Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(6), 3788-3796**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.116406

Hans汉斯

相容Malcev代数的表示

王一茗

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年5月23日；录用日期：2022年6月15日；发布日期：2022年6月24日

摘　要

本文首先给出了相容Malcev代数的定义和两个Malcev代数相容的条件，然后给出了相容Malcev代数的表示，并构造了它的一类特殊表示。证明了相容Malcev代数的表示的对偶仍是相容Malcev代数的表示。最后给出了相容pre-Malcev代数的定义和两个pre-Malcev代数相容的条件。

关键词

相容Malcev代数，相容pre-Malcev代数，表示

Representation of Compatible Malcev Algebra

Yiming Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 23rd, 2022; accepted: Jun. 15th, 2022; published: Jun. 24th, 2022

Abstract

In this paper, we first give the definition of compatible Malcev algebra and the conditions that two Malcev algebras are compatible. Then, we give the representation of compatible Malcev algebra and construct a special representation of compatible Malcev algebra. It is proved that the dual mapping of the representation of compatible Malcev algebra is still the representation of compatible Malcev algebra. Finally, we give the definition of compatible pre-Malcev algebra and the conditions that two pre-Malcev algebras are compatible.

Keywords

Compatible Malcev Algebra, Compatible pre-Malcev Algebra, Representation

文章引用：王一茗．相容 Malcev 代数的表示[J]．应用数学进展, 2022, 11(6): 3788-3796.
DOI: 10.12677/aam.2022.116406

1. 引言

Malcev 代数和相容的代数结构在数学和物理领域均有重要的应用。Malcev 代数是李代数的推广。许多学者对 Malcev 代数和相容的代数结构展开了研究。例如在文献[1]中介绍了特征不是 2 的任意基域 F 上维数小于等于 6 的所有幂零 Malcev 代数和 7 维非交换非李幂零 Malcev 代数的分类。在文献[2]中介绍了秩为 3 的自由 Malcev 代数可分解为秩为 3 的自由李代数和由 7 维单 Malcev 代数生成的各种秩为 3 的自由代数的次直和。在文献[3]中介绍了 pre-Malcev 代数的表示和配对。在文献[4]中介绍了相容李双代数与相容李代数中经典 Yang-Baxter 方程的密切关系以及相容 pre-李代数与相容李代数中经典 Yang-Baxter 方程的反对称解的密切关系。在此基础上本文研究了相容 Malcev 代数的等价条件、表示以及相容 pre-Malcev 代数的等价条件。

2. 预备知识

定义 2.1 ([5]). 设 M 是域 F 上的线性空间，如果 M 中的二元双线性运算 $(x,y)\to[x,y]$ 满足下列条件

$$[x,x]=0, \tag{2.1}$$

$$J(x,y,[x,z])=[J(x,y,z),x],\quad \forall x,y,z\in M, \tag{2.2}$$

其中

$$J(x,y,z)=[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y],$$

则称 $(M,[,])$ 为 Malcev 代数。

注记 2.1 ([5]). 等式(2.2)等价于

$$[[x,z],[y,t]]=[[[x,y],z],t]+[[[y,z],t],x]+[[[z,t],x],y]+[[[t,x],y],z], \tag{2.3}$$

$$\forall x,y,z,t\in M\text{。}$$

定义 2.2 ([6]). 设 $(M,[,])$ 是 Malcev 代数，V 是线性空间，$\rho:M\to End(V)$ 为线性映射，若 ρ 满足

$$\rho([x,y])\rho(z)=\rho([[x,z],y])-\rho(x)\rho([z,y])+\rho(z)\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(z)\rho(x), \tag{2.4}$$

