

随机对称锥规划问题的一阶最优性条件的相容性分析

秦明, 张杰

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年4月11日; 录用日期: 2022年5月6日; 发布日期: 2022年5月16日

摘要

随机对称锥规划问题是一类应用十分广泛的问题, 在工程设计、通讯、控制等实际领域有着重要的应用。随着优化问题不断的深入研究和对称锥规划理论的完善, 许多很难甚至不能解决的问题, 都可以转化为对称锥优化模型。因此, 关于随机对称锥规划问题的研究有着重要的价值。对于随机对称锥规划问题的研究, 本文采用了基于样本的近似方法, 通常需要考虑样本均值近似问题的相容性, 本文将对随机对称锥规划问题的样本均值近似问题的最优值和一阶最优性条件的相容性进行分析。

关键词

随机规划, 对称锥, 样本均值近似, 一阶最优性条件, 最优值, 相容性

Compatibility Analysis of First-Order Optimality Conditions for Stochastic Symmetric Cone Programming

Ming Qin, Jie Zhang

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 11th, 2022; accepted: May 6th, 2022; published: May 16th, 2022

Abstract

Stochastic symmetric cone programming problem is a very wide range of problems, which has important applications in engineering design, communication, control and other practical fields. With the continuous in-depth study of optimization problems and the improvement of symmetric

cone programming theory, many difficult or even unsolvable problems can be transformed into symmetric cone optimization model. Therefore, the research on stochastic symmetric cone programming is of great value. For the research of stochastic symmetric cone programming, this paper adopts the sample based approximation method, which usually needs to consider the compatibility of the sample mean approximation problem. This paper will analyze the compatibility of the optimal value and the first-order optimality condition of the sample mean approximation problem of stochastic symmetric cone programming.

Keywords

Stochastic Programming, Symmetrical Cone, Sample Mean Approximation, First-Order Optimality Condition, Optimal Value, Compatibility

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机规划问题就是通过使用随机变量, 在问题中引入不确定性的数学规划问题, 最开始是由 Dantzing 和 Ferguson [1] 在研究某航线航班的数量最优化问题中提出的, 并在解决问题的过程中, 建立了有偿的两阶段随机规划问题。Dai [2] 等人对一类两阶段随机规划问题进行了研究, 并将其中的目标函数用其样本均值替代, 其研究是将一个随机优化问题转化为一个确定的问题。关于对称锥优化问题, Faybusovich [3] 提出了利用内点法来解决线性对称锥规划问题, 并指出了其中涉及到的多项式的复杂性, 在此之后, Schmieta 和 Alizadeh [4] 提出了利用牛顿法对线性对称锥规划问题的 KKT 系统进行求解。随着对称锥优化问题研究的不断深入, 许多问题都可以转化为对称锥优化模型, 并可以进行求解, 得到比较满意的结果, Lieven [5] 和 Klerk [6] 等学者在对称锥优化问题中的半定规划的问题的研究上取得了很多的成果。Bastin [7] 等学者提出了带有等式和不等式约束的随机规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{z \in S} g(z) &= \mathbb{E}_p [G(z, \xi)] \\ \text{s.t. } c_j(z) &\geq 0, j = 1, \dots, k, \\ c_j(z) &= 0, j = k + 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Bastin 等学者利用了蒙特卡罗 [8] 工具来解决这个问题, 得到了对应的样本均值近似问题: $\min_{z \in S} \hat{g}_N(z)$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \hat{c}_{j_N}(z) &\geq 0, j = 1, \dots, k, \\ \hat{c}_{j_N}(z) &= 0, j = k + 1, \dots, M. \end{aligned}$$

其中, $\hat{g}_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(z, \xi_i)$, $\hat{c}_{j_N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_j(z, \xi_i)$ 。在本文中我们将要研究一类更广泛的随机对称锥规划问题, 考虑如下随机对称锥规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} g(x) &= \mathbb{E} [F(x, \xi)] \\ \text{s.t. } \mathbb{E} [G(x, \xi)] &\in K, \end{aligned} \quad (\text{p1})$$

