

# 一类具有感染意识和人口移徙的HIV/AIDS传染病模型

殷崇阳, 孟新友\*

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2022年5月21日; 录用日期: 2022年6月11日; 发布日期: 2022年6月22日

## 摘要

本文首先建立了一个具有感染意识和不具有感染意识、人口移徙的HIV/AIDS传染病模型。接着给出了基本再生数的解析表达式, 并证明了无病平衡点的全局渐近稳定性和疾病的一致持久性。然后根据四川省2004~2018年实际的艾滋病人数, 利用MCMC算法确定模型的最佳参数值, 并得到了基本再生数 $R_0 = 2.95$  (95% CI: (0.85~5.25))。最后, 数值模拟表明感染意识进展率和移徙对艾滋病传播有重要的影响。

## 关键词

HIV, 人口移徙, 感染意识, 参数估计, 敏感性分析

# A HIV/AIDS Epidemic Model with Infection Awareness and Population Migration

Chongyang Yin, Xinyou Meng\*

School of Science, Lanzhou University of Technology, Gansu Lanzhou

Received: May 21<sup>st</sup>, 2022; accepted: Jun. 11<sup>th</sup>, 2022; published: Jun. 22<sup>nd</sup>, 2022

## Abstract

First, this paper establishes an HIV/AIDS epidemic model considering migration, with and without infection awareness. Then, the expression of the basic regeneration number is given, and the global asymptotic stability of the disease-free equilibrium and the uniform persistence of the disease are proved. Next, according to the number of AIDS patients in Sichuan Province from 2004 to 2018, the MCMC algorithm is used to determine the optimal parameter value of such model, and the basic regeneration number is  $R_0 = 2.95$  (95% CI: (0.85~5.25)). Finally, numerical simulations

\*通讯作者。

show that the rate of infection awareness progression and migration has important effects on HIV transmission.

## Keywords

HIV, Population Migration, Infection Awareness, Parameter Estimation, Sensitivity Analysis

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

艾滋病是由人类免疫缺陷病毒引起的导致免疫系统持续恶化的一种疾病, 危害极强, 一旦感染艾滋病病毒就会造成免疫系统缺陷, 进而引发机会性感染等各种疾病最后导致死亡[1]。根据世界卫生组织发布的艾滋病自我监测指南, 接近 40% 的感染者对其病情一无所知。在部分南非地区, 甚至 80% 的人不知晓自己的病情, 超过 90% 的人不清楚自己的伴侣是否感染[2], 这对预防艾滋病的蔓延是一项重大的挑战。研究表明, 增加艾滋病检测, 从而增加感染意识的提高率, 能有效减少艾滋病的传染率[3]。

随着艾滋病愈演愈烈, 许多数学工作者建立了大量的数学模型对艾滋病进行建模和分析, 以寻求最佳控制手段。一方面, 许多研究工作都表明感染意识率对疾病的传播模式具有重要影响[4] [5] [6] [7], 对其合理控制能有效降低传染率。Sharma 等[4]构建了一个具有时滞的非线性传染病模型, 考虑了意识影响感染个体行为发生改变, 研究意识对疾病流行的影响。Roy 等[5]基于大多数感染者不知情下建立了一个数学模型, 得出个体意识能够促使易感染者与感染者之间的感染率降低。纳[6]和朱[7]在建立 HIV 模型时, 也都考虑了感染意识对疾病流行的动态。他们的结果都表明提高意识率, 有助于加强感染者的治疗率和改变个体自我行为, 从而有效控制疾病的传播。另一方面, 随着经济全球化的发展, 交通工具的快速更迭, 加速了人群之间的相互流动, 从而加速了疾病的快速传播。因此, 在对传染病进行预警和控制过程中, 人口移民问题也应该加以分析。例如马来西亚最近发生的事件表明, 该国的移徙问题有所增加, 可能造成疾病传播的高风险[8]。在过去的几十年里, 马来西亚卫生专家表明移民一直是一个令人担忧的问题, 因为那些在马来西亚停留更长时间的人会对卫生保健系统造成严重影响[9]。Apenteng 等[10]建立了一个具有人口移徙的数学模型, 得到移民对艾滋病的流行具有关键作用。但是该模型并没有考虑到感染意识在模型中的作用。

