

一类耦合浅水波方程的解析求解和应用分析

朴圣斌^{1*}, 马 丁^{1,2}, 罗文琛², 周 昱^{1,3#}

¹江苏科技大学理学院, 江苏 镇江

²中南大学物理与电子学院, 湖南 长沙

³江苏科技大学深蓝学院, 江苏 镇江

收稿日期: 2022年4月12日; 录用日期: 2022年5月7日; 发布日期: 2022年5月18日

摘 要

本文通过解析方法求解了一类耦合的非线性浅水波方程并对所得解进行了讨论。研究了不同参数情况下方程解的行为, 结论表明频散系数可明显影响浅水波方程的动力学。基于本文给出的方程, 讨论了其在特殊参数下的一些拓展应用。本文的结论对浅水波方程有关性质的研究具有一定参考意义。

关键词

浅水波, 解析方法, 流体动力学, 非线性演化方程

The Analytical Solution and Application of a Coupled Shallow Water Wave Equation

Seong-Bin Park^{1*}, Muaath Abdulwahab^{1,2}, Wenchen Luo², Yu Zhou^{1,3#}

¹School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang Jiangsu

²School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha Hunan

³Shenlan College, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang Jiangsu

Received: Apr. 12th, 2022; accepted: May 7th, 2022; published: May 18th, 2022

Abstract

In this paper, solutions of a set of coupled nonlinear shallow water wave equations are solved based on the analytical method, and the results are discussed. The behavior of the equation solution under different parameters is studied. We concluded that the dispersion coefficient can sig-

*第一作者。

#通讯作者。

nificantly affect the dynamics of the shallow water wave. Based on the equations given in this paper, some extended applications under special parameters are discussed. The result presented in this paper may give insights to the relevant studies of the shallow water wave equation.

Keywords

Shallow Water Wave, Analytical Method, Hydrodynamics, Nonlinear Evolution Equation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为描述体系含时演化问题的有力工具, 微分方程常用来刻画体系的动力学, 通常这些方程以偏微分方程的形式存在, 含有时间和空间变量, 称为演化方程, 其在应用数学和工程等各个领域发挥着重要作用[1]。研究已充分证明, 大部分自然现象都是由非线性规律支配。数学工具虽然已经过充分的发展, 但依然不足以处理所有已知的非线性现象, 非线性现象及其所表现的时空演化依然是科研的难点和热点。

为了寻求非线性演化方程的解, 研究者在数值和解析两方面进行了很多尝试。除丰富多彩的数值方法外, 各种解析方法也在近些年得到了迅速的发展。不同于成熟的线性微分方程理论, 非线性的存在使得微分方程的通解一般难以求出, 无法给出一个普适的求解公式。尽管如此, 还是有一些求解非线性演化方程的有效方法不断被提出, 并在实际问题中得到广泛应用。这些方法包括 Cole-Hopf 变换、Bäcklund 变换、广田双线性变换、反散射法、Darboux 变换等。在寻求非线性偏微分方程的精确解过程中, 近年来又发展出了一些其他的直接方法, 例如 tanh 和 tanh-coth 法、Adomian 分解法、 G'/G -展开法、 F -展开法、雅可比椭圆函数方法、Riccati 方程辅助法等。这些方法都可用来构造非线性偏微分方程的解[2]。需要指出, 无论是其物理机制还是数学描述, 各类非线性现象是非常复杂的, 尚未发现也很难找到一种对于任一非线性偏微分方程可找到其所有解的有效方法。

作为流体力学的重要研究对象, 水波的运动和形状通常多种多样, 但在一定的假设前提下, 水波的动力学在数学上可以用一系列偏微分方程来描述。对水波而言, 水深的变化会引起一系列有关性质的改变, 如衍射、反射、干涉效应等。当水深大于波长的两倍时, 被视为深水, 而波长远大于水深时称为浅水。相较于深水, 在浅水中波的动力学更为复杂, 现有知识也更为有限。浅水波的研究与很多应用问题直接相关, 故也引起了应用数学家的持续广泛关注。