其中, $x \in X$ 是决策变量, X 是 R^n 中的一个非空闭凸集且为这个问题的可行解集, ξ 是定义在概率空间 (Ξ, \mathcal{F}, P) 上的实随机向量. F 是 $R^n \times R^m \rightarrow R$ 的实值函数, \mathbb{E} 表示数学期望, $K \subseteq R^n$ 是对称锥, 如学者 Faraut [9] 文章中所示, 对称锥要满足如下条件:

- 1) K 是齐次的,
- 2) K 是自对偶的。

在本文的研究中, 我们将对称锥用一个具体的模型表达[9]:

$$K = \{y \circ y \mid y \in \mathcal{E}\},$$

其中, \mathcal{E} 是一个具有内积运算的有限维空间; \circ 是一个双线性映射, 且满足如下三个条件: 对于所有的 $y, z, w \in \mathcal{E}$,

- a) $y \circ z = z \circ y$,
- b) $y \circ (y^2 \circ z) = y^2 \circ (y \circ z)$,
- c) $\langle y \circ z, w \rangle = \langle y, z \circ w \rangle$.

对于满足上述条件的 $\langle \mathcal{E}, \circ \rangle$, 我们称之为欧式 Jordan 代数。为解决(p1)问题, 本文采取样本均值近似方法。对于 ξ 的 N 个独立同分布样本 ξ_1, \dots, ξ_N , (p1)问题相应的样本均值近似问题为:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \hat{g}_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x, \xi_i), \\ \text{s.t. } \hat{G}_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(x, \xi_i) = y \circ y. \end{aligned} \quad (\text{p2})$$

我们将(p1)称为原问题, (p2)称为样本均值近似问题。

接下来我们研究样本均值近似问题的最优值的相容性以及一阶最优性条件的相容性。注意到问题(p1)和(p2)的稳定点条件均可写为下列广义方程的形式:

$$0 \in \mathbb{E}[H(x, \xi)] + N(x), \quad (\text{p3})$$

其中, H 是向量值函数, N 是集值映射。

2. 一阶最优性条件的相容性分析

为研究方便, 我们先给出如下假设。

A.0 对于 ξ 的抽样是满足独立同分布的。

A.1 对于每一个 ξ , 函数 $F(\cdot, \xi)$ 和 $G(\cdot, \xi)$ 在 X 上是连续可微的。

A.2 对于所有的 $x \in X$ 和几乎每个 ξ , 都有 $\mathbb{E}_p[k]$ 是有限的, 且 $\|F(x, \xi)\|, \|G(x, \xi)\|$ 都小于等于 $k(\xi)$, 其中 $k(\xi)$ 为 P -可积函数。

A.3 每个梯度分量 $\frac{\partial}{\partial [x]_i} F(x, \xi)$ 和 $\frac{\partial}{\partial [x]_i} G(x, \xi)$ 是被 P -可积函数控制的。

我们用 S^* 和 S_N^* 分别表示广义方程(p3)和 SAA 问题的解集, 则我们可以根据[10]得到如下结果。

定理 1.1: 设 C 为 R^n 上的一个紧子集, 如果

- 1) (p1)问题的最优解集为 S^* 且 $\emptyset \neq S^* \subseteq C$ 。
- 2) $\mathbb{E}[H(x, \xi)]$ 在 C 上是连续实值函数。
- 3) 当 N 足够大时, $\emptyset \neq S_N^* \subseteq C$ 。