为了更好地描述艾滋病的流行状况, 应该结合实际, 将感染意识和人口移民问题加以结合。因此, 在建立艾滋病病毒/艾滋病模型时也应考虑到移民问题, 特别是在马来西亚等亚洲国家。在全球范围内世界各国因移民而相互联系, 移民不仅对接受移民的国家产生经济影响。还对移民者离开的国家产生健康影响。另一方面, 移民者的保健需要得不到充分满足, 这对艾滋病的发展起着一定的影响作用。因此, 本文通过建立具有感染意识和考虑移民对艾滋病传播的影响, 并根据实际的病例数据采用 MCMC 算法估计出模型的最佳参数, 从而模拟感染意识率和移民数量的变化对疾病有何种影响, 以此来提出有效地控制策略。

## 2. 模型构建

本节建立具有感染意识和未具有感染意识的 HIV/AIDS 传染病数学模型, 并考虑人口移徙对

HIV/AIDS 传播的动力学行为。将人群分为 5 个仓室:  $S$ ,  $I_u$ ,  $I_a$ ,  $A$  和  $M$ , 其中  $S$  表示易感者,  $I_u$  表示为具有感染意识的染病者(即不知道自己感染 HIV 病毒),  $I_a$  表示具有感染意识的染病者,  $A$  表示艾滋病患者,  $M$  表示移徙人口的数量。考虑到艾滋病患者已经病情严重, 假设这类人群不与易感者接触, 因此其不具备传播能力。这样感染主要发生在具有感染意识和不具有感染意识的 HIV 感染者中, 建立如下的模型:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda + \theta_1 M - \beta_1 S I_u - \beta_2 S I_a - dS, \\ \frac{dI_u}{dt} &= \beta_1 S I_u + \beta_2 S I_a + \theta_2 M - \varepsilon_1 I_u - \delta I_u - dI_u, \\ \frac{dI_a}{dt} &= \delta I_u + \theta_3 M - \varepsilon_2 I_a - dI_a, \\ \frac{dA}{dt} &= \theta_4 M + \varepsilon_1 I_u + \varepsilon_2 I_a - dA - \mu A, \\ \frac{dM}{dt} &= \Pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) M - dM. \end{aligned} \tag{1}$$

在模型(1)中,  $\Lambda$  表示易感人群的招募率,  $d$  表示个体的自然死亡率,  $\mu$  表示因病死亡率,  $\delta$  表示感染意识的进展率,  $\beta_1$  表示未具有感染意识传染易感人群的感染率,  $\beta_2$  表示具有感染意识传染易感人群的感染率,  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  分表示未具有感染意识个体和具有感染意识个体发展成为艾滋病患者的进展率,  $\theta_i (i=1,2,3,4)$  表示移徙人口分别进入易感者、未具有感染意识的感染者、具有感染意识的染病者和艾滋病患者的进展率,  $\Pi$  表示进入仓室  $M$  的输入率。

### 3. 基本再生数

定义

$$\Omega = \left\{ (S, I_u, I_a, A, M) \in R_+^5 : 0 \leq S, I_u, I_a, A, M \leq \frac{\Lambda + \Pi}{d} \right\}$$

易知系统(1)的解是有界的并且  $\Omega$  是正向不变集。接下来, 全文将在集合  $\Omega$  中证明系统(1)的动力学性质。

根据系统(1), 容易得到模型始终存在无病平衡点  $E_0 \left( \frac{\Lambda(\theta_1 + d) + \theta_1 \Pi}{d(\theta_1 + d)}, 0, 0, 0, \frac{\Pi}{\theta_1 + d} \right)$ 。利用下一代矩阵法和基本再生数的概念[11], 可以得到系统(1)的基本再生数  $R_0$ 。令  $x = (I_u, S, I_a, A, M)^T$ , 则系统(1)可以写成如下形式:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - V(x),$$

其中

$$F(x) = \begin{bmatrix} \beta_1 S I_u + \beta_2 S I_a + \theta_2 M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I_u + \delta I_u + d I_u \\ -\Lambda - \theta_1 M + \beta_1 S I_u + \beta_2 S I_a + d S \\ -\delta I_u - \theta_3 M + \varepsilon_2 I_a + d I_a \\ -\theta_4 M - \varepsilon_1 I_u - \varepsilon_2 I_a + d A + \mu A \\ -\Pi + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) M + d M \end{bmatrix}.$$

在无病平衡点  $E_0$  处可以得到  $F(x)$  和  $V(x)$  的雅克比矩阵:

$$f = DF(E_0) = \begin{bmatrix} \beta_1 S & 0 & \beta_2 S & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$v = DV(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \delta + d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 S & d & \beta_2 S & 0 & -\theta_1 \\ -\delta & 0 & \varepsilon_2 + d & 0 & -\theta_3 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_2 & d + \mu & -\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + d \end{bmatrix}.$$