$\forall x,y,z\in M$，则称 (ρ,V) 为 Malcev 代数 $(M,[,])$ 的表示。

定理 2.1 ([3]). 设 $(M,[,])$ 是 Malcev 代数，V 为线性空间。$\rho:M\to End(V)$ 为线性映射，在 $M\oplus V$ 上定义

$$\{x+u,y+v\}=[x,y]+\rho(x)v-\rho(y)u,\quad \forall x,y\in M,u,v\in V,$$

则 $(M\oplus V,\{,\})$ 是 Malcev 代数当且仅当 (ρ,V) 为 $(M,[,])$ 的表示。

例 2.1 ([3]). 设 $(M,[,])$ 是 Malcev 代数，定义 $ad:M\to End(M)$，其中

$$adx(y)=[x,y],\quad \forall x,y\in M,$$

则 (ad,M) 是 $(M,[,])$ 的表示，称为 $(M,[,])$ 的伴随表示。

定理 2.2 ([3]). 设 $(M,[,])$ 是 Malcev 代数，(ρ,V) 是 $(M,[,])$ 的表示，定义 $\rho^*:M\to End(V^*)$ 其中

$$\langle\rho^*(x)f,v\rangle=-\langle f,\rho(x)v\rangle,\quad \forall x\in M,v\in V,f\in V^*,$$

则$\left(\rho^*,V^*\right)$是$\left(M,[,]\right)$的表示，称为(ρ,V)的对偶表示。

定义 2.3 ([7]). 设A是线性空间，A中有双线性运算$(x,y)\to x\circ y$，如果对于任意的$x,y,z,t\in A$满足

$$\begin{aligned}&((x\circ y)\circ z)\circ t-x\circ((y\circ z)\circ t)+(z\circ(y\circ x))\circ t-z\circ(y\circ(x\circ t))+y\circ(x\circ(z\circ t))\\&-(x\circ z)\circ(y\circ t)+x\circ((z\circ y)\circ t)-(z\circ(x\circ y))\circ t+(z\circ x)\circ(y\circ t)-((y\circ x)\circ z)\circ t=0\end{aligned},\tag{2.5}$$

则称$(A,\circ)$为 pre-Malcev 代数。

3. 相容 Malcev 代数的表示

定义 3.1 设$\left(M,[,]_1\right)$和$\left(M,[,]_2\right)$是 Malcev 代数，如果对于任意的$k_1,k_2\in F$，M关于下面定义的代数运算

$$[x,y]=k_1[x,y]_1+k_2[x,y]_2,\quad \forall x,y\in M,$$

是 Malcev 代数，则称$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$是相容 Malcev 代数。

定理 3.1 设$\left(M,[,]_1\right)$和$\left(M,[,]_2\right)$是 Malcev 代数，$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$是相容 Malcev 代数当且仅当对于任意的$x,y,z,t\in M$满足

$$\begin{aligned}&\left[[x,z]_1,[y,t]_1\right]_2+\left[[x,z]_1,[y,t]_2\right]_1+\left[[x,z]_2,[y,t]_1\right]_1-\left[\left[[x,y]_1,z\right]_1,t\right]_2\\&-\left[\left[[y,z]_1,t\right]_1,x\right]_2-\left[\left[[z,t]_1,x\right]_1,y\right]_2-\left[\left[[t,x]_1,y\right]_1,z\right]_2-\left[\left[[x,y]_2,z\right]_1,t\right]_1\\&-\left[\left[[y,z]_2,t\right]_1,x\right]_1-\left[\left[[z,t]_2,x\right]_1,y\right]_1-\left[\left[[t,x]_2,y\right]_1,z\right]_1-\left[\left[[x,y]_1,z\right]_2,t\right]_1\\&-\left[\left[[y,z]_1,t\right]_2,x\right]_1-\left[\left[[z,t]_1,x\right]_2,y\right]_1-\left[\left[[t,x]_1,y\right]_2,z\right]_1=0\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&\left[[x,z]_2,[y,t]_2\right]_1+\left[[x,z]_1,[y,t]_2\right]_2+\left[[x,z]_2,[y,t]_1\right]_2-\left[\left[[x,y]_2,z\right]_2,t\right]_1\\&-\left[\left[[y,z]_2,t\right]_2,x\right]_1-\left[\left[[z,t]_2,x\right]_2,y\right]_1-\left[\left[[t,x]_2,y\right]_2,z\right]_1-\left[\left[[x,y]_2,z\right]_1,t\right]_2\\&-\left[\left[[y,z]_2,t\right]_1,x\right]_2-\left[\left[[z,t]_2,x\right]_1,y\right]_2-\left[\left[[t,x]_2,y\right]_1,z\right]_2-\left[\left[[x,y]_1,z\right]_2,t\right]_2\\&-\left[\left[[y,z]_1,t\right]_2,x\right]_2-\left[\left[[z,t]_1,x\right]_2,y\right]_2-\left[\left[[t,x]_1,y\right]_2,z\right]_2=0\end{aligned}\tag{3.2}$$