则 $\mathbb{D}(S_N^*, S^*) \rightarrow 0$ w.p.1 当 $N \rightarrow +\infty$ 时成立。

我们假设条件 A.0~A.3 成立, 且对于其中每一个 ξ , $G(\cdot, \xi)$ 关于 $-K$ 是凸的, 对于每一个 ξ 来说, 映射 $x \mapsto G(\cdot, \xi) - K$ 是集值映射, 并有下列约束条件成立:

$$0 \in \text{int}\{\mathbb{E}[G(x, \xi)] - K\}.$$

根据 Shapiro [11] 的研究成果可知, 如果 x^* 为局部最优解, 则存在 $\lambda^* \in N_K\{\mathbb{E}[G(x^*, \xi)]\}$, 使得 (x^*, λ^*) 满足:

$$0 \in \nabla_x \mathbb{E}[F(x^*, \xi)] + \mathcal{J}_x \mathbb{E}[G(x^*, \xi)]^\top \lambda^* + N_K(x^*). \quad (1.1)$$

最优性条件(1.1)也可以写成如下形式:

$$0 \in \mathbb{E}[P(x^*, \lambda^*, \xi)] + N_{X \times K}(x^*, \lambda^*),$$

其中,

$$P(x, \lambda, \xi) = \begin{pmatrix} L(x, \lambda, \xi) \\ G(x, \xi) \end{pmatrix},$$

$$L(x, \lambda, \xi) = \nabla_x F(x, \xi) + \mathcal{J}_x G(x, \xi)^\top \lambda,$$

P 为 $R^n \times R^n \times \Xi \rightarrow R^{2n}$ 上的连续函数。相应地, 如果 x_N 是问题(p2)的局部最优解, 则应存在 λ_N 且 (x_N, λ_N) 满足如下条件:

$$0 \in P_N(x_N, \lambda_N) + N_{X \times K}(x_N, \lambda_N), \quad (1.2)$$

其中,

$$\hat{P}_N(x, \lambda, \xi) = \begin{pmatrix} \hat{L}_N(x, \lambda, \xi) \\ \hat{G}_N(x, \xi) \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_N(x, \lambda) = \nabla \hat{F}_N(x, \xi) + \mathcal{J}_x G(x, \xi)^\top \lambda.$$

下面我们建立 SAA 问题的一阶最优性条件的相容性。

令

$$S = \{(x^*, \lambda^*) \in X \times K \mid \mathbb{E}[P(x^*, \lambda^*, \xi)] + N_{X \times K}(x^*, \lambda^*)\},$$

$$\hat{S}_N = \{(x_N, \lambda_N) \in X \times K \mid \mathbb{E}[\hat{P}_N(x_N, \lambda_N)] + N_{X \times K}(x_N, \lambda_N)\}.$$

定理 1.2: X 是 R^n 中的非空闭凸集, 设假设 A.0-A.1 条件成立, 如果有

$$0 \in P_N(x_N, \lambda_N) + N_{X \times K}(x_N, \lambda_N),$$

x^* 是 $\{x_N\}$ 的聚点且存在 $\{x_N\}$ 的子列 $\{x_{N_k}\}$ 收敛到 x^* 。 λ_{N_k} 是 x_{N_k} 相应的一个 Lagrange 乘子且当 N 趋于无穷大时, $\{\lambda_{N_k}\}$ 收敛到 λ^* , 则有 $0 \in \mathbb{E}[P(x^*, \lambda^*, \xi)] + N_{X \times K}(x^*, \lambda^*)$, 即 x^* 为原问题(p1)的稳定点。

证明: 由于 $0 \in \mathbb{E}[P_N(x_N, \lambda_N)] + N_{X \times K}(x_N, \lambda_N)$, 所以 $-\hat{P}_N(x_N, \lambda_N) \in N_{X \times K}(x_N, \lambda_N)$ 。又因为在 A.0-A.3 条件下, g 和 \hat{g}_N 均为 $R^n \times R^m \rightarrow R$ 的连续实值函数且 $\hat{g}_N(\cdot)$ 一致收敛到 $g(\cdot)$, $G(\cdot, \xi)$ 在 X 上是连续可微的, 不妨设当 $N \rightarrow +\infty$ 时, 有 $x_N \rightarrow x^*$, $\lambda_N \rightarrow \lambda^*$ 。根据[11]命题 5.1 可知,

$$\|\hat{P}_N(x_N, \xi, \lambda_N) - \mathbb{E}[P(x_N, \xi, \lambda_N)]\| \rightarrow 0 \text{ w.p.1, } N \rightarrow +\infty,$$