从而, 可以得到再生矩阵为:

$$f v^{-1} = \begin{bmatrix} a\beta_1 + \frac{a\beta_2\delta}{\varepsilon_2 + d} & 0 & a\beta_2 & 0 & \frac{\beta_2(\Lambda(\theta_1 + d) + \theta_1\Pi)\theta_3}{d(\theta_1 + d)(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + d)(\varepsilon_2 + d)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $a = \frac{\Lambda(\theta_1 + d) + \theta_1\Pi}{d(\theta_1 + d)(\varepsilon_1 + \delta + d)}$ , 因此, 模型(1)的基本再生数为:

$$R_0 = \rho(f v^{-1})$$

$$= \frac{\Pi\beta_1 d\theta_1 + \Pi\beta_1\theta_1\varepsilon_2 + \Pi\beta_2\delta\theta_1 + \Lambda(\theta_1 + d)\beta_1 d + \Lambda(\theta_1 + d)\beta_1\varepsilon_2 + \Lambda(\theta_1 + d)\beta_2\delta}{d(\theta_1 + d)(d^2 + d\delta + d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)}.$$

#### 4. 无病平衡点的全局渐近稳定性

**定理 4.1** 当  $R_0 < 1$  时, 模型(1)的无病平衡点是局部渐近稳定的; 当  $R_0 > 1$  时, 模型(1)的无病平衡点是不稳定的。

**证明:** 模型(1)在无病平衡点处的特征方程为:

$$(\lambda + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + d)(\lambda + \mu + d)(\lambda + d) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 S + (\varepsilon_1 + \delta + d) & -\beta_2 S \\ -\delta & \lambda + \varepsilon_2 + d \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

显然, 方程(2)的 3 个特征值分别为:  $\lambda_1 = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + d)$ ,  $\lambda_2 = -(\mu + d)$  和  $\lambda_3 = -d$ , 其余的特征值由下列方程给出:

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0, \quad (3)$$

其中  $c_1 = 2d + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \delta - a\beta_1(\varepsilon_1 + \delta + d)$ ,  $c_2 = 1 - R_0$ 。

假设  $R_0 < 1$ , 可得  $a\beta_1(\varepsilon_1 + \delta + d) < 2d + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \delta$ 。此时  $c_1 > 0$ ,  $c_1 c_2 > 0$ 。由 Routh-Hurwitz [12] 判据可知, 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的; 当  $R_0 > 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  是不稳定的。

**定理 4.2** 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  在  $\Omega$  内是全局渐近稳定的。

**证明:** 令

$$X = \begin{bmatrix} \beta_1 S & 0 & \beta_2 S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \delta + d & 0 & 0 & 0 & -\theta_2 \\ \beta_1 S & d & \beta_2 S & 0 & -\theta_1 \\ -\delta & 0 & \varepsilon_2 + d & 0 & -\theta_3 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_2 & d + \mu & -\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + d \end{bmatrix}.$$

可知模型在  $\Omega$  中满足下列不等式:

$$\frac{dx}{dt} \leq (X - Y)x$$

令  $U = (\beta_1 S \ 0 \ \beta_2 S \ 0 \ 0)$ 。因为  $R_0 = \rho(XY^{-1}) = \rho(Y^{-1}X)$ ，由此容易发现， $UY^{-1}X = R_0U$ 。

接下来，构造 Lyapunov 函数： $L = UY^{-1}x$ 。沿着模型(1)求全导数可得

$$\frac{dL}{dt} = UY^{-1} \frac{dx}{dt} \leq UY^{-1}(X - Y)x = (R_0 - 1)Ux.$$

当  $R_0 < 1$  时，有  $\frac{dL}{dt} \leq 0$ ，此时  $\frac{dL}{dt} = 0$  时，有  $Ux = 0$ ，则  $I_u = I_a = A = 0$ ，从模型(1)可以得到  $S = \frac{\Lambda(\theta_1 + d) + \theta_1 \Pi}{d(\theta_1 + d)}$ ，

$M = \frac{\Pi}{\theta_1 + d}$ 。从而当  $\frac{dL}{dt} = 0$  时，系统(1)有唯一  $\omega$  不变集是单点集  $E_0$ 。根据 LaSalle 不变集原理[13]， $E_0$  在  $\Omega$  内全局渐近稳定。

### 5. 疾病的一致持久性

**定理 5.1** 当  $R_0 > 1$  时，对于模型(1)存在一个正常数  $\xi$ ，使得对初始值  $S(0) \geq 0, I_u(0) \geq 0, I_a(0) \geq 0, A(0) \geq 0, M(0) \geq 0$ ，模型(1)的所有解满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (I_u(t), I_a(t), A(t), M(t)) \geq (\xi, \xi, \xi, \xi).$$

