Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 2080-2094
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114226

Hans汉斯

含Φ-Laplace算子和奇异非线性项的拟线性椭圆型方程正解的分歧性

马金鸽

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2022年3月24日；录用日期：2022年4月18日；发布日期：2022年4月27日

摘 要

本文研究了一类具有Φ-Laplace算子和奇异非线性项的拟线性椭圆型方程正解的存在性及相关问题。利用临界点理论、截断技巧和比较原理，证明了解的分歧性；进一步得到了最小正解的存在性及其关于参数λ的单调性和连续性。

关键词

拟线性椭圆型方程，奇异非线性项，分歧性，截断技巧

Bifurcation of Positive Solutions for Quasilinear Elliptic Equations with Φ-Laplacian Operator and Singular Nonlinearity

Jinge Ma

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 24th, 2022; accepted: Apr. 18th, 2022; published: Apr. 27th, 2022

Abstract

In this paper, we study the existence of positive solutions and related problems for a class of quasilinear elliptic equations with Φ-Laplacian operator and singular nonlinearity. We obtain the bifurcation of solutions by using critical point theory, appropriate truncation and comparison tech-

文章引用: 马金鸽. 含 Φ-Laplace 算子和奇异非线性项的拟线性椭圆型方程正解的分歧性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 2080-2094. DOI: 10.12677/aam.2022.114226

niques. Furthermore, we obtain the existence of the smallest positive solution and the monotonicity and continuity with respect to parameter λ.

Keywords

Quasilinear Elliptic Equation, Singular Nonlinearity, Bifurcation, Truncation Techniques

1. 引言

考虑如下具有 Φ-Laplace 算子的奇异拟线性椭圆型方程正解的存在性、多重性和分歧性

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = \lambda u^{-\eta} + f(x,u), & x\in\Omega, \\ u>0, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N\,(N\ge 3)$ 是带有 C^2 边界的有界区域，$\Delta_\Phi u=\mathrm{div}\left(\phi(|\nabla u|)\nabla u\right)$ 是 Φ-Laplace 算子，$\Phi(t)=\int_0^t s\phi(s)\mathrm{d}s$，$\lambda>0$，$0<\eta<1$。

在过去几十年里，已有一些学者研究了如下形式的拟线性椭圆型方程

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = f_\lambda(u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $f_\lambda(u)$ 关于 u 是非奇异的，如文献[1]等。当 $\Omega\subset\mathbb{R}^N\,(N\ge 2)$ 是带有光滑边界的有界区域，$f_\lambda(u)=\lambda|u|^{\ell^*-2}u+f(x,u)$，$\ell^*=\dfrac{N\ell}{N-\ell}(1<\ell<N)$，$\lambda>0$ 时，文献[2]利用对称山路定理和集中紧性原理证明了方程(1.1)非平凡解的多重性。对于 $\Omega=\mathbb{R}^N$，Fukagai 等学者在文献[3]中利用变分法证明了方程(1.1)正解的存在性，其中 $f_\lambda(u)$ 包含临界增长情形。

关于椭圆型方程解的分歧性的研究，Ambrosetti 等在文献[4]中首先建立了半线性 Dirichlet 问题解的分歧性，然后学者 Guo 等推广到 p-Laplace 算子，如文献[5]，其中 $f_\lambda(u)=\lambda u^s+u^r$，$0<s<p-1<r$，$\lambda>0$。

对于非线性项具有奇异的情形，研究成果也有很多，如文献[6] [7] [8]。当 $1<q<p$，在文献[8]中，Papageorgiou 等利用临界点理论和截断技巧证明了如下 (p,q)-Laplace 方程正解的存在性和分歧性

$$\begin{cases} -\Delta_p u-\Delta_q u = \lambda u^{-\eta} + f(x,u), & x\in\Omega, \\ u>0, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N\,(N\ge 3)$ 是带有 C^2 边界的有界区域，$\lambda>0$，$0<\eta<1$，$f(x,u)$ 关于 u 在无穷远处呈线性增长。

现在给出函数 ϕ 和函数 f 的基本假设。函数 $\phi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$，$\phi\in C^2(\Omega)$，且满足下列条件

(ϕ_1) 当 $t\to 0^+$ 时，$t\phi(t)\to 0$；当 $t\to+\infty$ 时，$t\phi(t)\to\infty$；

(ϕ_2) $t\phi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增的；

(ϕ_3) 存在常数 $\ell, m \in (1, N)$，使得对于任意的 $t > 0$，成立

$$0 < \ell - 1 := \inf_{t>0} \frac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} \le \sup_{t>0} \frac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} =: m - 1 < \ell^* - 1, \ell^* = \frac{N\ell}{N-\ell};$$

(ϕ_4) 存在常数 $c_0 > 0$，使得 $\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{m-2}} \ge c_0$。

进一步，假设

$H(f)$：$f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数，当 $t \le 0$ 时，$f(x,t) = 0$，且

1) 存在函数 $a(x) \in L^\infty(\Omega)$，$r \in (m, \ell^*)$，使得 $f(x,t) \le a(x)(1+t^{r-1})$，$\forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}_+$；

2) $\lim_{t\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^m} = +\infty$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 一致成立，其中 $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$；

3) 存在 $\tau \in \left(\frac{N(r-\ell)}{\ell}, \ell^*\right)$，$\tau > \ell$，使得 $0 < c \le \liminf_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)t - mF(x,t)}{t^\tau}$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 一致成立；

4) $\lim_{t\to0^+} t^{1-\ell} f(x,t) = 0$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 一致成立，存在 $\beta \in (\ell, m)$，$\beta < \tau$，使得 $\liminf_{t\to0^+} f(x,t)t^{1-\beta} \ge \hat{\eta} > 0$；

5) 对于任意的 $\sigma > 0$，存在 $\hat{\xi}_\sigma > 0$，使得对于几乎所有的 $x \in \Omega$，函数

$$t \to f(x,t) + \hat{\xi}_\sigma t^{m-1}$$

在 $[0,\sigma]$ 上是非减的。

注记 1.1：由条件 $H(f)$ 2)，3)知，$f(x,t)$ 在 $+\infty$ 处为 $(m-1)$ 次超线性增长，故不满足一般的(AR)条件。例如，考虑函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 不依赖于 x，常数 $C > 0$，$f(t)$ 定义为

$$f(t) = \begin{cases} Ct^{\beta-1}, & 0 \le t \le 1, \\ t^{m-1}\ln t + Ct^{\ell-1}, & t > 1. \end{cases}$$

容易验证函数 $f(t)$ 满足条件 $H(f)$ 但不满足(AR)条件。

在叙述本文的主要结果之前，先定义下列几类集合

$$\operatorname{int} C_+ = \left\{u \mid u \in C_+ : u(x) > 0, \forall x \in \Omega; \frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0, \forall x \in \partial\Omega\right\},$$

其中 $n(x)$ 是边界 $\partial\Omega$ 上在 x 点处的单位外法向量，$C_+ = \left\{u \mid u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u \ge 0, x \in \overline{\Omega}\right\}$；定义 $\Lambda = \{\lambda > 0, S_\lambda \ne \varnothing\}$，其中 $S_\lambda = \left\{u \mid u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{是问题}(P_\lambda)\text{的正解}\right\}$；$K_\varphi := \left\{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) : \varphi'(u) = 0\right\}$。$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 的定义将在下节中给出。

定理 1.1：设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，则存在 $\lambda^* > 0$，使得下列结论成立：

a) 当 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 时，问题(P_λ)至少存在两个正解 $\overline{u}, \hat{u} \in \operatorname{int} C_+$，且 $\overline{u} \le \hat{u}$，$\overline{u} \ne \hat{u}$；

b) 当 $\lambda = \lambda^*$ 时，问题(P_λ)至少存在一个正解 $u_{\lambda^*} \in \operatorname{int} C_+$；

c) 当 $\lambda > \lambda^*$ 时，问题(P_λ)无正解。

定理 1.2：设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，则当 $\lambda \in (0, \lambda^*]$ 时，问题(P_λ)存在最小正解 $u_\lambda^* \in \operatorname{int} C_+$。

定理 1.3：设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，若 $\lambda \in (0, \lambda^*]$，$u_\lambda^* \in C_0^1(\overline{\Omega})$ 为问题(P_λ)的最小正解，则 $\lambda \mapsto u_\lambda^*$ 是严格增和左连续的，即若 $\mu < \lambda$，则 $u_\lambda^* - u_\mu^* \in \operatorname{int} C_+$，且对任意的 $\lambda_n \to \lambda^-(n \to \infty)$，有 $u_{\lambda_n}^* \to u_\lambda^* \in C_0^1(\overline{\Omega})$。