一般而言浅水波呈弱非线性, 但经动力学演化后也可出现海啸、畸波等典型的强非线性现象。由于固有的频散特性和非线性特性, 水波传播时可能会膨胀。一般情况下, 单频且线性的理想流体比较少见, 但幸运的是, 在满足某些条件的情况下, 可以构建出一些可传播相对长时间和长距离的稳定形式的波, 这些波的行为可以较为透彻地理解[3]。Airy 和 Boussinesq 曾分别给出两种理论描述浅水波, 后经林家翘等人的努力, 相关理论得以在统一的框架中建立起来[4]。基于 Whitham 在上世纪 60 年代所做的变分计算, 并经过 Broer 和 Kaup 在 70 年代中期的发展, 如今 Whitham Broer-Kaup (WBK) 方程在许多领域都具有广泛的应用潜力[5] [6] [7], 尤其是该方程可作为研究浅水波动力学非常有用的工具, 在港口建设或海岸设计中均具有重要研究价值。除用于海洋动力学的分析外, 该方程也可在光纤光学、等离子体物理等的研究中得到运用。WBK 方程形式如下所示,

$$\eta_t + (u\eta)_x + \alpha u_{xxx} - \beta \eta_{xx} = 0, \quad (1a)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x + \beta u_{xx} = 0, \quad (1b)$$

式中 α 的 β 和表示三阶和二阶频散系数, $u(x, t)$ 和 $\eta(x, t)$ 为水平速度场和水面波高。方程(1)在特殊特殊情况下的反变换解由 Kaup 和 Ablowitz 给出, 后方程的对称性由李群和李代数研究给出[8]。对方程的研究还包括 Darboux 变换[9]、Bäcklund 变换[10]、Exp-展开法[11]、连续 Riccati 展开法[12]以及各种数值方法。

本文基于 Kudryashov 方法并对其改进, 用以研究浅水波的动力学并给出其演化性质。在下一节给出方法概述, 在第 3 节将展示对速度场和波高计算的详细过程。第 4 节对研究结果进行应用讨论并评述。最后在第 5 节给出结论。

2. 方法介绍

首先介绍 Kudryashov 方法。考虑一个非线性偏微分方程(PDE):

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0. \quad (2)$$

其中 P 是函数 $u(x, t)$ 及其各次偏导数的多项式, 其中涉及到最高阶导数项和非线性项。方法主要步骤如下:

步骤 1: 为求所给方程的行波解, 应用行波变换代换变量 x 和 t ,

$$\xi = kx - \omega t, \quad (3)$$

其中 k 和 ω 为常数。然后借助式(3)将式(2)简化为一个非线性常微分方程(ODE),

$$P(u, u', u'', \dots) = 0. \quad (4)$$

这里的撇号表示对新变量 ξ 求导。显然, 相较(2)式, 式(4)中的变量个数有所减少。

步骤 2: 假设式(4)的解可以表示为多项式

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n Q^n(\xi), \quad (5)$$

当次数为 N 时, 函数 $Q(\xi)$ 为如下形式

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + qA^\xi}. \quad (6)$$

这里我们注意到函数 $Q(\xi)$ 是非线性 ODE 的一个尝试解

$$Q' = (Q^2 - Q) \ln A. \quad (7)$$

注意到, 多项式(5)的最高阶次 N , 由最高阶导数和最高次非线性之间的齐次平衡原理得到。式(2)中每一项的次数的计算由下式给出,

$$\text{Deg} \left[u^m(\xi) \left(\frac{d^s u^r(\xi)}{d\xi^s} \right)^q \right] = np + q(mr + s). \quad (8)$$

步骤 3: 将解(5)及其导数带入到方程(4)中, 得到了新的式(4)表达式, 是 $Q(\xi)$ 的多项式形式,

$$P(Q(\xi)) = 0. \quad (9)$$

步骤 4: 通过在式(9)中计算 $Q(\xi)$ 的幂次, 我们得到一个代数方程组。

步骤 5: 求解得到的这个代数方程组, 得到系数 a_n 和其他相关变量的值。将这些值带入到式(5)中, 则得到原非线性偏微分方程(2)的解。

下一节将详细给出该方法在求解浅水波动力学中的应用。

3. 浅水波的行波解

在本节中, 我们运用 Kudryashov 方法具体来处理浅水波问题。

考虑耦合的 WBK 方程(1)并利用行波变换 $\xi = kx - \omega t$, 其中 k 为波数, ω 为常数。将时空变量 x 和 t 的导数都变换为新变量 ξ 的导数后, 可以得到方程

$$-\omega u' + ku u' + \beta k^2 u'' + k\eta' = 0, \quad (10a)$$

$$-\omega \eta' - \beta k^2 \eta'' + k(u\eta)' + \alpha k^3 u''' = 0, \quad (10b)$$

