛的概念，并讨论其相关性质。

定理 4.1 在模糊赋范 Riesz 空间 E 中，若 $f_n\xrightarrow{FN}f$ 且 $g_n\xrightarrow{FN}g$。则：

1) 若对任意的 n，都有 $f_n\ge g_n$，则 $f\ge g$。因此，若 $f_n\ge\theta$ 对所有 n 成立，则 $f\ge\theta$。

2) 若 D 是模糊赋范 Riesz 空间 E 的一个子集，使得 $f_n\perp h$ 对所有 $h\in D$ 和所有 n 成立，则 $f\perp h$ 对所有 $h\in D$ 成立。

证明：

1) 首先证明：若 $f_n\ge\theta$ 对任意 n 成立，则 $f\ge\theta$。事实上，由引理 2.4 知

$$\begin{aligned}|f-f_n|&=|f_n-f|=|-f+f_n|=|-f-(-f_n)|\\&\ge|(-f)\vee\theta-(-f_n)\vee\theta|\\&=|f^- - f_n^-|\end{aligned}$$

由(N8)知，对 $\forall t>0$，有

$$N(f-f_n,t)\le N\left(f^- - f_n^-,t\right)\le 1。$$

由于对 $\forall t>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}N(f-f_n,t)=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}N\left(f^- - f_n^-,t\right)=1,(\forall t>0)$。又因为 $f_n^-=\theta$ 对所有 n 成立，所以 $\forall t>0$，有

$$1=\lim_{n\to\infty}N\left(f_n^- - f^-,t\right)=\lim_{n\to\infty}N\left(-f^-,t\right)=N\left(f^-,t\right)$$

即 $\forall t>0$，有 $N\left(f^-,t\right)=1$，故 $f^-=\theta$，从而由 $\theta=f^-=(-f)\vee\theta$ 知 $-f\le\theta$，因此 $f\ge\theta$。

下证：$f\ge g$。由于 $f_n\xrightarrow{FN}f$，$g_n\xrightarrow{FN}g$，故 $f_n-g_n\xrightarrow{FN}f-g$。而 $f_n-g_n\ge\theta$，故 $f-g\ge\theta$。即 $f\ge g$。

2) 由引理 2.18 的注知，$|f_n|\xrightarrow{FN}|f|$，显然，若令 $h_n=|h|$，$\forall n$，则 $h_n\xrightarrow{FN}|h|$。显然，对 $\forall n$，$|f_n|\wedge h_n$，故由引理 2.18 (2)知 $\theta=|f_n|\wedge h_n\xrightarrow{FN}|f|\wedge|h|$。即 $|f|\wedge|h|=\theta$，即 $f\perp h$。

定理 4.2 若 E 是 FNRS，$f_n\in E$，则

1) $f_n\uparrow$ 并且 $f_n\xrightarrow{FN}f$，则 $f_n\uparrow f$。对单调递减的序列也成立。

2) 若 $f_n\xrightarrow{u\text{-}uniform}f$，则 $f_n\xrightarrow{FN}f$。

3) 若 f_n 是 u-uniformly Cauchy 且 $f_n\xrightarrow{FN}f$，则 $f_n\xrightarrow{u\text{-}uniform}f$。

证明：1) 由于 $f_n\uparrow$，故对 $\forall m$，当 $n\ge m$ 时有 $f_n\ge f_m$。由 $f_n\xrightarrow{FN}f$ 和定理 4.1 的(1)知，$f\ge f_m$。因此 f 为 $\{f_m\}$ 的上界。下证，f 为 $\{f_m\}$ 的上确界。事实上，若 g 为 $\{f_m\}$ 的上界，即对 $\forall m$ 有 $f_m\le g$。再由定理 4.1 的(1)知 $f\le g$，因此，f 是 $\{f_m\}$ 的最小上界，即 $f=\sup\{f_m\}$，从而 $f_n\uparrow f$。

若 $g_n \downarrow$，且 $g_n \xrightarrow{FN} g$，则 $-g_n \uparrow$，且 $-g_n \xrightarrow{FN} -g$。由以上定理知 $-g = \sup\{-g_n\}$，即 $g = \inf\{g_n\}$，从而 $g_n \downarrow g$。

2) 由于 $f_n \xrightarrow{u\text{-uniform}} f$，故存在单减趋于零的数列 $\{\varepsilon_n\}$，使得对 $\forall n$，有 $|f_n - f| \le \varepsilon_n u$，由(N8)知，对 $\forall t > 0$，有

$$1 \ge N(f_n - f, t) \ge N(\varepsilon_n u, t) = N\left(u, \frac{t}{\varepsilon_n}\right), \tag{1}$$

而 $\frac{t}{\varepsilon_n} \to \infty \ (n \to \infty)$。故 $\lim\limits_{n\to\infty} N\left(u, \frac{t}{\varepsilon_n}\right) = 1$。因此，由不等式(1)知 $\lim\limits_{n\to\infty} N(f_n - f, t) = 1$，$\forall t > 0$。即 $f_n \xrightarrow{FN} f$。