证明 显然$[,]$是双线性运算。由$\left(M,[,]_1\right)$和$\left(M,[,]_2\right)$是 Malcev 代数可知，$[,]_1,[,]_2$满足等式(2.1)。因此对于任意的$k_1,k_2\in F,x\in M$直接计算得

$$[x,x]=k_1[x,x]_1+k_2[x,x]_2=0,$$

即$[,]$满足等式(2.1)。由$\left(M,[,]_1\right)$和$\left(M,[,]_2\right)$是 Malcev 代数可知，$[,]_1,[,]_2$满足等式(2.3)。因此对于任意的$x,y,z,t\in M$直接计算得

$$\begin{aligned}&\left[[x,z],[y,t]\right]-\left[\left[[x,y],z\right],t\right]-\left[\left[[y,z],t\right],x\right]-\left[\left[[z,t],x\right],y\right]+\left[\left[[t,x],y\right],z\right]\\&=k_1^2k_2\Big(\left[[x,z]_1,[y,t]_1\right]_2+\left[[x,z]_1,[y,t]_2\right]_1+\left[[x,z]_2,[y,t]_1\right]_1-\left[\left[[x,y]_1,z\right]_1,t\right]_2\\&\quad-\left[\left[[y,z]_1,t\right]_1,x\right]_2-\left[\left[[z,t]_1,x\right]_1,y\right]_2-\left[\left[[t,x]_1,y\right]_1,z\right]_2-\left[\left[[x,y]_2,z\right]_1,t\right]_1\\&\quad-\left[\left[[y,z]_2,t\right]_1,x\right]_1-\left[\left[[z,t]_2,x\right]_1,y\right]_1-\left[\left[[t,x]_2,y\right]_1,z\right]_1-\left[\left[[x,y]_1,z\right]_2,t\right]_1\\&\quad-\left[\left[[y,z]_1,t\right]_2,x\right]_1-\left[\left[[z,t]_1,x\right]_2,y\right]_1-\left[\left[[t,x]_1,y\right]_2,z\right]_1\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+k_1k_2^2\Big(\big[[x,z]_2,[y,t]_2\big]_1+\big[[x,z]_1,[y,t]_2\big]_2+\big[[x,z]_2,[y,t]_1\big]_2-\big[\big[[x,y]_2,z\big]_2,t\big]_1\\
&-\big[\big[[y,z]_2,t\big]_2,x\big]_1-\big[\big[[z,t]_2,x\big]_2,y\big]_1-\big[\big[[t,x]_2,y\big]_2,z\big]_1-\big[\big[[x,y]_2,z\big]_1,t\big]_2\\
&-\big[\big[[y,z]_2,t\big]_1,x\big]_2-\big[\big[[z,t]_2,x\big]_1,y\big]_2-\big[\big[[t,x]_2,y\big]_1,z\big]_2-\big[\big[[x,y]_1,z\big]_2,t\big]_2\\
&-\big[\big[[y,z]_1,t\big]_2,x\big]_2-\big[\big[[z,t]_1,x\big]_2,y\big]_2-\big[\big[[t,x]_1,y\big]_2,z\big]_2\Big)
\end{aligned}
$$