2. 预备知识和基本引理

符号： 记 C 表示正常数，在不同处出现时可能不相同。

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是带有 C^2 边界的有界区域，记 $L_\Phi(\Omega)=\left\{u\,|\,u:\Omega\to\mathbb{R}\text{是可测的},\int_\Omega\Phi(|u|)\mathrm{d}x<\infty\right\}$，在 $L_\Phi(\Omega)$ 上定义 Luxemburg 范数 $\|u\|_\Phi=\inf_k\left\{k>0\,|\int_\Omega\Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x\le 1\right\}$。

记 $W^{1,\Phi}(\Omega)=\left\{u\,|\,u\in L_\Phi(\Omega),D_iu\in L_\Phi(\Omega),i=1,\cdots,N\right\}$，在 $W^{1,\Phi}(\Omega)$ 上定义范数

$$\|u\|_{1,\Phi}=\|u\|_\Phi+\|\nabla u\|_\Phi.$$

记 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,\Phi}(\Omega)$ 中的闭包。易知，$L_\Phi(\Omega)$ 和 $W^{1,\Phi}(\Omega)$ 是可分的、自反的 Banach 空间(参见文献[9])。

根据(ϕ_3)和 Poincaré 不等式可以得到定义在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 上的范数 $\|u\|:=\|\nabla u\|_\Phi$ 与 $\|u\|_{1,\Phi}$ 等价。

若

$$\int_0^1 s^{-\frac{N+1}{N}}\Phi^{-1}(s)\mathrm{d}s<+\infty,\quad \int_1^{+\infty}s^{-\frac{N+1}{N}}\Phi^{-1}(s)\mathrm{d}s=+\infty,$$

则称 Φ_* 是 Φ 的 Sobolev 共轭 N-函数，其中 Φ_* 满足 $\Phi_*^{-1}(t)=\int_0^t s^{-\frac{N+1}{N}}\Phi^{-1}(s)\mathrm{d}s$，$t\ge 0$，且当 $t<0$ 时，$\Phi_*(t)=\Phi_*(-t)$。

记 $L_\Phi(\Omega)$ 的对偶空间为 $L_{\tilde\Phi}(\Omega)$，即 $\left(L_\Phi(\Omega)\right)^*=L_{\tilde\Phi}(\Omega)$ (参见文献[9])，且 $\tilde\Phi(t)=\max_{s\ge0}\left\{ts-\Phi(s)\right\}$，$t\ge 0$。

注记 2.1： 如果对于所有的 $\nu>0$，都有 $\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi(\nu t)}{\Phi_*(t)}=0$，则称 N-函数 Ψ 在无穷远处比 Φ_* 增长得更慢，记 $\Psi\ll\Phi_*$。如果 $\Psi\ll\Phi_*$，则 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\rightarrowtail\rightarrowtail L_\Psi(\Omega)$ (参见文献[10]，符号“$\rightarrowtail\rightarrowtail$”表示“紧嵌入”，符号“$\rightarrowtail$”表示“连续嵌入”)。进一步，有 $W^{1,\Phi}(\Omega)\rightarrowtail L_{\Phi_*}(\Omega)$。在条件($\phi_1$)~($\phi_3$)下，还有：$L^m(\Omega)\rightarrowtail L_\Phi(\Omega)\rightarrowtail L^\ell(\Omega)$，$L_{\Phi_*}(\Omega)\rightarrowtail L^{\ell^*}(\Omega)$ (参见文献[11])。

注记 2.2： 在条件(ϕ_1)~(ϕ_3)下，可以推得

$$\ell-2\le\frac{t\phi'(t)}{\phi(t)}\le m-2,\ \ell\le\frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)}\le m,\ t>0.$$

此外，还可以得到

$$t^2\phi''(t)\le(m-4)t\phi'(t)+(m-2)\phi(t),$$
$$t^2\phi''(t)\ge(\ell-4)t\phi'(t)+(\ell-2)\phi(t),\ t\ge 0.$$

下面给出本文需要的几个基本引理。

引理 2.1 ([3])： 设(ϕ_1)~(ϕ_3)成立，对 $t\ge 0$，令

$$\eta_0(t)=\min\left\{t^{\ell-2},t^{m-2}\right\},\quad \eta_1(t)=\max\left\{t^{\ell-2},t^{m-2}\right\},$$

则对于任意 $\rho,t>0$，成立 $\eta_0(t)\phi(\rho)\le\phi(\rho t)\le\eta_1(t)\phi(\rho)$。

引理 2.2 ([3])： 设(ϕ_1)~(ϕ_3)成立，对 $t\ge 0$，令

$$\eta_2(t)=\min\left\{t^\ell,t^m\right\},\quad \eta_3(t)=\max\left\{t^\ell,t^m\right\},$$

则对于任意 $\rho, t>0$，$u\in L_\Phi(\Omega)$，成立

$$\eta_2(t)\Phi(\rho)\le\Phi(\rho t)\le\eta_3(t)\Phi(\rho),\ \eta_2(\|u\|_\Phi)\le\int_\Omega\Phi(u)\mathrm{d}x\le\eta_3(\|u\|_\Phi).$$

引理 2.3 ([11])： 设(ϕ_1)~(ϕ_3)成立，则 $-\Delta_\Phi$ 是(S_+)型算子，即对任意给定的序列 $\{u_n\}\subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，若 $u_n\rightharpoonup u$，且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle-\Delta_\Phi u_n,u_n-u\rangle\le 0$，则在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中有 $u_n\to u$。

对 $t\in\mathbb{R}$，记 $t^\pm=\max\{0,\pm t\}$；对 $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，定义 $u^\pm(x)=u(x)^\pm$，那么

$$u^\pm\in W_0^{1,\Phi}(\Omega),\ u=u^+-u^-,\ |u|=u^++u^-.$$

定义 2.1： 对给定 $h_1,h_2:\Omega\to\mathbb{R}$ 是可测函数，如果对每一个紧集 $K\subset\Omega$，存在常数 $c_K>0$，使得对几乎处处的 $x\in K$，成立

$$0<c_K\le h_2(x)-h_1(x),$$

则记 $h_1\prec h_2$。

给定集合 $S\subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，如果对每一对 $(u_1,u_2)\in S\times S$，都可以找到 $u\in S$，使得 $u\le u_1$，$u\le u_2$，则称集合 S 为下有向集。

给定 $u,v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，且 $u\le v$，定义

$$[u,v]=\{h\in W_0^{1,\Phi}(\Omega):u(x)\le h(x)\le v(x),a.e.\ x\in\Omega\},$$
$$[u)=\{h\in W_0^{1,\Phi}(\Omega):u(x)\le h(x),a.e.\ x\in\Omega\}.$$

定义 2.2： 设 X 是 Banach 空间，$\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$。若序列 $\{u_n\}_{n\ge1}\subset X$ 满足 $\{\varphi(u_n)\}_{n\ge1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，且当 $n\to\infty$ 时，$(1+\|u_n\|_X)\varphi'(u_n)\to 0$ (在 X^* 中)，则称序列 $\{u_n\}_{n\ge1}$ 为泛函 φ 的 Cerami 序列。若对任意 Cerami 序列 $\{u_n\}_{n\ge1}$ 都存在强收敛子列，则称泛函 $\varphi(u)$ 满足 Cerami 条件。

若函数 $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，$u\ge0$，$u\ne0$，使得对任意 $v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 且满足 $u^{-\eta}v\in L^1(\Omega)$，成立

$$\int_\Omega\phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla v\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega u^{-\eta}v\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x,$$

则函数 u 是问题(P_λ)的弱解。

容易验证，问题(P_λ)对应的能量泛函为 $J_\lambda:W_0^{1,\Phi}(\Omega)\to\mathbb{R}$

$$J_\lambda(u)=\int_\Omega\Phi(|\nabla u|)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{1-\eta}\int_\Omega|u|^{1-\eta}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x,$$

其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$。显然，奇异项的存在导致能量泛函 $J_\lambda(u)$ 不是 C^1 的，从而我们不能直接对泛函 $J_\lambda(u)$ 运用临界点理论中的极小极大定理。为了克服这一困难，我们通过研究相应的辅助问题，结合截断技巧和比较原理来去除奇性。

为此，先考虑如下纯奇异的辅助问题

$$\begin{cases}-\Delta_\Phi u=\lambda u^{-\eta}, & x\in\Omega,\\ u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\qquad (Q_\lambda)$$

考虑 Banach 空间 $C_0(\overline{\Omega})=\{u\in C(\overline{\Omega}):u|_{\partial\Omega}=0\}$，正锥 $K_+=\{u\in C_0(\overline{\Omega}):u(x)\ge0,x\in\overline{\Omega}\}$，它的非空内部为 $\operatorname{int}K_+=\{u\in K_+:\exists c_u>0,s.t.\,c_u d(x,\partial\Omega)\le u(x)\}$。