**证明：** 令

$$X = \left\{ (S, I_u, I_a, A, M) \mid S \geq 0, I_u \geq 0, I_a \geq 0, A \geq 0, M \geq 0, 0 \leq S + I_u + I_a + A + M \leq \frac{\Lambda + \Pi}{d} \right\},$$

$$X_0 = \left\{ (S, I_u, I_a, A, M) \in X \mid I_u > 0, I_a > 0, A > 0, M > 0 \right\}, \partial X_0 = X \setminus X_0.$$

下面，只需要证明模型(1)关于  $(X_0, \partial X_0)$  是一致持久的。

首先，可以容易发现  $X$  和  $X_0$  是正不变集， $\partial X_0$  在  $X$  中是闭的。同时模型(1)是点耗散的，因此，模型(1)存在一个全局吸引子。令

$$M_\partial = \left\{ (S(0), I_u(0), I_a(0), A(0), M(0)) \in \partial X_0 : (S(t), I_u(t), I_a(t), A(t), M(t)) \in \partial X_0, \forall t \geq 0 \right\}.$$

现在，证明

$$M_\partial = \left\{ (S(0), 0, 0, 0, M(0)) \mid S(0) \geq 0, M(0) \geq 0 \right\}.$$

显然， $\left\{ (S(0), 0, 0, 0, M(0)) \mid S(0) \geq 0, M(0) \geq 0 \right\} \subseteq M_\partial$ 。下面只需要证明

$$M_\partial \subseteq \left\{ (S(0), 0, 0, 0, M(0)) \mid S(0) \geq 0, M(0) \geq 0 \right\}.$$

反证法，令  $\varphi(t)$  是模型(1)满足初值条件  $\varphi(0)$  的一个解，因此，对任意的

$$\varphi(t) = (S(t), I_u(t), I_a(t), A(t), M(t)) \in M_\partial$$

和  $\varphi(t) \neq M_\partial$ , 此时, 至少存在一个  $I_u(t), I_a(t), A(t)$  不为零。不失一般性, 假设  $I_u(t) = 0, I_a(t) = 0$ , 但  $M(t) > 0$ 。对于模型(1), 对  $\forall t > 0$ , 有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} I_u(t) &\geq e^{-(\varepsilon_1+d+\delta)t} \left[ I_u(0) + \int_0^t [\beta_1 S(v) I_u(v) + \beta_2 S(v) I_a(v) + \theta_2 M(v)] dv \right] > 0, \\ I_a(t) &= e^{-(\varepsilon_2+d)t} \left[ I_a(0) + \int_0^t [\delta I_u(v) + \theta_3 M(v)] dv \right] > 0, \\ M(t) &= e^{-(d+\mu)t} \left[ M(0) + \int_0^t [\theta_4 M(v) + \varepsilon_1 I_u(v) + \varepsilon_2 I_a(v)] dv \right] > 0. \end{aligned}$$

这说明对  $t > 0$ ,  $\varphi(t) \notin \partial X_0$ 。这与假设矛盾, 因此, 可以得到

$$M_\partial = \{(S(0), 0, 0, 0, M(0)) \mid S(0) \geq 0, M(0) \geq 0\}.$$

同时,  $M_\partial$  仅有一个无病平衡点  $E_0$  且对于  $\varphi(0) \in M_\partial$ ,  $E_0$  是紧的, 孤立的不变集。

显然在  $M_\partial$  内仅有一个平衡点  $E_0$ 。根据前面所述结论容易发现  $E_0$  是  $X$  中的单点集,  $W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset$ , 在  $M_\partial$  中每个轨道都趋向于  $E_0$ ,  $E_0$  在  $M_\partial$  中是非循环的, 其中  $W^s(E_0)$  是  $E_0$  的稳定流形。根据文献[14]中的定理 4.6 可知, 模型(1)关于  $(X_0, \partial X_0)$  是一致持久的。

## 6. 案例研究

基于四川省 2004 年~2018 年的艾滋病数据, 采用马尔科夫链蒙特卡洛算法(MCMC) [15]对模型的参数进行估计, 并以此估算基本再生数来判断四川省艾滋病的发展现状。模型(1)的部分参数和初值根据以往的数据和经验得到(见表 1)。接下来, 对系统(1)的所有参数和初值进行详细估计: 1) 易感人群的招募率(即  $\Lambda$ ): 通过四川省统计年鉴可知四川省在 2003 年第底的出生率为千分之 9.18, 总人口数为 8529.4 万 [16]。因此, 可以计算出每年出生人口约为 782,999 人。2) 人口自然死亡率(即  $d$ ): 四川省人口平均预期寿命是 72 岁 [16], 所以该省人口的年自然死亡率约为  $d = 1/72$ 。3) 感染者的因病死亡率(即  $\mu$ ): 艾滋病每年的死亡率为 0.318 [17]。4) 艾滋病患者的初始值(即  $A$ ): 根据中国疾病预防控制中心发布的相关数据 [18], 容易得到  $A$  的初始值为 56。5) 系统(1)的其他参数和初值由 MCMC 算法估计, 见表 1 所示, 拟合结果见图 1 和图 2。