由 k_1 和 k_2 的任意性可知，$[,]$满足等式(2.3)当且仅当$[,]_1,[,]_2$满足等式(3.1)和(3.2)。因此结论成立。

定义 3.2 设$(M,[,]_1,[,]_2)$是相容 Malcev 代数，(ρ_i,V)为$(M,[,]_i)$ $(i=1,2)$的表示。如果 ρ_1,ρ_2 满足

$$
\begin{aligned}
&\rho_2([x,y]_1)\rho_1(z)+\rho_1([x,y]_1)\rho_2(z)+\rho_1([x,y]_2)\rho_1(z)-\rho_2\big(\big[[x,z]_1,y\big]_1\big)\\
&+\rho_2(x)\rho_1([z,y]_1)-\rho_2(z)\rho_1(x)\rho_1(y)+\rho_2(y)\rho_1(z)\rho_1(x)-\rho_1\big(\big[[x,z]_2,y\big]_1\big)\\
&+\rho_1(x)\rho_1([z,y]_2)-\rho_1(z)\rho_1(x)\rho_2(y)+\rho_1(y)\rho_1(z)\rho_2(x)-\rho_1\big(\big[[x,z]_1,y\big]_2\big)\\
&+\rho_1(x)\rho_2([z,y]_1)-\rho_1(z)\rho_2(x)\rho_1(y)+\rho_1(y)\rho_2(z)\rho_1(x)=0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_1([x,y]_2)\rho_2(z)+\rho_2([x,y]_1)\rho_2(z)+\rho_2([x,y]_2)\rho_1(z)-\rho_1\big(\big[[x,z]_2,y\big]_2\big)\\
&+\rho_1(x)\rho_2([z,y]_2)-\rho_1(z)\rho_2(x)\rho_2(y)+\rho_1(y)\rho_2(z)\rho_2(x)-\rho_2\big(\big[[x,z]_2,y\big]_1\big)\\
&+\rho_2(x)\rho_1([z,y]_2)-\rho_2(z)\rho_1(x)\rho_2(y)+\rho_2(y)\rho_1(z)\rho_2(x)-\rho_2\big(\big[[x,z]_1,y\big]_2\big)\\
&+\rho_2(x)\rho_2([z,y]_1)-\rho_2(z)\rho_2(x)\rho_1(y)+\rho_2(y)\rho_2(z)\rho_1(x)=0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$\forall x,y,z\in M$，则称(ρ_1,ρ_2,V)为$(M,[,]_1,[,]_2)$的表示。

定理 3.2 设$(M,[,]_1,[,]_2)$是相容 Malcev 代数，V为线性空间。$\rho_i:M\to End(V)$为线性映射，在$M\oplus V$上定义

$$
\{x+u,y+v\}_i=[x,y]_i+\rho_i(x)v-\rho_i(y)u，\quad \forall x,y\in M,u,v\in V,i=1,2，
$$

则$(M\oplus V,\{,\}_1,\{,\}_2)$是相容 Malcev 代数当且仅当$(\rho_1,\rho_2,V)$为$(M,[,]_1,[,]_2)$的表示。

证明 由定理 2.1 可知$(M\oplus V,\{,\}_i)$是 Malcev 代数当且仅当(ρ_i,V)为$(M,[,]_i)$的表示。由$(M,[,]_1,[,]_2)$是相容 Malcev 代数可知，$[,]_1,[,]_2$满足等式(3.1)，因此对于任意的$x,y,z,t\in M,u,v,w,s\in V$直接计算得