这里 u 和 η 都是 ξ 的未知函数, 我们将在下文中进行处理。

对式(10)中的第一个方程进行积分, 得到

$$-\omega u + \frac{1}{2}ku^2 + \beta k^2 u' + k\eta + C = 0. \quad (11)$$

其中 C 是积分中引入的积分常数。现在我们就有了 η 的表达式, 它是以 u 及其导数 u' 所共同表示的,

$$\eta = \frac{\omega}{k}u - \frac{1}{2}u^2 - \beta ku' + C. \quad (12)$$

把这个表达式代入(10b)并记录 $\eta(\xi)$ 的各阶导数的表达式, 就可以得到只含有 $\eta(\xi)$ 的方程, 形如

$$(\alpha + \beta^2)k^3 u''' - \frac{3}{2}ku^2 u' + 3\omega u u' + \left(Ck - \frac{\omega^2}{k} \right) u' = 0. \quad (13)$$

将解 $\eta(\xi)$ 以 $Q(\xi)$ 的多项式形式代入式(13), 根据其次平衡原理, 考虑到(5)式中 N 的最高次为 1, 随之得到了一个 $Q(\xi)$ 的表达式, 这里为了方便起见我们将它进行省略。对 $Q(\xi)$ 的表达式进行排序, 将 $Q(\xi)$ 的每一阶记为

$$6k^3 (\alpha + \beta^2) \ln^3 A a_1 - \frac{3}{2}k \ln A a_1 = 0, \quad (14a)$$

$$\frac{3}{2}k \ln A a_1^3 + 3(\omega - ka_0) \ln A a_1^2 - 12(\alpha + \beta^2)k^3 \ln^3 A a_1 = 0, \quad (14b)$$

$$3(ka_0 - \omega) \ln A a_1^2 + 7(\alpha + \beta^2)k^3 \ln^3 A a_1 + 3\left(\omega - \frac{k}{2}a_0^2\right)a_1 + \left(Ck - \frac{\omega^2}{k}\right) \ln A a_1 = 0, \quad (14c)$$

$$(\alpha + \beta^2)k^3 \ln A a_1 - 3\left(\omega - \frac{k}{2}a_0^2\right) \ln A a_1 + \left(Ck - \frac{\omega^2}{k}\right) \ln A a_1 = 0. \quad (14d)$$

解这组方程, 并进行化简, 可以得到

$$a_0 = \frac{-2(\alpha + \beta^2)k \ln A + R_s R_s}{R_s}, \quad (15a)$$

$$a_1 = k \ln A R_s, \quad (15b)$$

$$k = k, \quad (15c)$$

$$\omega = kR_l. \tag{15d}$$

其中的参数 $R_l = \pm\sqrt{(\alpha + \beta^2)k^2 \ln^2 A - 2C}$, $R_s = \pm 2\sqrt{\alpha + \beta^2}$.

现在写出 $u(\xi) = a_0 + a_1 Q(\xi)$ 的表达式, 这里 $Q(\xi) = 1/(1 + qA^\xi)$. 根据表达式中的各项的正负号, 将解的表达式分为四组(如下). 利用 u 的这些解, 可以直接根据式(12)求出 η .