根据文献[12]中引理 14.16 知存在 $\delta>0$，使得 $d(x,\partial\Omega)\in C^2(\Omega_\delta)$，其中 $\Omega_\delta=\{x\in\overline{\Omega}:d(x,\partial\Omega)<\delta\}$。因此，$d(x,\partial\Omega)\in\operatorname{int}C_+$。再根据文献[13]的命题 4.1.22 知对 $u\in\operatorname{int}C_+$，存在常数 $0<\bar{c}_u\le\tilde{c}_u$，使得

$$\overline{c}_u d\left(x,\partial\Omega\right)\le u\le\tilde{c}_u d\left(x,\partial\Omega\right),$$

从而有 $u\in\operatorname{int}K_+$。

给定 $s_0>N$，设 $\hat{\lambda}_1$ 是 $\left(-\Delta_\Phi,W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right)\right)$ 的第一特征值，$\hat{u}_1$ 是对应的特征函数。根据正则性理论(参见文献[14])和极大值原理(参见文献[15])可得 $\hat{u}_1\in\operatorname{int}C_+$，从而有 $\hat{u}_1^{\frac{1}{s_0}}\in K_+$。再次利用文献[13]的命题 4.1.22，可以找到 $\hat{c}_u>0$，使得对任意 $u\in\operatorname{int}K_+$，有 $0\le\hat{u}_1^{\frac{1}{s_0}}\le\hat{c}_u u$，即 $u^{-\eta}\le\hat{c}_u^{\eta}\hat{u}_1^{-\frac{\eta}{s_0}}$。根据文献[16]的引理可知

$$u^{-\eta}\in L^{s_0}\left(\Omega\right).\tag{2.1}$$

引理 2.4： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)成立，对每一个 $\lambda>0$，则存在 $\underline{u}_\lambda\in\operatorname{int}C_+$ 是问题(Q_λ)的唯一解，且映射 $\lambda\mapsto\underline{u}_\lambda$ 是非减的，即若 $0<\mu<\lambda$，则 $\underline{u}_\mu\le\underline{u}_\lambda$。

证明： 首先，证明问题(Q_λ)存在解。根据文献[17]中引理 3.6 可得，对任意 $z>0$，下述拟线性 Dirichlet 问题存在唯一解 $\tilde{u}\in W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right)$

$$\begin{cases}-\Delta_\Phi u=z, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

进一步，由正则性理论和极大值原理可得 $\tilde{u}\in\operatorname{int}C_+$。

固定 $\lambda>0$，则存在 $z_0\in\left(0,1\right)$，使得 $0<\frac{z}{\tilde{u}^{-\eta}}\le\lambda$，$z\in\left(0,z_0\right)$，故 $-\Delta_\Phi\tilde{u}=z\le\lambda\tilde{u}^{-\eta}$。

接下来，考虑如下截断函数

$$g_\lambda\left(x,u\left(x\right)\right)=\begin{cases}\lambda\tilde{u}\left(x\right)^{-\eta}, & u\left(x\right)\le\tilde{u}\left(x\right),\\ \lambda u\left(x\right)^{-\eta}, & \tilde{u}\left(x\right)<u\left(x\right),\end{cases}$$

那么方程 $-\Delta_\Phi u=g_\lambda\left(x,u\right)\left(x\in\Omega\right)$ 对应的能量泛函为

$$I_\lambda\left(u\right)=\int_\Omega\left(\Phi\left(\left|\nabla u\right|\right)-G_\lambda\left(x,u\right)\right)\mathrm{d}x,\ u\in W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right),$$

其中 $G_\lambda\left(x,t\right)=\int_0^t g_\lambda\left(x,s\right)\mathrm{d}s$。容易验证泛函 $I_\lambda\left(u\right)$ 是 C^1、强制且弱下半连续的，因此，存在极小值点 $\underline{u}_\lambda\in W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right)$，使得对任意 $v\in W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right)$，成立

$$\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\underline{u}_\lambda\right|\right)\nabla\underline{u}_\lambda\nabla v\mathrm{d}x=\int_\Omega g_\lambda\left(x,\underline{u}_\lambda\right)v\mathrm{d}x.\tag{2.2}$$

在(2.2)式中取 $v=-\underline{u}_\lambda^-$ 作为测试函数便得到 $\underline{u}_\lambda\ge0$。利用 $H\left(f\right)$ 和引理 3.3，取 $u=\frac{t}{2}\tilde{u}$，当 t 足够小时，有

$$I_\lambda\left(\frac{t}{2}\tilde{u}\right)=\int_\Omega\Phi\left(\frac{t}{2}\left|\nabla\tilde{u}\right|\right)-\int_\Omega G_\lambda\left(x,\frac{t}{2}\tilde{u}\right)\le\max\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^\ell\left\|\tilde{u}\right\|^\ell,\left(\frac{t}{2}\right)^m\left\|\tilde{u}\right\|^m\right\}-\frac{\lambda t}{2}\int_\Omega\tilde{u}^{1-\eta}<0.$$

因此，存在 $t_0>0$，使得 $I_\lambda\left(t_0\tilde{u}\right)<0$。由于 $I_\lambda\left(\underline{u}_\lambda\right)=\min_{u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)}I_\lambda\left(u\right)\le I_\lambda\left(t_0\tilde{u}\right)<0=I_\lambda\left(0\right)$，故 $\underline{u}_\lambda\ne0$。

在(3.2)式中取 $v=\left(\tilde{u}-\underline{u}_\lambda\right)^+$ 作为测试函数，有

$$\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\underline{u}_\lambda\right|\right)\nabla\underline{u}_\lambda\nabla\left(\tilde{u}-\underline{u}_\lambda\right)^+\ge\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\tilde{u}\right|\right)\nabla\tilde{u}\nabla\left(\tilde{u}-\underline{u}_\lambda\right)^+.$$

由(ϕ_2)可得 $\tilde{u}\le\underline{u}_\lambda$，故 $\underline{u}_\lambda\in W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right)$ 是问题(Q_λ)的解，进一步，由正则性理论和极大值原理知 $\underline{u}_\lambda\in\operatorname{int}C_+$。

其次，证明 $\underline{u}_\lambda$ 是问题(Q_λ)的唯一解。设 $\underline{v}_\lambda\in W_0^{1,\Phi}\left(\Omega\right)$ 是问题(Q_λ)的另一个解，通过计算可得

$$0\le\int_\Omega\left[\phi\left(\left|\nabla\underline{u}_\lambda\right|\right)\nabla\underline{u}_\lambda-\phi\left(\left|\nabla\underline{v}_\lambda\right|\right)\nabla\underline{v}_\lambda\right]\nabla\left(\underline{u}_\lambda-\underline{v}_\lambda\right)^+=\lambda\int_\Omega\left(\underline{u}_\lambda^{-\eta}-\underline{v}_\lambda^{-\eta}\right)\left(\underline{u}_\lambda-\underline{v}_\lambda\right)^+\le 0,$$

故 $\underline{u}_\lambda=\underline{v}_\lambda$。因此可得 $\underline{u}_\lambda\in\operatorname{int}C_+$ 是问题(Q_λ)的唯一解。

最后，证明映射 $\lambda\mapsto\underline{u}_\lambda$ 是非减的。由(2.1)式，有 $\underline{u}_\lambda^{-\eta}\in L^{s_0}(\Omega)$。设 $0<\mu<\lambda$，考虑如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta_\Phi u=\hat{w}_\mu(x,u), & x\in\Omega,\\ u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $\hat{w}_\mu(x,u)$ 为截断函数

$$\hat{w}_\mu(x,u(x))=\begin{cases}\mu\left(u^+(x)\right)^{-\eta}, & u(x)\le\underline{u}_\lambda(x),\\ \mu\underline{u}_\lambda(x)^{-\eta}, & \underline{u}_\lambda(x)<u(x).\end{cases}$$

由前面证明过程知问题(2.3)存在解 $\hat{u}_\mu\in\operatorname{int}C_+$。因此，成立

$$\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\hat{u}_\mu\right|\right)\nabla\hat{u}_\mu\nabla v\mathrm{d}x=\int_\Omega\hat{w}_\mu\left(x,\hat{u}_\mu\right)v\mathrm{d}x,\ \forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega).\tag{2.4}$$

在(2.4)式中取 $v=\left(\hat{u}_\mu-\underline{u}_\lambda\right)^+\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 为测试函数，可以得到

$$\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\hat{u}_\mu\right|\right)\nabla\hat{u}_\mu\nabla\left(\hat{u}_\mu-\underline{u}_\lambda\right)^+\mathrm{d}x\le\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\underline{u}_\lambda\right|\right)\nabla\underline{u}_\lambda\nabla\left(\hat{u}_\mu-\underline{u}_\lambda\right)^+\mathrm{d}x.$$