$$
\begin{aligned}
&\big\{\{x+u,z+w\}_1,\{y+v,t+s\}_1\big\}_2+\big\{\{x+u,z+w\}_1,\{y+v,t+s\}_2\big\}_1+\big\{\{x+u,z+w\}_2,\{y+v,t+s\}_1\big\}_1\\
&-\big\{\big\{\{x+u,y+v\}_1,z+w\big\}_1,t+s\big\}_2-\big\{\big\{\{y+v,z+w\}_1,t+s\big\}_1,x+u\big\}_2-\big\{\big\{\{z+w,t+s\}_1,x+u\big\}_1,y+v\big\}_2\\
&-\big\{\big\{\{t+s,x+u\}_1,y+v\big\}_1,z+w\big\}_2-\big\{\big\{\{x+u,y+v\}_2,z+w\big\}_1,t+s\big\}_1-\big\{\big\{\{y+v,z+w\}_2,t+s\big\}_1,x+u\big\}_1\\
&-\big\{\big\{\{z+w,t+s\}_2,x+u\big\}_1,y+v\big\}_1-\big\{\big\{\{t+s,x+u\}_2,y+v\big\}_1,z+w\big\}_1-\big\{\big\{\{x+u,y+v\}_1,z+w\big\}_2,t+s\big\}_1\\
&-\big\{\big\{\{y+v,z+w\}_1,t+s\big\}_2,x+u\big\}_1-\big\{\big\{\{z+w,t+s\}_1,x+u\big\}_2,y+v\big\}_1-\big\{\big\{\{t+s,x+u\}_1,y+v\big\}_2,z+w\big\}_1\\
&=\Big(\rho_2([y,t]_1)\rho_1(z)+\rho_1([y,t]_1)\rho_2(z)+\rho_1([y,t]_2)\rho_1(z)-\rho_2\big(\big[[y,z]_1,t\big]_1\big)+\rho_2(y)\rho_1([z,t]_1)\\
&\quad-\rho_2(z)\rho_1(y)\rho_1(t)+\rho_2(t)\rho_1(z)\rho_1(y)-\rho_1\big(\big[[y,z]_2,t\big]_1\big)+\rho_1(y)\rho_1([z,t]_2)-\rho_1(z)\rho_1(y)\rho_2(t)\\
&\quad+\rho_1(t)\rho_1(z)\rho_2(y)-\rho_1\big(\big[[y,z]_1,t\big]_2\big)+\rho_1(y)\rho_2([z,t]_1)-\rho_1(z)\rho_2(y)\rho_1(t)+\rho_1(t)\rho_2(z)\rho_1(y)\Big)u\\
&\quad+\Big(\rho_2([z,x]_1)\rho_1(t)+\rho_1([z,x]_1)\rho_2(t)+\rho_1([z,x]_2)\rho_1(t)-\rho_2\big(\big[[z,t]_1,x\big]_1\big)+\rho_2(z)\rho_1([t,x]_1)
\end{aligned}
$$

$$-\rho_2(t)\rho_1(z)\rho_1(x)+\rho_2(x)\rho_1(t)\rho_1(z)-\rho_1\left(\left[[z,t]_2,x\right]_1\right)+\rho_1(z)\rho_1\left([t,x]_2\right)-\rho_1(t)\rho_1(z)\rho_2(x)$$
$$+\rho_1(x)\rho_1(t)\rho_2(z)-\rho_1\left(\left[[z,t]_1,x\right]_2\right)+\rho_1(z)\rho_2\left([t,x]_1\right)-\rho_1(t)\rho_2(z)\rho_1(x)+\rho_1(x)\rho_2(t)\rho_1(z)\Big)v$$
$$+\Big(\rho_2\left([t,y]_1\right)\rho_1(x)+\rho_1\left([t,y]_1\right)\rho_2(x)+\rho_1\left([t,y]_2\right)\rho_1(x)-\rho_2\left(\left[[t,x]_1,y\right]_1\right)+\rho_2(t)\rho_1\left([x,y]_1\right)$$
$$-\rho_2(x)\rho_1(t)\rho_1(y)+\rho_2(y)\rho_1(x)\rho_1(t)-\rho_1\left(\left[[t,x]_2,y\right]_1\right)+\rho_1(t)\rho_1\left([x,y]_2\right)-\rho_1(x)\rho_1(t)\rho_2(y)$$
$$+\rho_1(y)\rho_1(x)\rho_2(t)-\rho_1\left(\left[[t,x]_1,y\right]_2\right)+\rho_1(t)\rho_2\left([x,y]_1\right)-\rho_1(x)\rho_2(t)\rho_1(y)+\rho_1(y)\rho_2(x)\rho_1(t)\Big)w$$
$$+\Big(\rho_2\left([x,z]_1\right)\rho_1(y)+\rho_1\left([x,z]_1\right)\rho_2(y)+\rho_1\left([x,z]_2\right)\rho_1(y)-\rho_2\left(\left[[x,y]_1,z\right]_1\right)+\rho_2(x)\rho_1\left([y,z]_1\right)$$
$$-\rho_2(y)\rho_1(x)\rho_1(z)+\rho_2(z)\rho_1(y)\rho_1(x)-\rho_1\left(\left[[x,y]_2,z\right]_1\right)+\rho_1(x)\rho_1\left([y,z]_2\right)-\rho_1(y)\rho_1(x)\rho_2(z)$$
$$+\rho_1(z)\rho_1(y)\rho_2(x)-\rho_1\left(\left[[x,y]_1,z\right]_2\right)+\rho_1(x)\rho_2\left([y,z]_1\right)-\rho_1(y)\rho_2(x)\rho_1(z)+\rho_1(z)\rho_2(y)\rho_1(x)\Big)s$$