**Table 1.** Parameter values and initial values of model (1)

**表 1.** 模型(1)的参数值和初值

参数	均值	标准差	95%置信区间	来源
$\Lambda$	782,999	-	-	[16]
$d$	1/72	-	-	[16]
$\mu$	0.318	-	-	[17]
$\Pi$	55565	16474	[23,276, 87,854]	MCMC
$\beta_1$	$7.1974 \times 10^{-9}$	$3.3706 \times 10^{-9}$	$[5.9102 \times 10^{-10}, 1.3804 \times 10^{-8}]$	MCMC
$\beta_2$	$1.4465 \times 10^{-9}$	$9.5271 \times 10^{-10}$	$[0, 3.3138 \times 10^{-9}]$	MCMC
$\varepsilon_1$	0.018456	0.013096	[0.0072, 0.0441]	MCMC
$\varepsilon_2$	0.070751	0.012866	[0.0455, 0.0960]	MCMC
$\delta$	0.82093	0.1318	[0.5626, 1.0793]	MCMC
$\theta_1$	0.54411	0.27292	[0.0092, 1.0790]	MCMC
$\theta_2$	0.037243	0.0066901	[0.0241, 0.0504]	MCMC
$\theta_3$	0.0014571	0.0009588	[0, 0.0033]	MCMC

Continued

$\theta_4$	0.0014526	0.0012237	[0, 0.0039]	MCMC
$S(0)$	85,294,000	-	-	[16]
$I_u(0)$	347.94	160.28	[33.7912, 662.0888]	MCMC
$I_a(0)$	778	-	-	[18]
$A(0)$	56	-	-	[18]
$M(0)$	25,604	11724	[2625, 48583]	MCMC

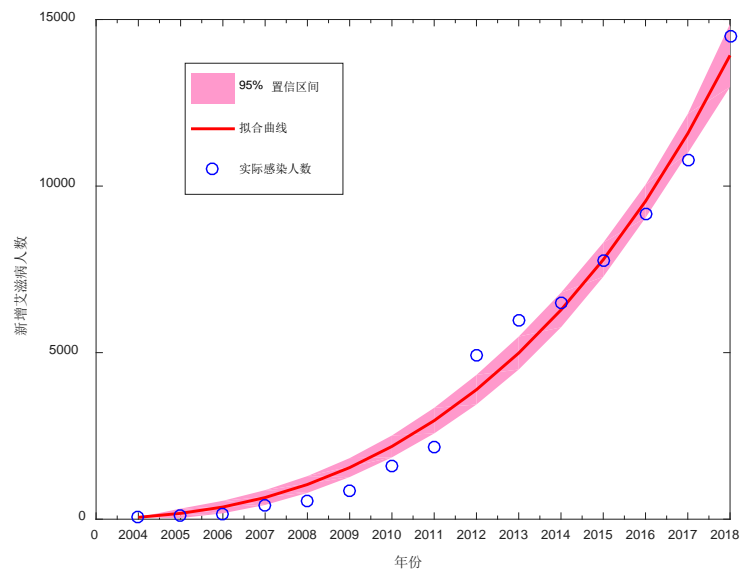


Figure 1. The number of newly infected persons in Sichuan Province from 2004 to 2018  
 图 1. 四川省 2004~2018 年新增实际染病者数量