由(ϕ_2)可得 $\hat{u}_\mu\le\underline{u}_\lambda$，故 $\hat{u}_\mu$ 是问题(Q_μ)的解，又由问题(Q_μ)解的存在唯一性可知 $\hat{u}_\mu=\underline{u}_\mu\in\operatorname{int}C_+$，从而得到 $\underline{u}_\mu\le\underline{u}_\lambda$。证毕。

3. 定理 1.1 的证明

本节的主要工作是证明定理 1.1，先给出几个关键引理。

引理 3.1： 设(ϕ_1)-(ϕ_4)和 $H(f)$ 1)、4)成立，则 $\Lambda\ne\varnothing$。

证明： 给定 $\lambda>0$，根据引理 2.4，则存在 $\underline{u}_\lambda\in\operatorname{int}C_+$ 是问题(Q_λ)的唯一解. 考虑如下截断函数

$$\bar{g}_\lambda(x,u(x))=\begin{cases}\lambda\underline{u}_\lambda(x)^{-\eta}+f\left(x,u(x)^+\right), & u(x)\le\underline{u}_\lambda(x),\\ \lambda u(x)^{-\eta}+f(x,u(x)), & \underline{u}_\lambda(x)<u(x),\end{cases}\tag{3.1}$$

那么方程 $-\Delta_\Phi u=\bar{g}_\lambda(x,u)(x\in\Omega)$ 对应的能量泛函为

$$\bar{J}_\lambda(u)=\int_\Omega\left(\Phi\left(|\nabla u|\right)-\bar{G}_\lambda(x,u)\right)\mathrm{d}x,\ u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

其中 $\bar{G}_\lambda(x,t)=\int_0^t\bar{g}_\lambda(x,s)\mathrm{d}s$。

容易验证泛函 $\bar{J}_\lambda(u)$ 是 C^1 的。根据条件 $H(f)$ 1)、4)可得，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$，使得

$$F(x,t)\le\frac{\varepsilon}{\ell}t^\ell+\frac{C_\varepsilon}{r}t^r,\ a.e.\,x\in\Omega,\ \forall t\ge 0.\tag{3.2}$$

由(3.1)式、(3.2)式和引理 2.2，有

$$\bar{J}_\lambda(u)\ge\min\left\{\|u\|^\ell,\|u\|^m\right\}-\frac{\varepsilon}{\ell}\|u\|^\ell-\frac{C_\varepsilon}{r}\|u\|^r-\lambda\int_{\{u\le\underline{u}_\lambda\}}\underline{u}_\lambda^{-\eta}u\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{1-\eta}\int_{\{\underline{u}_\lambda<u\}}\left(u^{1-\eta}-\underline{u}_\lambda^{1-\eta}\right)\mathrm{d}x,$$

又

$$\lambda\int_{\{u\le\underline{u}_\lambda\}}\underline{u}_\lambda^{-\eta}u\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{1-\eta}\int_{\{\underline{u}_\lambda<u\}}\left(u^{1-\eta}-\underline{u}_\lambda^{1-\eta}\right)\mathrm{d}x\le\lambda\int_{\{u\le\underline{u}_\lambda\}}u^{1-\eta}\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{1-\eta}\int_{\{\underline{u}_\lambda<u\}}u^{1-\eta}\mathrm{d}x\le\lambda C\|u\|^{1-\eta},$$

因此

$$\bar{J}_\lambda(u)\ge\min\left\{\|u\|^{\ell},\|u\|^{m}\right\}-\frac{\varepsilon}{\ell}\|u\|^{\ell}-\frac{C_\varepsilon}{r}\|u\|^{r}-\lambda C\|u\|^{1-\eta}. \tag{3.3}$$

由于 $r>m$，故存在 $\mu_0>0$， $\rho_0\in(0,1)$，使得

$$\rho_0^m-\frac{C_\varepsilon}{r}\rho_0^r\ge\mu_0>0. \tag{3.4}$$

对上述 μ_0， ρ_0，选取 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\ell\mu_0}{2\rho_0^{\ell}}\right)$ 以及 $\lambda_0>0$，使得

$$\lambda C\rho_0^{1-\eta}+\frac{\varepsilon}{\ell}\rho_0^{\ell}<\frac{\mu_0}{2},\ \forall\lambda\in(0,\lambda_0]. \tag{3.5}$$

结合(3.3)式~(3.5)式可得，当 $\|u\|=\rho_0$ 时有

$$\bar{J}_\lambda(u)\ge\frac{\mu_0}{2}>0. \tag{3.6}$$

令 $B_\rho=\left\{u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega):\|u\|<\rho\right\}$。因为 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 是自反的，由 Eberlein-Smulian 定理知集合 $\bar{B}_\rho$ 是序列弱紧。此外，泛函 $\bar{J}_\lambda(u)$ 是弱下半连续的。因此，由 Weierstrass-Tonelli 定理知存在 $u_\lambda\in\bar{B}_\rho$，使得

$$\bar{J}_\lambda(u_\lambda)=\min\left\{\bar{J}_\lambda(u):u\in\bar{B}_\rho\right\}. \tag{3.7}$$

类似引理 2.4 的证明方法可知 $\bar{J}_\lambda(u_\lambda)<0$， $u_\lambda\ne0$，再根据(3.6)式可得

$$\|u_\lambda\|<\rho,\ u_\lambda\ne0. \tag{3.8}$$

结合(3.7)式和(3.8)式可得 $\bar{J}_\lambda'(u_\lambda)=0$，即

$$\int_\Omega\phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda\nabla v\mathrm{d}x=\int_\Omega\bar{g}_\lambda(x,u_\lambda)v\mathrm{d}x,\ \forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{3.9}$$

取 $v=-u_\lambda^-\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 作为测试函数代入(3.9)式，可得到 $u_\lambda^-=0$，从而 $u_\lambda\ge0$， $u_\lambda\ne0$。

再取 $v=(\underline{u}_\lambda-u_\lambda)^+\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 作为测试函数代入(3.9)式，有

$$\int_\Omega\phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda\nabla(\underline{u}_\lambda-u_\lambda)^+\mathrm{d}x\ge\int_\Omega\phi(|\nabla\underline{u}_\lambda|)\nabla\underline{u}_\lambda\nabla(\underline{u}_\lambda-u_\lambda)^+\mathrm{d}x,$$

利用(ϕ_2)可得 $\underline{u}_\lambda\le u_\lambda$。从而根据(3.1)式和(3.9)式可得 $u_\lambda\in S_\lambda$，故 $(0,\lambda_0]\subseteq\Lambda\ne\varnothing$。证毕。

引理 3.2： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，且 $\lambda\in\Lambda$，设 $\underline{u}_\lambda\in\operatorname{int}C_+$ 是(Q_λ)的唯一解，则对任意 $u\in S_\lambda$，成立 $\underline{u}_\lambda\le u$。

证明： 对于任意给定的 $u_\lambda\in S_\lambda\subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，考虑如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta_\Phi u=e_\lambda(x,u), & x\in\Omega,\\ u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{3.10}$$

其中

$$e_\lambda(x,u(x))=\begin{cases}\lambda u(x)^{-\eta}, & 0<u(x)\le u_\lambda(x),\\ \lambda u_\lambda(x)^{-\eta}, & u_\lambda(x)<u(x).\end{cases} \tag{3.11}$$

类似引理 2.4 的证明，可得问题(3.10)存在正解 $\tilde{u}_\lambda \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$。因此，取 $(\tilde{u}_\lambda - u_\lambda)^+$ 作为测试函数代入问题(3.10)的弱解形式，又 $u_\lambda \in S_\lambda$，故

$$\int_\Omega \phi(|\nabla \tilde{u}_\lambda|)\nabla \tilde{u}_\lambda \nabla(\tilde{u}_\lambda - u_\lambda)^+ \mathrm{d}x \le \int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla(\tilde{u}_\lambda - u_\lambda)^+ \mathrm{d}x.$$

由(ϕ_2)可得 $\tilde{u}_\lambda \le u_\lambda$。进一步，再由(3.11)式和引理 2.4 知 $\tilde{u}_\lambda = \underline{u}_\lambda \in \operatorname{int} C_+$，从而对任意 $u \in S_\lambda$，都成立 $\underline{u}_\lambda \le u$。

引理 3.3： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，则对 $\lambda \in \Lambda$，有 $S_\lambda \subseteq \operatorname{int} C_+$。