由 u,v,w,s 的任意性可知，$\{,\}_1,\{,\}_2$ 满足等式(3.1)当且仅当 ρ_1,ρ_2 满足等式(3.3)。由 $\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$ 是相容 Malcev 代数可知，$[,]_1,[,]_2$ 满足等式(3.2)，因此直接计算得

$$\left\{\{x+u,z+w\}_2,\{y+v,t+s\}_2\right\}_1+\left\{\{x+u,z+w\}_1,\{y+v,t+s\}_2\right\}_2+\left\{\{x+u,z+w\}_2,\{y+v,t+s\}_1\right\}_2$$
$$-\left\{\left\{\{x+u,y+v\}_2,z+w\right\}_2,t+s\right\}_1-\left\{\left\{\{y+v,z+w\}_2,t+s\right\}_2,x+u\right\}_1-\left\{\left\{\{z+w,t+s\}_2,x+u\right\}_2,y+v\right\}_1$$
$$-\left\{\left\{\{t+s,x+u\}_2,y+v\right\}_2,z+w\right\}_1-\left\{\left\{\{x+u,y+v\}_2,z+w\right\}_1,t+s\right\}_2-\left\{\left\{\{y+v,z+w\}_2,t+s\right\}_1,x+u\right\}_2$$
$$-\left\{\left\{\{z+w,t+s\}_2,x+u\right\}_1,y+v\right\}_2-\left\{\left\{\{t+s,x+u\}_2,y+v\right\}_1,z+w\right\}_2-\left\{\left\{\{x+u,y+v\}_1,z+w\right\}_2,t+s\right\}_2$$
$$-\left\{\left\{\{y+v,z+w\}_1,t+s\right\}_2,x+u\right\}_2-\left\{\left\{\{z+w,t+s\}_1,x+u\right\}_2,y+v\right\}_2-\left\{\left\{\{t+s,x+u\}_1,y+v\right\}_2,z+w\right\}_2$$
$$=\Big(\rho_1\left([y,t]_2\right)\rho_2(z)+\rho_2\left([y,t]_1\right)\rho_2(z)+\rho_2\left([y,t]_2\right)\rho_1(z)-\rho_1\left(\left[[y,z]_2,t\right]_2\right)+\rho_1(y)\rho_2\left([z,t]_2\right)$$
$$-\rho_1(z)\rho_2(y)\rho_2(t)+\rho_1(t)\rho_2(z)\rho_2(y)-\rho_2\left(\left[[y,z]_2,t\right]_1\right)+\rho_2(y)\rho_1\left([z,t]_2\right)-\rho_2(z)\rho_1(y)\rho_2(t)$$
$$+\rho_2(t)\rho_1(z)\rho_2(y)-\rho_2\left(\left[[y,z]_1,t\right]_2\right)+\rho_2(y)\rho_2\left([z,t]_1\right)-\rho_2(z)\rho_2(y)\rho_1(t)+\rho_2(t)\rho_2(z)\rho_1(y)\Big)u$$
$$+\Big(\rho_1\left([z,x]_2\right)\rho_2(t)+\rho_2\left([z,x]_1\right)\rho_2(t)+\rho_2\left([z,x]_2\right)\rho_1(t)-\rho_1\left(\left[[z,t]_2,x\right]_2\right)+\rho_1(z)\rho_2\left([t,x]_2\right)$$
$$-\rho_1(t)\rho_2(z)\rho_2(x)+\rho_1(x)\rho_2(t)\rho_2(z)-\rho_2\left(\left[[z,t]_2,x\right]_1\right)+\rho_2(z)\rho_1\left([t,x]_2\right)-\rho_2(t)\rho_1(z)\rho_2(x)$$