解 1:

$$u_1 = \frac{\sqrt{(\alpha + 2\beta^2)[(\alpha + \beta^2)k^2 \ln^2 A - 2C]}}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} - \frac{(\alpha + \beta^2)k \ln A}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} + \frac{2\sqrt{\alpha + \beta^2}k \ln A}{1 + qA^\xi}, \tag{16a}$$

$$\eta_1 = \frac{2(\alpha + \beta^2 + \beta\sqrt{\alpha + \beta^2})k^2 qA^\xi \ln^2 A}{(1 + qA^\xi)^2}. \tag{16b}$$

解 2:

$$u_2 = -\frac{\sqrt{(\alpha + 2\beta^2)[(\alpha + \beta^2)k^2 \ln^2 A - 2C]}}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} + \frac{(\alpha + \beta^2)k \ln A}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} - \frac{2\sqrt{\alpha + \beta^2}k \ln A}{1 + qA^\xi}, \tag{17a}$$

$$\eta_2 = \frac{2(\alpha + \beta^2 - \beta\sqrt{\alpha + \beta^2})k^2 qA^\xi \ln^2 A}{(1 + qA^\xi)^2}. \tag{17b}$$

解 3:

$$u_3 = -\frac{\sqrt{(\alpha + 2\beta^2)[(\alpha + \beta^2)k^2 \ln^2 A - 2C]}}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} - \frac{(\alpha + \beta^2)k \ln A}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} + \frac{2\sqrt{\alpha + \beta^2}k \ln A}{1 + qA^\xi}, \tag{18a}$$

$$\eta_3 = \frac{2(\alpha + \beta^2 + \beta\sqrt{\alpha + \beta^2})k^2 qA^\xi \ln^2 A}{(1 + qA^\xi)^2}. \tag{18b}$$

解 4:

$$u_4 = \frac{-\sqrt{(\alpha + 2\beta^2)[(\alpha + \beta^2)k^2 \ln^2 A - 2C]}}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} + \frac{(\alpha + \beta^2)k \ln A}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} - \frac{2\sqrt{\alpha + \beta^2}k \ln A}{1 + qA^\xi}, \tag{19a}$$

$$\eta_4 = \frac{2(\alpha + \beta^2 - \beta\sqrt{\alpha + \beta^2})k^2 qA^\xi \ln^2 A}{(1 + qA^\xi)^2}. \tag{19b}$$

将变量 ξ 回代为 x 和 t , 在图 1 给出解 1 和 2 的速度场 $u(x,t)$ 和波高 $\eta(x,t)$ 的演化. 有趣的是, 从空间和时间的角度看, 波高形式上呈现包络型对称, 而流场速度表现为扭曲型反对称. 选取参数 $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $A = 2$, $q = 2$, $C = 1/2$ 以及 $k = 1$. 由于 R_s 的符号相反, 所以图 1(a)中 η 的振幅远大于图 1(b).

类似地, 通过分析解 3 和 4, 选取参数 $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $A = 2$, $q = 2$, $C = 1/2$ 以及 $k = 1$. 可发现, 虽然使用相同的参数, 但波高明显小于解 1 中的, 而速度场与解 1 相比符号相反. 这表明, 波的动力学对符号的改变很敏感. 比较解 4 和解 2, 我们可以发现虽然速度改变符号, 波高是相似的. 这给了我们一个提示, 即速度和波高依赖于前面已得的方程解.