证明： 设 $u \in S_\lambda$，那么，$u^{-\eta} \in L^{s_0}(\Omega)$，且

$$-\Delta_\Phi u = \lambda u^{-\eta} + f(x,u). \tag{3.12}$$

设 $\underline{u}_\lambda \in \operatorname{int} C_+$ 是(Q_λ)的唯一解，由引理 3.2 知 $\underline{u}_\lambda \le u$。考虑如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda u^{-\eta}, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

由文献[12]定理 9.15 知问题(3.13)存在唯一解 $v_\lambda \in W^{2,s_0}(\Omega)$。因为 $s_0 > N$，故由 Sobolev 嵌入定理有 $v_\lambda \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$，其中 $\alpha = \dfrac{N}{s_0} \in (0,1)$。令 $w_\lambda = \nabla v_\lambda \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$，此时(3.12)式可写为

$$-\operatorname{div}\left(\phi(|\nabla u|)\nabla u - w_\lambda\right) = f(x,u).$$

根据 $H(f)$ 假设，由文献[14]推得 $u \in L^\infty(\Omega)$。又因为

$$|a_{ij}| \le C\Phi'(|\zeta|),\ y^{\mathrm{T}} A y \ge C\Phi'(|\zeta|)|y|^2,$$

其中 $a_{ij} = \dfrac{\partial(\phi(|\zeta|)\zeta_i)}{\partial \zeta_j}(i,j=1,\cdots,N)$，$\zeta = (\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$，$A = (a_{ij})_{N\times N}$，$y^{\mathrm{T}} = (y_1,\cdots,y_N)$，故 Φ-Laplace 算子满足文献[18]中的定理 1.7 的条件，因此有 $u \in C_+ \setminus \{0\}$。

此外，由(3.12)式知 $\Delta_\Phi u \le 0, a.e.\, x \in \Omega$，定义 $H(t) = t^2\phi(t) - \Phi(t), t \in \mathbb{R}$，那么存在足够小的 $\delta > 0$，使得 $\int_0^\delta \dfrac{1}{H^{-1}(\Phi(s))}\mathrm{d}s = +\infty$ [11]。利用文献[15]的强极大值原理，对任意的 $x \in \Omega$，有 $u > 0$；再由文献[15]定理 5.5.1 的结论推得 $u \in \operatorname{int} C_+$，故 $S_\lambda \subseteq \operatorname{int} C_+$。证毕。

接下来，证明 Λ 是连通集。

引理 3.4： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，$\lambda \in \Lambda$，若 $0 < \mu < \lambda$，则 $\mu \in \Lambda$。

证明： 因为 $\lambda \in \Lambda$，故存在 $u_\lambda \in S_\lambda \subseteq \operatorname{int} C_+$，设 $\underline{u}_\mu$ 和 $\underline{u}_\lambda$ 分别为(Q_μ)和(Q_λ)的唯一解。由引理 2.4 和引理 3.2 知 $\underline{u}_\mu \le \underline{u}_\lambda \le u_\lambda$。

考虑如下截断函数

$$k_\mu(x,u(x)) = \begin{cases} \mu \underline{u}_\mu(x)^{-\eta} + f(x,\underline{u}_\mu(x)), & u(x) < \underline{u}_\mu(x), \\ \mu u(x)^{-\eta} + f(x,u(x)), & \underline{u}_\mu(x) \le u(x) \le u_\lambda(x), \\ \mu u_\lambda(x)^{-\eta} + f(x,u_\lambda(x)), & u_\lambda(x) < u(x) \end{cases} \tag{3.14}$$

那么方程 $-\Delta_\Phi u = k_\mu(x,u)(x \in \Omega)$ 对应的能量泛函为

$$\sigma_\mu(u) = \int_\Omega \left(\Phi(|\nabla u|) - K_\mu(x,u)\right)\mathrm{d}x,\ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

其中 $K_\mu(x,t) = \int_0^t k_\mu(x,s)\mathrm{d}s$。

容易验证泛函 $\sigma_\mu(u)$ 是 C^1、强制且弱下半连续的，因此，存在极小值点 $u_\mu \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，使得对任意 $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，成立

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\mu|)\nabla u_\mu \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega k_\mu(x,u_\mu)v\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

在(3.15)式中取 $v=(\underline{u}_\mu - u_\mu)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 作为测试函数得到

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\mu|)\nabla u_\mu \nabla(\underline{u}_\mu - u_\mu)^+ \mathrm{d}x \ge \int_\Omega \phi(|\nabla \underline{u}_\mu|)\nabla \underline{u}_\mu \nabla(\underline{u}_\mu - u_\mu)^+ \mathrm{d}x,$$

再次利用(ϕ_2)，便得到 $\underline{u}_\mu \le u_\mu$。

再在(3.15)式中取 $v=(u_\mu - u_\lambda)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 作为测试函数得到

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\mu|)\nabla u_\mu \nabla(u_\mu - u_\lambda)^+ \mathrm{d}x \le \int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla(u_\mu - u_\lambda)^+ \mathrm{d}x,$$

由(ϕ_2)可得 $u_\mu \le u_\lambda$。

综合上述分析，我们有

$$u_\mu \in [\underline{u}_\mu, u_\lambda]. \tag{3.16}$$

结合(3.14)~(3.16)式，可以得到 $u_\mu \in S_\mu \subseteq \operatorname{int} C_+$，故 $\mu \in \Lambda$。证毕。

利用上述引理容易得到下面推论。

推论 3.1： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，则对每一个 $\lambda \in \Lambda$，存在 $u_\lambda \in S_\lambda$；当 $0<\mu<\lambda$ 时，存在 $u_\mu \in S_\mu$，使得 $u_\mu \le u_\lambda$。

进一步，可得下述结果。

引理 3.5： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，$\lambda \in \Lambda$，$0<\mu<\lambda$，则 $u_\lambda - u_\mu \in \operatorname{int} C_+$。

证明： 由推论 3.1，存在 $u_\lambda \in S_\lambda$，$u_\mu \in S_\mu$，使得 $u_\mu \le u_\lambda$。令 $\sigma = \|u_\lambda\|_\infty$，则由 $H(f)$-5)知存在 $\hat{\xi}_\sigma > 0$，成立

$$\begin{aligned} -\Delta_\Phi u_\mu + \hat{\xi}_\sigma u_\mu^{m-1} - \lambda u_\mu^{-\eta} &= (\mu-\lambda)u_\mu^{-\eta} + f(x,u_\mu) + \hat{\xi}_\sigma u_\mu^{m-1} \\ &\le f(x,u_\lambda) + \hat{\xi}_\sigma u_\lambda^{m-1} \\ &= -\Delta_\Phi u_\lambda + \hat{\xi}_\sigma u_\lambda^{m-1} - \lambda u_\lambda^{-\eta} \quad a.e.\ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.17}$$

由于 $0 \prec (\lambda-\mu)u_\mu^{-\eta}$，故从(3.17)式和文献[19]中命题 7 推得 $u_\lambda - u_\mu \in \operatorname{int} C_+$。证毕。

引理 3.6： 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，设 $\lambda^* = \sup \Lambda$，则 $\lambda^* < \infty$。

证明： 由条件 $H(f)$ 2)~4)知，存在 $\hat{\lambda} > 0$，使得

$$\hat{\lambda} t^{m-1} \le f(x,t),\ a.e.\ x \in \Omega, \forall t > 0. \tag{3.18}$$

设 $\lambda \in \Lambda$，且 $\lambda > \hat{\lambda}$，则存在 $u_\lambda \in S_\lambda \subseteq \operatorname{int} C_+$。设 $\Omega' \subset\subset \Omega$，且 $\partial\Omega' \in C^2$，$m_0 := \min_{\overline{\Omega'}} u_\lambda > 0$。对 $\delta \in (0,1)$，定义 $m_0^\delta = m_0 + \delta$，$\sigma = \max\{\|u_\lambda\|_\infty, m_0 + 1\}$。设 $\hat{\xi}_\sigma$ 为 $H(f)$-5)中所给出。结合(3.18)式、$H(f)$-5)及 $u_\lambda \in S_\lambda$，对 $a.e.\ x \in \Omega'$，有

$$\begin{aligned} -\Delta_\Phi m_0^\delta + \hat{\xi}_\sigma (m_0^\delta)^{m-1} - \lambda (m_0^\delta)^{-\eta} &< (\hat{\xi}_\sigma + \hat{\lambda}) m_0^{m-1} + \chi(\delta) - \hat{\lambda}(m_0^\delta)^{-\eta} \\ &\le f(x,m_0) + \hat{\xi}_\sigma m_0^{m-1} + \chi(\delta) - \hat{\lambda}(m_0^\delta)^{-\eta} \\ &\le f(x,u_\lambda) + \hat{\xi}_\sigma u_\lambda^{m-1} \\ &= -\Delta_\Phi u_\lambda + \hat{\xi}_\sigma u_\lambda^{m-1} - \lambda u_\lambda^{-\eta}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中 $\chi(\delta)\to 0^+\left(\delta\to 0^+\right)$。故对 $\delta>0$ 充分小，有 $\hat{\lambda}\left(m_0^\delta\right)^{-\eta}-\chi(\delta)\ge\mu_0>0$。