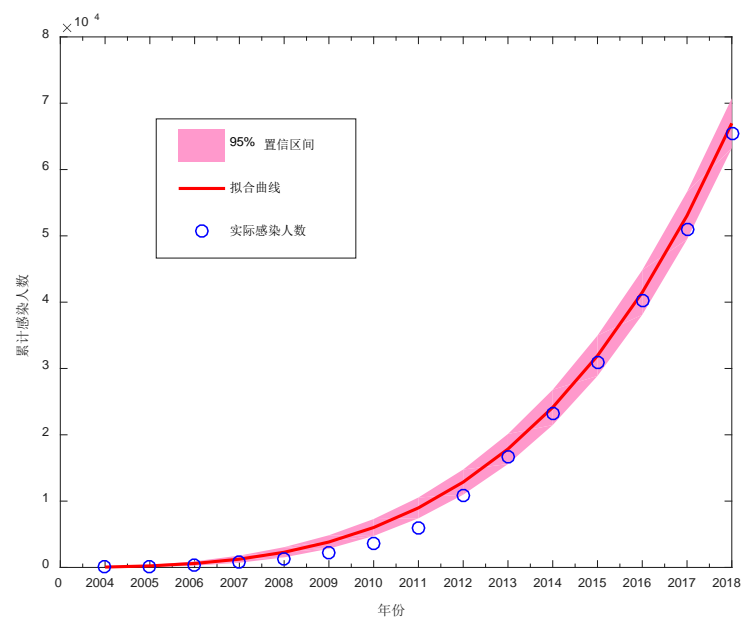
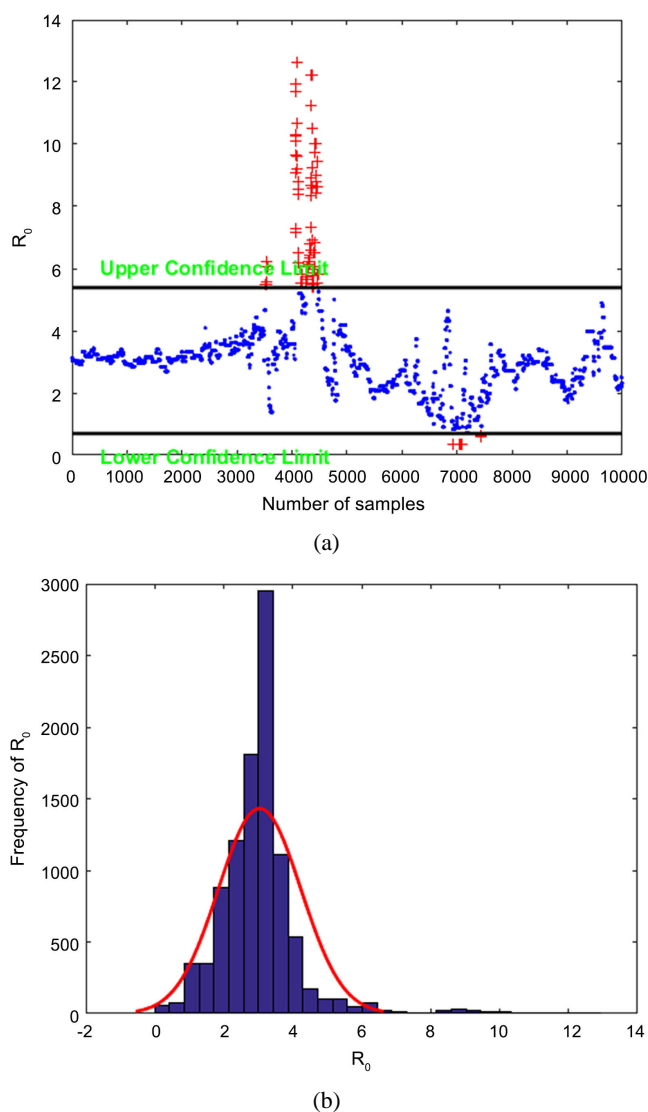


Figure 2. Cumulative number of infected patients in Sichuan Province from 2004 to 2018  
 图 2. 四川省 2004~2018 年累计感染病人数量

根据表 1 可知, 未具有感染意识的感染者对易感者的传染率  $\beta_1 = 7.1974 \times 10^{-9}$ , 具有感染意识的感染者对易感者的传染率  $\beta_2 = 1.4465 \times 10^{-9}$ 。由此可知  $\beta_1$  大于  $\beta_2$ , 这表明未具有感染意识的感染者更具有传染性。这与纳[6]和朱[7]的结果一致。

从图 1 和图 2 可以看出, 拟合效果较好。根据两个拟合结果图, 可以发现四川省艾滋病患者呈逐年上升趋势, 形势严峻。利用 MCMC 算法得到了基本再生数  $R_0$  的样本量和频率分布(见图 3), 并计算出基本再生数  $R_0 = 2.95$  (95% CI: (0.85~5.25)), 这意味着四川省应该重视艾滋病问题。