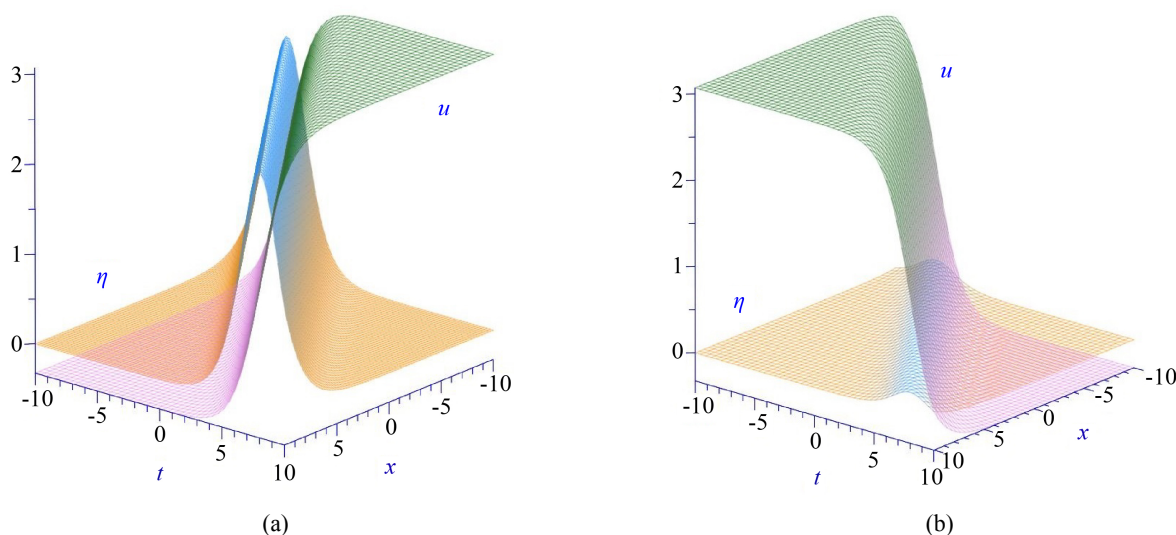


Figure 1. The evolutions of velocity field $u(x,t)$ and $\eta(x,t)$ for solution groups 1(a) and 2(b). Here $\alpha=2$, $\beta=2$, $A=2$, $q=2$, $C=1/2$ and $k=1$ are chosen

图 1. 对于解 1(a)和 2(b), 速度场 $u(x,t)$ 和 $\eta(x,t)$ 的演化。选取参数为 $\alpha=2$, $\beta=2$, $A=2$, $q=2$, $C=1/2$ 及 $k=1$

为清晰地了解浅水沿海岸传播的动力学, 我们给出二维图 2, 来表明解 1 和解 4 在 $t=0$ 时的形状。很明显看出, $R_s > 0$ 和 < 0 两种情况下速度场 $u(x,t)$ 为扭结或反扭结形状而波高 $\eta(x,t)$ 为包络形状。选择了三组参数, 分别是 $A=3, q=1$ (实线), $A=2, q=2$ (虚线) 以及 $A=5/2, q=4$ (点虚线)。由 u 的曲线可知, 对于 R_s 为正的解 1, 解为扭结型; 而对于 $R_s < 0$ 的解 4 是反扭结型。当 A 与 q 之比等于 1 时, u 的大小的绝对值小于另外两组参数。正值 x 对于解 1 和解 4 都是有限值。从曲线 u 来看, 对于 $R_s > 0$, 值为正; 而当 $R_s < 0$ 的情况下, 值为负, 这表明了速度场的方向。

考虑到波高参数的演化, 从图 2 中看出, 正的 R_s 和负的 R_s 都存在一个钟形包络线。不同的线形则表明不同的参数。由于波的解性质不同, 参数 A 和 q 的比值明显地改变了曲线。无论 A 和 q 的比值是大是小, 对于 $R_s < 1$ 时, 波高的值都小于 1。

从数学角度看, 可以说 u 的解是一个类似激波的解, 而 η 的解是一个类似孤波的解。我们用 $\alpha=2$, $\beta=2$, $C=1/2$ 和 $k=1$ 来画图。从数值上发现, 对于 $R_s < 0$ 的情况(右侧两图), η 的值比左图小得多, 这表明: 对于一个方程, 虽然有相同的一组参数, 但不同的解可以表现出明显不同的性质。

但研究表明, 无论对何种情况, 当 $x > 0$ 时, 解都有渐近线。对于 η , 在 $x=0$ 区域附近, 曲线在中心附近达到峰值, 而两端均趋于零。此外, 除了 A 和 q 相等外, 每组参数所对应的曲线的峰值并不完全重合于 $x=0$ 点上, 这体现了系统内在的非线性。

4. 讨论

考虑前面已经讨论过的 WBK 方程, 实际上我们可以将这个方程扩展到一类方程组。下面列出一些特殊情形。

情形 1: 当 $\alpha=0$ 时, 方程(1)成为经典的长波方程, 它可以描述有扩散的浅水波。

情形 2: 当 $\alpha=1$ 且 $\beta=0$ 时, 方程(1)变成 Boussinesq 方程, 该方程是描述水波的一种有效模型。

情形 3: 当 $\alpha=1/3$ 且 $\beta=0$ 时, 方程(1)为频散长波方程, 该方程对研究近岸水域尤为重要。

情形 4: 当 $\alpha=\sigma^2/4$ 且 $\beta=0$ 时, 系统(2)成为完全可积的 Kaup-Boussinesq 方程, 其中 σ 为参数。