由(3.19)式和文献[19]命题 6 知 $m_0^\delta\le u_\lambda$，这与 m_0 定义矛盾，由此推得 $\lambda^*\le\hat{\lambda}<+\infty$。证毕。

引理 3.7：设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，则对每一个 $\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$，问题($P_\lambda$)至少存在两个解 $\bar{u},\hat{u}\in\operatorname{int}C_+$，且 $\bar{u}\le\hat{u}$，$\bar{u}\ne\hat{u}$。

证明：令 $\vartheta\in\left(\lambda,\lambda^*\right)$，则由引理 3.5，存在 $\bar{u}\in S_\lambda$ 和 $u_\vartheta\in S_\vartheta$，使得

$$u_\vartheta-\bar{u}\in\operatorname{int}C_+. \tag{3.20}$$

设 $\underline{u}_\lambda\in\operatorname{int}C_+$ 是(Q_λ)的唯一解，根据引理 3.2 可得 $\underline{u}_\lambda\le\bar{u}$，从而 $\bar{u}^{-\eta}\in L^{s_0}(\Omega)$。作截断函数

$$\beta_\lambda\left(x,u(x)\right)=\begin{cases}\lambda\bar{u}(x)^{-\eta}+f\left(x,\bar{u}(x)\right), & u(x)\le\bar{u}(x),\\ \lambda u(x)^{-\eta}+f\left(x,u(x)\right), & \bar{u}(x)<u(x),\end{cases} \tag{3.21}$$

那么方程 $-\Delta_\Phi u=\beta_\lambda(x,u)(x\in\Omega)$ 对应的能量泛函为

$$\gamma_\lambda(u)=\int_\Omega\left(\Phi\left(|\nabla u|\right)-B_\lambda(x,u)\right)\mathrm{d}x,\ u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

其中 $B_\lambda(x,t)=\int_0^t\beta_\lambda(x,s)\mathrm{d}s$。容易验证泛函 $\gamma_\lambda(u)$ 是 C^1 的。类似引理 3.4 的证明方法可知

$$K_{\gamma_\lambda}\subseteq[\bar{u})\cap\operatorname{int}C_+. \tag{3.22}$$

作另一截断函数

$$\hat{\beta}_\lambda\left(x,u(x)\right)=\begin{cases}\beta_\lambda\left(x,u(x)\right), & u(x)\le u_\vartheta(x),\\ \beta_\lambda\left(x,u_\vartheta(x)\right), & u_\vartheta(x)<u(x),\end{cases} \tag{3.23}$$

则方程 $-\Delta_\Phi u=\hat{\beta}_\lambda(x,u)(x\in\Omega)$ 对应的能量泛函为

$$\hat{\gamma}_\lambda(u)=\int_\Omega\left(\Phi\left(|\nabla u|\right)-\hat{B}_\lambda(x,u)\right)\mathrm{d}x,\ u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

其中 $\hat{B}_\lambda(x,t)=\int_0^t\hat{\beta}_\lambda(x,s)\mathrm{d}s$。同样可知泛函 $\hat{\gamma}_\lambda(u)$ 是 C^1 的，且存在 $\tilde{u}\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，使得

$$\tilde{u}(x)\in K_{\hat{\gamma}_\lambda}\subseteq\left[\bar{u},u_\vartheta\right]\cap\operatorname{int}C_+. \tag{3.24}$$

由(3.21)式和(3.22)式，不妨假设

$$K_{\gamma_\lambda}\cap\left[\bar{u},u_\vartheta\right]=\{\bar{u}\}, \tag{3.25}$$

否则问题(P_λ)存在另一个正解且大于 $\bar{u}(x)$。由(3.21)式和(3.23)式容易得出

$$\gamma_\lambda(u)\big|_{[0,u_\vartheta]}=\hat{\gamma}_\lambda(u)\big|_{[0,u_\vartheta]},\ \gamma_\lambda'(u)\big|_{[0,u_\vartheta]}=\hat{\gamma}_\lambda'(u)\big|_{[0,u_\vartheta]}. \tag{3.26}$$

因此 $K_{\hat{\gamma}_\lambda}=\{\bar{u}\}$，故有 $\tilde{u}=\bar{u}$。进一步，由文献[20]中定理 3.2，推出 $\bar{u}$ 是 γ_λ 在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 上的局部极小点。

设 K_{γ_λ} 是有限集(否则问题(P_λ)存在无限个正解且大于 $\bar{u}$)，因此，由文献[13]的定理 5.7.6 知存在 $\varrho\in(0,1)$，使得

$$\gamma_\lambda(\bar{u})<m_\varrho:=\inf\left\{\gamma_\lambda(u):\|u-\bar{u}\|=\varrho\right\}. \tag{3.27}$$

又由 $H(f)$ -2)知

$$\gamma_\lambda(tu)\to-\infty\ (t\to\infty). \tag{3.28}$$

接下来证明：泛函 $\gamma_\lambda(u)$ 满足 Cerami 条件。

给定 $\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$，设序列 $\{u_n\}\subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，满足

$$\left|\gamma_\lambda(u_n)\right| \le A\ (A>0), \tag{3.29}$$

$$\left(1+\|u_n\|\right)\gamma_\lambda'(u_n) \to 0\ \left(\text{在}W_0^{-1,\tilde{\Phi}}(\Omega)\text{中}\right), n\to\infty. \tag{3.30}$$

首先，证明$\{u_n^-\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。由(3.30)式知$\left|\langle\gamma_\lambda'(u_n),v\rangle\right| \le \frac{o_n(1)\|v\|}{1+\|u_n\|}$，$\forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，

即

$$\left|\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla v \mathrm{d}x - \int_\Omega \beta_\lambda(x,u_n) v\mathrm{d}x\right| \le \frac{o_n(1)\|v\|}{1+\|u_n\|},\ \forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{3.31}$$

取测试函数$v=-u_n^-$代入(3.31)式，并利用注 2.2 和引理 2.2，有$\min\left\{\|u_n^-\|^\ell, \|u_n^-\|^m\right\} \le C$。由此推得$\{u_n^-\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。

其次，证明$\{u_n^+\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。由(3.21)式和(3.29)式得

$$m\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n^+|)\mathrm{d}x - \frac{m\lambda}{1-\eta}\int_\Omega \overline{u}^{-\eta}u_n^+\mathrm{d}x - m\int_\Omega F(x,u_n^+)\mathrm{d}x \le C. \tag{3.32}$$

此外，取测试函数$v=u_n^+\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$代入(3.31)式中得

$$-\int_\Omega \phi(|\nabla u_n^+|)|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\mathrm{d}x \le o_n(1). \tag{3.33}$$

由注 2.2，通过计算可得

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\mathrm{d}x - m\int_\Omega F(x,u_n^+)\mathrm{d}x \le \frac{m\lambda}{1-\eta}\int_\Omega \overline{u}^{-\eta}u_n^+\mathrm{d}x + C. \tag{3.34}$$

又由$H(f)$-3)和 4)知$f(x,s)s - mF(x,s) \ge Cs^\tau - C$，$\forall (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$。设$\frac{1}{s_0}+\frac{1}{s_0'}=1$，因为$s_0>N$，从而有$s_0' < N' = \frac{N}{N-1} \le \ell^*$，结合$u_n^+\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$和$W_0^{1,\Phi}(\Omega)\rightarrowtail L^{\ell^*}(\Omega)$可得$u_n^+\in L^{s_0'}(\Omega)$，从(3.34)式可得$\|u_n^+\|_\tau^\tau \le C\left(\|u_n^+\|_{s_0'}+1\right)$。选取$s_0$充分大，使得$s_0'<\tau$，便有$\|u_n^+\|_\tau^\tau \le C\left(\|u_n^+\|_\tau + 1\right)$。注意到$\tau>1$，故$\|u_n^+\|_\tau \le C$。

下面分两种情况来证明$\{u_n^+\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。

情形 1：若$r\le\tau$，则$\{u_n^+\}$在$L^r(\Omega)$中有界，由条件$H(f)$-1)、注 2.2 和引理 2.2，有

$$\ell\min\left\{\|u_n^+\|^\ell, \|u_n^+\|^m\right\} \le C_{11}\left(\|u_n^+\|_r^r + 1\right),$$