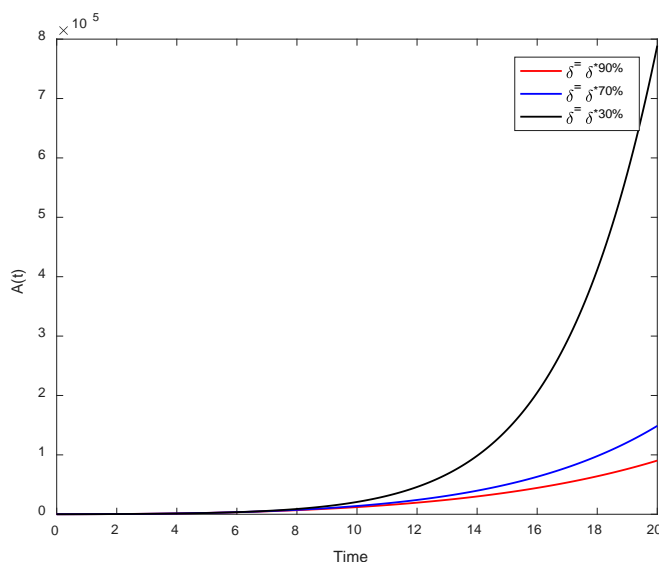
**Figure 3.** The basic regeneration number  $R_0$ . (a) Sample size of the basic regeneration number, where blue point denotes the values of  $R_0$  in the confidence interval 95%, red point denotes the values of  $R_0$  out of the confidence interval 95%, and black line denotes upper and lower confidence limits; (b) frequency distribution of the basic regeneration number, where the red line is the probability density curve function of  $R_0$

**图 3.** 基本再生数  $R_0$ 。(a) 基本再生数的样本量, 蓝点表示 95% 置信区间内  $R_0$  值的大小, 红点表示 95% 置信区间外  $R_0$  值的大小, 黑色直线表示置信上限和置信下限; (b) 基本再生数  $R_0$  的频率分布, 红色曲线为  $R_0$  的概率密度曲线函数



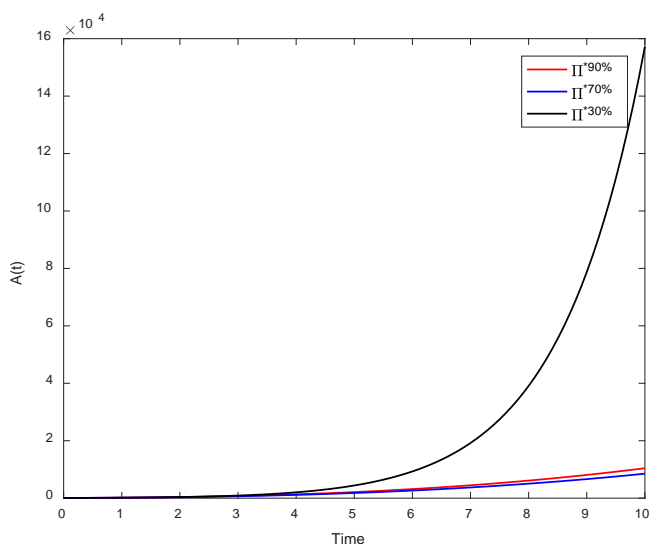
选取表 1 中 MCMC 估计的参数值, 模拟了减弱未具有感染意识到具有感染意识的进展率对艾滋病数量变化的影响。

如图 4 所示, 当艾滋病感染者中意识转化率低于 30% 时, 艾滋病患者数量急剧增加。当艾滋病感染者意识转化率达到 70% 时, 艾滋病患者数量随着时间的推移, 缓慢增加。当艾滋病感染者中意识转化率达到 90% 时, 艾滋病患者数量能够保持在较低水平。因此, 感染意识的进展率对控制艾滋病疾病的蔓延有显著影响。



**Figure 4.** The effect of consciousness conversion rate on the number of AIDS patients  
**图 4.** 意识转化率对艾滋病患者数量的影响

图 5 模拟了减少人口移徙对艾滋病患者数量的影响。可以发现, 当人口移徙降低至 70% 水平人口移徙时, 艾滋病患者数量能够得到极大的降低, 因此, 控制人口移徙对控制艾滋病传播也具有重大意义。



**Figure 5.** The impact of population migration on the number of AIDS patients  
**图 5.** 人口移徙对艾滋病患者数量的影响

## 7. 结论

由于艾滋病不能够治愈, 也没有疫苗可以预防, 已经发展成为全球重大公共卫生问题。利用数学模型进行分析艾滋病动力学行为, 对其进行预警和控制具有重大意义。本文考虑了具有感染意识和不具有感染意识的艾滋病数学模型, 并且考虑了人口移徙对艾滋病模型的影响。讨论了无病平衡点的局部渐近稳定性, 证明了疾病的一致持久性。基于四川省 2004~2018 年艾滋病患者数据进行 MCMC 参数估计, 求出了基本再生数的均值和置信区间  $R_0 = 2.95$  (95% CI: (0.85~5.25))。最后, 发现提高感染意识的进展率和控制人口移徙对预防艾滋病的蔓延具有积极作用。因此, 倡导对于有高危行为的个体进行积极监测, 能够极大地降低艾滋病的发病人数。