所以

$$\hat{P}_N(x_N, \xi, \lambda_N) \rightarrow \mathbb{E}[P(x_N, \xi, \lambda_N)],$$

进而

$$\hat{P}(x_N, \xi, \lambda_N) \rightarrow \mathbb{E}[P(x^*, \xi, \lambda^*)],$$

根据法锥的外半连续性, 我们有

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} N_{X \times K}(x_N, \lambda_N) \subseteq N_{X \times K}(x^*, \lambda^*),$$

这可以得到

$$-\mathbb{E}[P(x^*, \xi, \lambda^*)] \in N_{X \times K}(x^*, \lambda^*),$$

即

$$0 \in \mathbb{E}[P(x^*, \lambda^*, \xi)] + N_{X \times K}(x^*, \lambda^*).$$

综上, (x^*, λ^*) 以概率 1 满足原问题的一阶最优性条件。

在定理 1.2 中, 我们假设拉格朗日乘子是有界的, 那么如果假设乘子是无界的, 也可以通过增加条件得到类似的结果。

定理 1.3: X 是 R^n 中的非空闭凸集, 在 A.0~A.3 的假设下, x^* 是 $\{x_N\}$ 的聚点。如果 (x_N, λ_N) 满足 SAA 问题的一阶最优性条件, 则在下列约束规范下,

$$0 \in \text{int}\left\{\mathbb{E}[G(x^*, \xi)] - K\right\}$$

$\{\lambda_N\}$ 有界且我们有 x^* 以概率 1 满足原问题的一阶最优性条件。

证明: 假设 $\{\lambda_N\}$ 无界, 不妨设 $\|\lambda_N\| \rightarrow +\infty, N \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\lambda_N}{\|\lambda_N\|} \rightarrow \bar{\lambda}, \|\bar{\lambda}\| = 1$ 。

在(1.2)式两侧同时乘 $\frac{1}{\|\lambda_N\|}$ 得

$$0 = \frac{1}{\|\lambda_N\|} \hat{F}_N(x_N) + \mathcal{J}\hat{G}_N(x_N)^\top \frac{\lambda_N}{\|\lambda_N\|}.$$

令 $N \rightarrow +\infty$ 可得

$$0 = \mathbb{E}[G(x^*, \xi)]^\top \bar{\lambda},$$

$$\bar{\lambda} \in N_K\left\{\mathbb{E}[G(x^*, \xi)]\right\}.$$

由 $0 \in \text{int}\left\{\mathbb{E}[G(x^*, \xi)] - K\right\}$, 可知 $\bar{\lambda} = 0$, 这与假设矛盾, 所以 $\{\lambda_N\}$ 有界, 所以不妨设 $\lambda_N \rightarrow \lambda^*$, 接下来的证明同定理 1.2。

3. 最优值的相容性分析

下面我们对(p1)和(p2)问题的最优值进行相容性分析。设 V^* 和 V_N^* 分别为(p1)和(p2)问题的最优值, 我们给出如下定理。

定理 2.1: 在定理 1.1 假设的前提下, X_N 为 R^n 的一个子集, 令 Z_N 是 SAA 问题的可行集, Z 为原问

题的可行集, 满足:

- (1) 如果 $x_N \in Z_N$ 并且 $x_N \rightarrow x$, 其中 $x \in Z$,
- (2) 对于某个点 $x \in S^*$, 存在一个序列 $x_N \in Z_N$ 使得 $x_N \rightarrow x$ w.p.1, 那么 $V_N^* \rightarrow V^*$ w.p.1, 当 $N \rightarrow \infty$ 时。