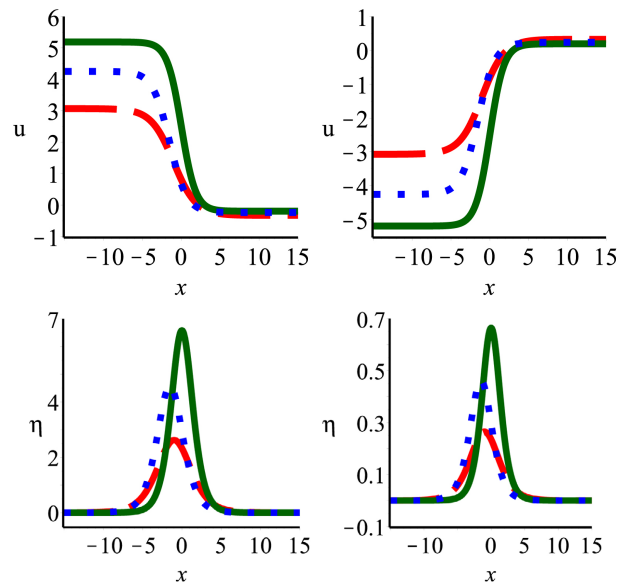


Figure 2. The cross-section at $t = 0$ of the horizontal velocity $u(x,t)$ and height deviation $\eta(x,t)$ for solutions with $R_s > 0$ (Group 1) and $R_s < 0$ (Group 4), respectively. The left two panels are for case 1 and right two panels for case 2 with $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $C = 1/2$ and $k = 1$. Solid line ($A = 3, q = 1$), dashed line ($A = 2, q = 2$) and dotted line ($A = 5/2, q = 4$) are shown here

图 2. 对应于 $R_s > 0$ (解 1) 及 $R_s < 0$ (解 4), 在 $t = 0$ 时水平速度 $u(x,t)$ 和波高 $\eta(x,t)$ 的图。左侧两图为情况 1, 右侧两图为情况 2, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $C = 1/2$ 且 $k = 1$ 。不同线形分别为, 实线 ($A = 3, q = 1$), 虚线 ($A = 2, q = 2$) 及点虚线 ($A = 5/2, q = 4$)

同上分析, 在图 3 中绘制情形 1 的经典长波方程解和情形 2 的 Boussinesq 方程解并给出动力学演化行为。它们与前文给出的方程解在性质上是相似的。得到的结论是显然合理的, 因为这些方程来自于同一类具有某些相同特征的方程, 它们所表现的动力学性质是由方程的内禀属性所决定的。

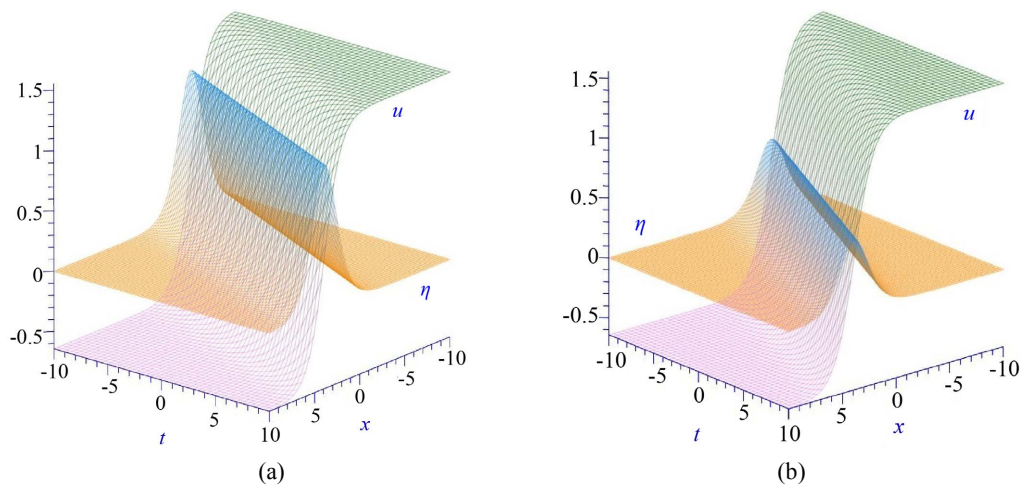


Figure 3. The evolution behavior of $u(x,t)$ and $\eta(x,t)$ for classical long wave equation if $\alpha = 0$ (a) and variant Boussinesq equation if $\alpha = 1$ and $\beta = 0$ (b)