因此可得$\{u_n^+\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。

情形 2：若$\tau<r<\ell^*$，令$t\in(0,1)$满足

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{\tau} + \frac{t}{\ell^*}. \tag{3.35}$$

由插值不等式，得到$\|u_n^+\|_r \le \|u_n^+\|_\tau^{1-t}\|u_n^+\|_{\ell^*}^t$，从而$\|u_n^+\|_r^r \le C\|u_n^+\|_{\ell^*}^{tr}$，因此

$$\ell\min\left\{\|u_n^+\|^\ell, \|u_n^+\|^m\right\} \le \ell\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n^+|)\mathrm{d}x \le C\left(1+\|u_n^+\|_{\ell^*}^{tr}\right) \le C\left(1+\|u_n^+\|^{tr}\right).$$

由条件$H(f)$-3)和(3.35)式知$tr<\ell$，故$\{u_n^+\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。

综合上述分析可得$\{u_n\}$在$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$中有界。因此，存在$\{u_n\}$的子列(仍记为其本身)以及$u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，有

$$u_n \rightharpoonup u \ \left(\text{在} W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{中}\right); u_n \to u \ \left(\text{在} L_\Phi(\Omega)\text{中}\right); u_n \to u, \ a.e. \ x\in\Omega. \tag{3.36}$$

在(3.31)式中取 $v = u_n - u$ 为测试函数，并结合(3.36)式，有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle -\Delta_\Phi u_n, u_n - u\rangle \le 0. \tag{3.37}$$

注意到算子 $-\Delta_\Phi$ 满足(S_+)型条件，由(3.36)式、(3.37)式和引理 2.3，得到在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中 $u_n \to u$ 。因此，泛函 $\gamma_\lambda(u)$ 满足 Cerami 条件。

结合(3.27)式、(3.28)式和 $\gamma_\lambda(u)$ 满足 Cerami 条件，利用山路引理，则存在 $\hat{u}\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 满足 $\hat{u}\in K_{\gamma_\lambda}$ ，且 $\gamma_\lambda(\overline{u}) < m_\varrho \le \gamma_\lambda(\hat{u})$ 。又因为 $K_{\gamma_\lambda}\subseteq[\overline{u})\cap \operatorname{int} C_+$ ，便有 $\overline{u}\le\hat{u}$ ，且 $\overline{u}\ne\hat{u}$ 。证毕。

引理 3.8: 设(ϕ_1)~(ϕ_4)和 $H(f)$ 成立，则 $\lambda^*\in\Lambda$ 。

证明: 设 $\{\lambda_n\}\subseteq(0,\lambda^*)$ ，且 $\lambda_n\uparrow\lambda^*(n\to\infty)$ ， $\underline{u}_{\lambda_1}\in \operatorname{int} C_+$ 是问题(Q_{λ_1})的唯一解。由引理 3.2 和推论 3.1 知存在序列 $\{\hat{u}_n\}\subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ ，使得 $\hat{u}_n\in S_{\lambda_n}$ ，且 $\underline{u}_{\lambda_1}\le\hat{u}_1\le\hat{u}_{n+1}, N=1,2,\cdots$ 。考虑如下截断函数

$$z_{\lambda_n}(x,u(x)) = \begin{cases} \lambda_n \underline{u}_{\lambda_1}(x)^{-\eta} + f\left(x,\underline{u}_{\lambda_1}(x)\right), & u(x)\le\underline{u}_{\lambda_1}(x),\\ \lambda_n u(x)^{-\eta} + f\left(x,u(x)\right), & \underline{u}_{\lambda_1}(x) < u(x), \end{cases} \tag{3.38}$$

那么方程 $-\Delta_\Phi u = z_{\lambda_n}(x,u)(x\in\Omega)$ 对应的能量泛函为

$$\varphi_{\lambda_n}(u) = \int_\Omega\left(\Phi(|\nabla u|) - Z_{\lambda_n}(x,u)\right)\mathrm{d}x, \ u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

其中 $Z_{\lambda_n}(x,t) = \int_0^t z_{\lambda_n}(x,s)\mathrm{d}s$ 。容易验证泛函 $\varphi_{\lambda_n}(u)$ 是 C^1 的。类似引理 3.4 的证明方法可知 $K_{\varphi_{\lambda_n}}\subseteq\left[\underline{u}_{\lambda_1}\right)\cap \operatorname{int} C_+$ 。

作另一截断函数

$$\overline{z}_{\lambda_n}(x,u(x)) = \begin{cases} \lambda_n \underline{u}_{\lambda_1}(x)^{-\eta} + f\left(x,\underline{u}_{\lambda_1}(x)\right), & u(x) < \underline{u}_{\lambda_1}(x),\\ \lambda_n u(x)^{-\eta} + f\left(x,u(x)\right), & \underline{u}_{\lambda_1}(x)\le u(x)\le\hat{u}_{n+1}(x),\\ \lambda_n \hat{u}_{n+1}(x)^{-\eta} + f\left(x,\hat{u}_{n+1}(x)\right), & \hat{u}_{n+1}(x) < u(x), \end{cases} \tag{3.39}$$

则方程 $-\Delta_\Phi u = \overline{z}_{\lambda_n}(x,u)(x\in\Omega)$ 对应的能量泛函为

$$\overline{\varphi}_{\lambda_n}(u) = \int_\Omega\left(\Phi(|\nabla u|) - \overline{Z}_{\lambda_n}(x,u)\right)\mathrm{d}x, \ u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

其中 $\overline{Z}_{\lambda_n}(x,t) = \int_0^t \overline{z}_{\lambda_n}(x,s)\mathrm{d}s$ 。同样可知泛函 $\overline{\varphi}_{\lambda_n}(u)$ 是 C^1 的，且存在 $u_n\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ ，使得 $\overline{\varphi}_{\lambda_n}(u_n) = \inf\left\{\overline{\varphi}_{\lambda_n}(u): u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)\right\}$ ，且 $u_n\in K_{\overline{\varphi}_{\lambda_n}}\subseteq\left[\underline{u}_{\lambda_1},\hat{u}_{n+1}\right]\cap \operatorname{int} C_+$ 。

结合 $H(f)$ 、注 2.2 以及 $\underline{u}_{\lambda_1}$ 是(Q_{λ_1})的解，有

$$\overline{\varphi}_{\lambda_n}(u_n)\le\overline{\varphi}_{\lambda_n}(\underline{u}_{\lambda_1})\le\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla\underline{u}_{\lambda_1}\right|\right)\left|\nabla\underline{u}_{\lambda_1}\right|^2 - \lambda_1\int_\Omega\underline{u}_{\lambda_1}^{1-\eta} = 0.$$

又由(3.38)式和(3.39)式知 $\varphi_{\lambda_n}(u)\big|_{\left[\underline{u}_{\lambda_1},\hat{u}_{n+1}\right]} = \overline{\varphi}_{\lambda_n}(u)\big|_{\left[\underline{u}_{\lambda_1},\hat{u}_{n+1}\right]}$ ，因此

$$\varphi_{\lambda_n}(u_n)\le 0. \tag{3.40}$$

又 $u_n\in K_{\overline{\varphi}_{\lambda_n}}$ ，故

$$\int_\Omega\phi\left(|\nabla u_n|\right)\nabla u_n\nabla v = \lambda_n\int_\Omega u_n^{-\eta}v + f(x,u_n)v, \ \forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{3.41}$$

对(3.40)式和(3.41)式重复引理 3.7 的证明过程，可得在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中 $u_n\to u_{\lambda_*}$ ，且 $u_n\le u_{\lambda_*}$ 。在(3.39)式中令 $n\to\infty$ ，推得 $\int_\Omega\phi\left(\left|\nabla u_{\lambda_*}\right|\right)\nabla u_{\lambda_*}\nabla v\mathrm{d}x = \lambda^*\int_\Omega u_{\lambda_*}^{-\eta}v\mathrm{d}x + \int_\Omega f\left(x,u_{\lambda_*}\right)v\mathrm{d}x$ ， $\forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 。因此 $u_{\lambda_*}\in S_{\lambda^*}$ ，

即 $\lambda^* \in \Lambda$。证毕。

定理 1.1 的证明 根据引理 3.7，对每一个 $\lambda \in (0, \lambda^*)$，问题($P_\lambda$)至少存在两个解 $\bar{u}, \hat{u} \in \operatorname{int} C_+$，且 $\bar{u} \le \hat{u}$；由引理 3.8 知当 $\lambda = \lambda^*$ 时，问题(P_λ)至少存在一个解 u_{λ^*}；最后，由 λ^* 的定义及引理 3.8 知问题(P_λ)无正解。