证明: 假设 $x_N \in S_N^*$, 因为 S_N^* 为紧集, 不妨假设 $x_N \rightarrow x^*$ w.p.1。因为 $S_N^* \subset X_N$, 有 $x_N \in Z_N$ 。又条件(2)成立, 所以 $x^* \in Z$ 。根据[11]中命题 5.1, 有

$$V_N^* = \hat{g}_N(x_N) \rightarrow g(x^*) \text{ w.p.1, } N \rightarrow \infty$$

并且

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} V_N^* \geq V^* \text{ w.p.1.}$$

另一方面, 由条件(3)得, 存在一个序列 $x_N \in X_N$ 收敛到一个 $x \in S^*$ w.p.1。因此当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$V_N^* \leq \hat{g}_N(x_N) \rightarrow g(x) = V^* \text{ w.p.1}$$

因为 $\limsup_{N \rightarrow \infty} V_N^* \leq V^*$ w.p.1, 所以当 $N \rightarrow \infty$, 有 $V_N^* \rightarrow V^*$ w.p.1。

4. 结论

本文利用样本均值近似方法来对随机对称锥规划问题的相容性进行分析, 建立了随机对称锥规划问题的样本均值近似问题的一阶最优性条件的相容性理论和最优值相容性理论。我们在 Shapiro 介绍的随机广义方程样本均值近似问题相容性的基础上, 给出了我们的结论, 并在一定约束规范条件下, 建立了随机对称锥规划问题的一阶最优性条件的相容性理论。

参考文献

- [1] Ferguson, A.R. and Dantzig, G.B. (1956) The Allocation of Aircraft to Routes—An Example of Linear Programming under Uncertain Demand. *Management Science*, **3**, 45-73. <https://doi.org/10.1287/mnsc.3.1.45>
- [2] Dai, L., Chen, C.H. and Birge, J.R. (2000) Convergence Properties of Two-Stage Stochastic Programming. *Journal of Optimization Theory & Applications*, **106**, 489-509. <https://doi.org/10.1023/A:1004649211111>
- [3] Faybusovich, L. (1997) Euclidean Jordan Algebras and Interior-Point Algorithms. *Positivity*, **1**, 331-357. <https://doi.org/10.1023/A:1009701824047>
- [4] Schmieta, S.H. and Alizadch, F. (2001) Associative and Jordan Algebras, and Polynomial Time Interior-Point Algorithms for Symmetric Cones. *Mathematics of Operations Research*, **26**, 543-564. <https://doi.org/10.1287/moor.26.3.543.10582>
- [5] Henry, W., Romesh, S. and Lieven, V. (2000) Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications Printed in the United States of America. Kluwer Academic Publishers, Totnes.
- [6] Klerk, E.D. (2002) Aspects of Semidefinite Programming. Kluwer Academic Publishers, Totnes.
- [7] Bastin, F., Cirillo, C. and Toint, P.L. (2006) Convergence Theory for Nonconvex Stochastic Programming with an Application to Mixed Logit. *Mathematical Programming*, **108**, 207-234. <https://doi.org/10.1007/s10107-006-0708-6>
- [8] Bastin, F., Cirillo, C. and Toint, P.L. (2006) An Adaptive Monte Carlo Algorithm for Computing Mixed Logit Estimators. *Computational Management Science*, **3**, 55-79. <https://doi.org/10.1007/s10287-005-0044-y>
- [9] Faraut, J. and Korányi, A. (1994) Analysis on Symmetric Cones. Clarendon Press, Oxford.
- [10] Shapiro, A. (2000) Stochastic Programming by Monte Carlo Simulation Methods. SPEPS, SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718751>
- [11] Shapiro, A., Dentcheva, D. and Ruszczyński, A. (2009) Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. SIAM, Philadelphia.