图 3. 经典长波方程 $\alpha = 0$ (a) 和 Boussinesq 方程 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$ (b) 时 $u(x,t)$ 和 $\eta(x,t)$ 的演化行为对比

我们注意到,也有一些其他工作提出了一些具有复数项系数的方程解,但这些解不应该适合我们这里所讨论的水波情况,因为水的速度和波高作为可观测量不能包含虚数项。另外,有一些结果得到的解数值很大,已超出了实际可能的情况,所以尽管似乎这些解带入方程后可能得到满足,但从应用数学和实际的角度看,很难找到这类解的确切用途,也超出了应用的范畴。尽管微分方程的解无穷无尽,但是很明显数学上可能存在的解并非都具有实际意义。需说明的是,本文所用方法得到的解具有普适性和合理性。

5. 总结

在流体力学的研究中,波的传播始终是一个关键问题,许多研究都是基于数值方法的辅助,如何找到本文所提出的非线性演化方程的解析解是一个有趣而重要的问题。本文在针对近岸浅水波的研究中,采用 Whitham-Broer-Kaup (WBK)方程作为模型来处理所研究的水波动力学问题。利用改进的 Kudryashov 方法,我们得到了描述水波动力学的解析解,给出了频散系数对体系动力学的影响。我们给出的求解过程简洁方便,由于不依赖于任何假定条件,因此我们的结果具有一般意义。希望本文的研究方法能对这一领域的相关研究提供启示。

致 谢

研究得到了国家自然科学基金(11804396)的资助。感谢梁雨珂和徐扬的有益讨论。

参考文献

- [1] Debnath, L. (2012) *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. 3rd Edition, Birkhäuser, Boston. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8265-1>
- [2] Arendt, W., Brezis, H. and Pierre, M. (2004) *Nonlinear Evolution Equations and Related Topics*. Birkhäuser, Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7924-8>
- [3] Pelinovsky, E. and Kharif, C. (Eds.) (2016) *Extreme Ocean Waves*. Springer, Cham, 12-15. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-21575-4>
- [4] Lin, C. and Clark, J. (1959) On the Theory of Shallow Water Waves. *Tsing Hua Journal of Chinese Studies*, **1**, 54-62.
- [5] Whitham, G. (1967) Variational Methods and Applications to Water Waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **299**, 6-25. <https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0119>
- [6] Broer, L. (1975) Approximate Equations for Long Water Waves. *Applied Scientific Research*, **31**, 377-395. <https://doi.org/10.1007/BF00418048>
- [7] Kaup, D. (1975) A Higher-Order Water-Wave Equation and the Method for Solving It. *Progress of Theoretical Physics*, **54**, 396-408. <https://doi.org/10.1143/PTP.54.396>
- [8] Zhang, Z.Y., Yong, X.L. and Chen, Y.F. (2008) Symmetry Analysis for Whitham-Broer-Kaup Equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **15**, 383-397. <https://doi.org/10.2991/jnmp.2008.15.4.3>
- [9] Xu, T.T. (2015) Darboux Transformation and New Multi-Soliton Solutions of the Whitham-Broer-Kaup System. *Applied Mathematics*, **6**, 20-27. <https://doi.org/10.4236/am.2015.61003>
- [10] Fan, E.G. and Zhang, H.Q. (1998) Backlund Transformation and Exact Solutions for Whitham-Broer-Kaup Equations in Shallow Water. *Applied Mathematics and Mechanics*, **19**, 713-716. <https://doi.org/10.1007/BF02457745>
- [11] Zheng, Z. and Shan, W.R. (2009) Application of Exp-Function Method to the Whitham-Broer-Kaup Shallow Water Model Using Symbolic Computation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 2390-2396. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.08.032>
- [12] Lou, S.Y. (2015) Consistent Riccati Expansion for Integrable Systems. *Studies in Applied Mathematics*, **134**, 372-402. <https://doi.org/10.1111/sapm.12072>