4. 定理 1.2 的证明

由于 S_λ 是下有向集，若 $\underline{u}_\lambda$ 是(Q_λ)的唯一解，由文献[21]知，可以找到序列 $\{u_n\} \subseteq S_\lambda$，使得

$$\underline{u}_\lambda \le u_{n+1} \le u_n \le u_1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \inf S_\lambda = \inf_{n\ge 1} u_n, \tag{4.1}$$

且

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla v \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega u_n^{-\eta} v \mathrm{d}x + \int_\Omega f(x, u_n) v \mathrm{d}x,\ \forall v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{4.2}$$

取测试函数 $v = u_n$ 代入(4.2)式中，结合(4.1)式得 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中有界。因此，存在 $\{u_n\}$ 的子列(仍记为其本身)，有 $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ (在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中)；$u_n \to u_\lambda^*$ (在 $L_\Phi(\Omega)$ 中)。

重复引理 3.7 的证明，得到 $u_n \to u_\lambda^*$ (在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中)，由此可得

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda^*|)\nabla u_\lambda^* \nabla v \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega (u_\lambda^*)^{-\eta} v \mathrm{d}x + \int_\Omega f(x, u_\lambda^*) v \mathrm{d}x,\ \forall v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

由引理 3.2，对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$\underline{u}_\lambda \le u_n$，从而 $\underline{u}_\lambda \le u_\lambda^*$，即 $u_\lambda^* = \inf S_\lambda$。

5. 定理 1.3 的证明

若 $\mu, \lambda \in \Lambda$，且 $\mu < \lambda$，由定理 1.2 知存在 $u_\mu^* \in S_\mu$，$u_\lambda^* \in S_\lambda$，利用引理 3.5，有

$$u_\lambda^* - u_\mu^* \in \operatorname{int} C_+. \tag{5.1}$$

设 $\{\lambda_n\} \subseteq \Lambda$，且 $\lambda_n \le \lambda_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$。设 $u_{\lambda_n}^* \in S_{\lambda_n}$ 是问题(P_{λ_n})的最小正解，$\underline{u}_{\lambda_1}$ 是问题(Q_{λ_1})的唯一解，则由引理 3.2 和(5.1)式，有

$$\underline{u}_{\lambda_1} \le u_{\lambda_n}^* \le u_{\lambda^*}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

且

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_{\lambda_n}^*|)\nabla u_{\lambda_n}^* \nabla v \mathrm{d}x = \lambda_n \int_\Omega (u_{\lambda_n}^*)^{-\eta} v \mathrm{d}x + \int_\Omega f(x, u_{\lambda_n}^*) v \mathrm{d}x,\ \forall v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{5.3}$$

取测试函数 $v = u_{\lambda_n}^*$ 代入(5.3)式中，结合(5.2)式得 $\{u_{\lambda_n}^*\}$ 在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中有界。由正则性理论(参见文献[22])，存在 $\beta \in (0,1)$ 和常数 $C > 0$ (C 与 n 无关)，使得 $u_{\lambda_n}^* \in C_0^{1,\beta}(\bar{\Omega})$，且 $\|u_{\lambda_n}^*\|_{C_0^{1,\beta}(\bar{\Omega})} \le C$。又由 $C_0^{1,\beta}(\bar{\Omega}) \rightarrowtail C_0^1(\bar{\Omega})$ 是紧的，因此存在子列(仍记为其本身) $\{u_{\lambda_n}^*\}$ 及 $\tilde{u}_\lambda^* \in C_0^1(\bar{\Omega})$，使得在 $C_0^1(\bar{\Omega})$ 中 $u_{\lambda_n}^* \to \tilde{u}_\lambda^*\ (n \to \infty)$。

最后，我们断言 $\tilde{u}_\lambda^* = u_\lambda^*$。用反证法，若 $\tilde{u}_\lambda^* \ne u_\lambda^*$，则存在 $x_0 \in \Omega$，使得 $u_\lambda^*(x_0) < \tilde{u}_\lambda^*(x_0)$。对上述的 λ_n，当 n 足够大时，有 $u_\lambda^*(x_0) < u_{\lambda_n}^*(x_0)$。又 $\lambda_n \le \lambda$，故由(5.1)式知对任意 $x \in \Omega$，有 $u_{\lambda_n}^*(x) < u_\lambda^*(x)$。这样便得到矛盾的结果，因此 $\tilde{u}_\lambda^* = u_\lambda^*$。

6. 结论

本文研究了一类具有 Φ-Laplace 算子和奇异非线性项的拟线性椭圆型方程。因为奇异项的存在导致能量泛函不是 C^1 的，从而不能直接对泛函运用临界点理论的极小极大原理。为了克服这一困难，我们通过研究相应的辅助问题，结合截断技巧和比较原理来去除奇性，从而证明了方程正解的存在性及相关问题。

参考文献

[1] 王明旻, 贾高. 含 Φ-Laplace 算子和凹凸非线性项的拟线性椭圆型方程正解的分歧性[J]. 数学物理学报, 2020, 40A(5): 1235-1247.

[2] Li, X.W. and Jia, G. (2019) Multiplicity of Solutions for Quasilinear Elliptic Problems Involving Φ-Laplacian Operator and Critical Growth. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **6**, 1-15. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.6

[3] Fukagai, N., Ito, M. and Narukawa, K. (2006) Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Equations with Critical Orlicz-Sobolev Nonlinearity on R^N. *Funkcialaj Ekvacioj*, **49**, 235-267. https://doi.org/10.1619/fesi.49.235

[4] Ambrosetti, A., Brezis, H. and Cerami, G. (1994) Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems. *Journal of Functional Analysis*, **122**, 519-543. https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1078

[5] Guo, Z. and Zhang, Z. (2003) $W^{1,p}$ versus C^1 Local Minimizers and Multiplicity Results for Quasilinear Elliptic Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 32-50. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00282-8

[6] Bai, Y., Motreanu, S. and Zeng, S. (2020) Continuity Results for Parametric Nonlinear Singular Dirichlet Problems. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 372-387. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0005

[7] Papageorgiou, N.S. and Smyrlis, G. (2015) A Bifurcation-Type Theorem for Singular Nonlinear Elliptic Equations. *Methods and Applications of Analysis*, **22**, 147-170. https://doi.org/10.4310/MAA.2015.v22.n2.a2

[8] Papageorgiou, N.S., Vetro, C. and Zhang, Y.P. (2020) Positive Solutions for Parametric Singular Dirichlet (p, q)-Equations. *Nonlinear Analysis*, **198**, Article ID: 111882. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111882

[9] Rao, M.N. and Ren, Z.D. (1991) Theory of Orlicz Spaces. Marcel Dekker, New York.

[10] Gossez, J.P. (1979) Orlicz-Sobolev Spaces and Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Teubner-Texte zur Mathematik, Springer, Berlin, 59-94.

[11] Carvalho, M.L., Goncalves, V. and Silva, E.D. (2015) On Quasilinear Elliptic Problems without the Ambrosetti-Rabinowitz Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **426**, 466-483. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.01.023

[12] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Berlin.

[13] Papageorgiou, N.S., Rădulescu, V. and Repovš, D.D. (2019) Nonlinear Analysis-Theory and Methods. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03430-6

[14] Ladyzhenskaya, O.A. and Ural'tseva, N.N. (1968) Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Academic Press, New York.

[15] Pucci, P. and Serrin, J. (2007) The Maximum Principle. Birkhäuser Verlag, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8145-5

[16] Lazer, A.C. and Mckenna, P.J. (1991) On a Singular Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **111**, 721-730. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1037213-9

[17] Giovany, M.F., Gelson, C.G., Leandro, S.T., *et al*. (2020) Sub-Super Solution Method for a Singular Problem Involving the Φ-Laplacian and Orlicz-Sobolev Spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **65**, 409-422. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1602613

[18] Lieberman, G.M. (1991) The Natural Generalization of the Natural Conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for Elliptic Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **16**, 311-361. https://doi.org/10.1080/03605309108820761

[19] Papageorgiou, N.S., Rădulescu, V. and Repovš, D.D. (2020) Nonlinear Nonhomogeneous Singular Problems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, 9. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1667-0

[20] Tan, Z. and Fang, F. (2013) Orlicz-Sobolev vs Hölder Local Minimizer and Multiplicity Results for Quasilinear Elliptic Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **402**, 348-370. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.029

[21] Hu, S. and Papageorgiou, N.S. (1997) Handbook of Multivalued Analysis. Springer, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6359-4

[22] Philippe, C., Pagter, B.D. and Sweers, G. (2004) Existence of Solutions to a Semilinear Elliptic System through Orlicz-Sobolev Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **1**, 241-267. https://doi.org/10.1007/s00009-004-0014-6