3) 对 $\forall m, n$，有

$$|f_m - f| = |f_m - f_n + f_n - f| \ge \big||f_m - f_n| - |f_n - f|\big|,$$

从而由(N8)知，对 $\forall t > 0$，有

$$1 \ge N\big(|f_m - f_n| - |f_n - f|, t\big) \ge N(f_m - f, t),$$

再由 $f_m \xrightarrow{FN} f$ 及上述不等式知，对 $\forall t > 0$，有

$$\lim_{m\to\infty} N\big(|f_m - f_n| - |f_n - f|, t\big) = 1,$$

即

$$|f_m - f_n| \xrightarrow{FN} |f_n - f|, \quad (m \to \infty), \tag{2}$$

由 $\{f_n\}$ 为 u-uniformly Cauchy 列知，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists n(\varepsilon)$，$\forall i, j \ge n(\varepsilon)$，有

$$|f_i - f_j| \le \varepsilon u \tag{3}$$

从而，当 $m, n \ge n(\varepsilon)$，由(2)、(3)及定理 4.1(1)知 $|f_n - f| \le \varepsilon u$，即 $f_n \xrightarrow{u\text{-uniform}} f$。

定理 4.3 在 FNRS 中，若 $f_n \xrightarrow{FN} f$ 并且 $f_n \xrightarrow{order} g$，则 $f = g$。

证明：不妨设 $g = \theta$，因此，要证本定理，只需证 $f = \theta$。下证 $f = \theta$。事实上，由引理 2.17 知，$|f_n| \xrightarrow{FN} |f|$ (1)，由 $f_n \xrightarrow{order} g = \theta$ 知，存在 $p_n \downarrow \theta$，使得对 $\forall n$ 有 $|f_n| \le p_n$。对任意的 n，当 $m \ge n$ 时，有 $|f_m| \le p_m \le p_n$。由(1)式及定理 4.1(1)有 $|f| \le p_n$，$\forall n$。故 $\theta \le |f| \le \inf\{p_n\} = \theta$，即 $|f| = \theta$，即 $f = \theta$。

下面介绍模糊赋范 Riesz 空间中向上集(向下集)收敛的性质。

定义 4.4 设 E 是 FNRS，D 是 E 的一个向上集，若对 $\forall t > 0$ 和 $\forall \alpha \in (0,1)$，$\exists f(\alpha) \in D$，$\exists f_0 \in E$，使得当 $f \in D$ 且 $f \ge f(\alpha)$ 时有 $N(f - f_0, t) \ge 1 - \alpha$，则称 $D \xrightarrow{FN} f_0$。类似可定义向下集模糊范数收敛。

定理 4.5 设 E 是 FNRS，D 是 E 的一个向上集且 $D \xrightarrow{FN} f_0$，则 $f_0 = \sup D$。若 D 是 E 的一个向下集且 $D \xrightarrow{FN} f_0$，则 $f_0 = \inf D$。

证明：首先证明 f_0 是 D 的上界。$\forall f^* \in D$，下证明 $f^* \le f_0$。因为 $D \xrightarrow{FN} f_0$，所以对 $\alpha = \frac{1}{2}$，$\exists f\left(\frac{1}{2}\right) \in D$，使得 $f \in D$ 且 $f \ge f\left(\frac{1}{2}\right)$ 时有

$$N(f_0 - f, t) \ge 1 - \frac{1}{2},$$

下面选取 $f_1 \in D$，使得 $f_1 \ge f^* \vee f\left(\frac{1}{2}\right)$，故 $f_1 \ge f^*$ 且 $f_1 \ge f\left(\frac{1}{2}\right)$，有

$$N\left(f_0 - f_1, t\right) \geq \frac{1}{2},$$

接下来，对 $\alpha = \frac{1}{2^2}$， $\exists f\left(\frac{1}{2^2}\right) \in D$，使得 $f \in D$ 且 $f \geq f\left(\frac{1}{2^2}\right)$ 时有

$$N\left(f_0 - f, t\right) \geq 1 - \frac{1}{2^2},$$

下面选取 $f_2 \in D$，使得 $f_2 \geq f_1 \vee f\left(\frac{1}{2^2}\right)$，故 $f_2 \geq f_1$ 且 $f_2 \geq f\left(\frac{1}{2^2}\right)$，故

$$N\left(f_0 - f_2, t\right) \geq 1 - \frac{1}{2^2},$$

用此方法做下去，可得在 D 中序列 $f^* \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ 使得

$$N\left(f_0 - f_n, t\right) \geq 1 - \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

故 $f_n \uparrow$，且 $f_n \xrightarrow{FN} f_0$。由定理 4.1(1)和定理 4.2(1)知 $f^* \leq f_0$，因为 f^* 是 D 中任意的，故 f_0 是 D 的一个上界。下证明 f_0 是 D 最小的上界。对 D 中任意其他上界 g，则对 n，有 $f_n \leq g$，又因为 $f_n \xrightarrow{FN} f_0$，由定理 4.1(1)得 $f_0 \leq g$，故 f_0 是 D 最小上界， $f_0 = \sup D$。

类似可证明向下集。

参考文献

[1] Riesz, F. (1930) Sur la decomposition des oprations fonctionnelles linaires. *Attidel Congresso Internazionale dei Matematici*, **3**, 143-148.

[2] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. (2006) Positive Operators. Academic Press, New York,

[3] Nieberg, P.M. (1991) Banach Lattices. Springer, Berlin Heidelberg.

[4] Zaanen, A.C. (1997) Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces. Springer, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-60637-3

[5] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[6] Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A. (1972) On Fuzzy Mapping and Control. *IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics*, **2**, 30-34. https://doi.org/10.1109/TSMC.1972.5408553

[7] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **11**, 687-705.

[8] Zadeh, L.A. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Orderings. *Information Sciences*, **3**, 177-200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1

[9] Park, C., *et al*. (2018) Riesz Fuzzy Normed Spaces and Stability of a Lattice Preserving Functional Equation. .*Journal of Computational Analysis and Applications*, **24**, 569-579.