由于艾滋病的感染者经历的过程十分漫长, 因此, 在模型中可以考虑更符合实际情况的仓室进行建模分析。再次, 艾滋病病毒对于不同年龄段的人群, 感染能力不同, 并且不同年龄段发生的高危行为也有差别, 从而导致病毒传播动力学过程有区别。因此, 对 HIV 模型进行年龄结构分析也是必不可少的, 这些因素将在接下来的工作中继续展开。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(12161054, 11661050 及 11861044), 甘肃省自然科学基金项目(20JR10RA156)。

## 参考文献

- [1] Wang, S.F. and Zou, D.Y. (2012) Global Stability of In-Host Viral Models with Humoral Immunity and Intracellular Delays. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 1313-1322. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.086>
- [2] Mbamara, S.U., Obiechina, N.J.A. and Akabuikie, J.C. (2013) Awareness and Attitudes to Voluntary Counseling and Testing (VCT) for Human Immunodeficiency Virus/Acquired Immune Deficiency Syndrome (HIV/AIDS) among Law Undergraduates in Tertiary Institutions in Anambra State, Southeast, Nigeria. *Academic Journals*, **5**, 290-294.
- [3] Misra, A.K., et al. (2013) Effect of Awareness Programs by Media on the Epidemic Outbreaks: A Mathematical Model. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 6965-6977. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.01.009>
- [4] Sharma, A., Singh, V. and Misra, A.K. (2011) Effect of Awareness Programs in Controlling the Prevalence of an Epidemic with Time Delay. *Journal of Biological Systems*, **19**, 389-402. <https://doi.org/10.1142/S0218339011004020>
- [5] Roy, P.K., Saha, S. and Basir, F.A. (2015) Effect of Awareness Programs in Controlling the Disease HIV/AIDS: An Optimal Control Theoretic Approach. *Advances in Difference Equations*, **217**, 1-18. <https://doi.org/10.1186/s13662-015-0549-9>
- [6] 纳仁花, 梁泽忠. 一类具有意识分类的 HIV/AIDS 传染病模型的动力学研究[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2021, 39(5): 74-81.
- [7] 朱惠延, 刘小佑, 彭湘. 一类有意识分类及干预措施的分阶 HIV/AIDS 传染病模型[J]. 邵阳学院学报(自然科学版), 2017, 14(3): 1-5.
- [8] Hoon, C., Tan, S.T., Jason, Y. and Helena, L.Q. (2018) The Health Needs and Access Barriers among Refugees and Asylum-Seekers in Malaysia: A Qualitative Study. *International Journal for Equity in Health*, **17**, 120-124. <https://doi.org/10.1186/s12939-018-0833-x>
- [9] Kevin, P., Charles, H., Prinon, R., et al. (2017) Building Responsive Health Systems to Help Communities Affected by Migration: An International Delphi Consensus. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, **14**, 144-159. <https://doi.org/10.3390/ijerph14020144>
- [10] Apenteng, O.O., Osei, P.P., Ismail, N.A., et al. (2022) Analysing the Impact of Migration on HIV/AIDS Cases Using Epidemiological Modelling to Guide Policy Makers. *Infectious Disease Modelling*, **7**, 252-261. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2022.01.002>
- [11] Van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- [12] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 第 2 版. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001.
- [13] LaSalle, J.P. (1987) Stability of Dynamical Systems, Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for

Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

- [14] Thieme, H. and Horst, R. (2006) Persistence under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model). *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **24**, 407-435. <https://doi.org/10.1137/0524026>
- [15] Haario, H. and Tamminen, S.J. (2001) An Adaptive Metropolis Algorithm. *Bernoulli*, **7**, 223-242. <https://doi.org/10.2307/3318737>
- [16] 四川省统计局年鉴[Z/OL]. <http://tjj.sc.gov.cn/scstjj/c105855/nj.shtml>, 2022-04-20.
- [17] Xiao, Y.N., Tang, S.Y., Zhou, Y.C., *et al.* (2013) Predicting an HIV/AIDS Epidemic and Measuring the Effect on It of Population Mobility in Mainland China. *Journal of Theoretical Biology*, **317**, 271-285. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2012.09.037>
- [18] 中国疾病预防控制中心[Z/OL]. <https://www.chinacdc.cn/jkzt/crb>, 2022-04-20.