$$+\rho_2(x)\rho_1(t)\rho_2(z)-\rho_2\left(\left[[z,t]_1,x\right]_2\right)+\rho_2(z)\rho_2\left([t,x]_1\right)-\rho_2(t)\rho_2(z)\rho_1(x)+\rho_2(x)\rho_2(t)\rho_1(z)\Big)v$$
$$+\Big(\rho_1\left([t,y]_2\right)\rho_2(x)+\rho_2\left([t,y]_1\right)\rho_2(x)+\rho_2\left([t,y]_2\right)\rho_1(x)-\rho_1\left(\left[[t,x]_2,y\right]_2\right)+\rho_1(t)\rho_2\left([x,y]_2\right)$$
$$-\rho_1(x)\rho_2(t)\rho_2(y)+\rho_1(y)\rho_2(x)\rho_2(t)-\rho_2\left(\left[[t,x]_2,y\right]_1\right)+\rho_2(t)\rho_1\left([x,y]_2\right)-\rho_2(x)\rho_1(t)\rho_2(y)$$
$$+\rho_2(y)\rho_1(x)\rho_2(t)-\rho_2\left(\left[[t,x]_1,y\right]_2\right)+\rho_2(t)\rho_2\left([x,y]_1\right)-\rho_2(x)\rho_2(t)\rho_1(y)+\rho_2(y)\rho_2(x)\rho_1(t)\Big)w$$
$$+\Big(\rho_1\left([x,z]_2\right)\rho_2(y)+\rho_2\left([x,z]_1\right)\rho_2(y)+\rho_2\left([x,z]_2\right)\rho_1(y)-\rho_1\left(\left[[x,y]_2,z\right]_2\right)+\rho_1(x)\rho_2\left([y,z]_2\right)$$
$$-\rho_1(y)\rho_2(x)\rho_2(z)+\rho_1(z)\rho_2(y)\rho_2(x)-\rho_2\left(\left[[x,y]_2,z\right]_1\right)+\rho_2(x)\rho_1\left([y,z]_2\right)-\rho_2(y)\rho_1(x)\rho_2(z)$$
$$+\rho_2(z)\rho_1(y)\rho_2(x)-\rho_2\left(\left[[x,y]_1,z\right]_2\right)+\rho_2(x)\rho_2\left([y,z]_1\right)-\rho_2(y)\rho_2(x)\rho_1(z)+\rho_2(z)\rho_2(y)\rho_1(x)\Big)s$$

由 u,v,w,s 的任意性可知，$\{,\}_1,\{,\}_2$ 满足等式(3.2)当且仅当 ρ_1,ρ_2 满足等式(3.4)。因此结论成立。

例 3.1 设$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$是相容 Malcev 代数，则$\left(ad_1,ad_2,M\right)$是$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$的表示，称为$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$的伴随表示。

证明 由例 2.1 可知$\left(ad_i,M\right)$是$\left(M,[,]_i\right)(i=1,2)$的表示。由$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$是相容 Malcev 代数可知，$[,]_1,[,]_2$满足等式(3.1)。因此对于任意的$x,y,z,t\in M$直接计算得

$$\begin{aligned}
&\Big(ad_2\left([x,y]_1\right)ad_1(z)+ad_1\left([x,y]_1\right)ad_2(z)+ad_1\left([x,y]_2\right)ad_1(z)-ad_2\left(\left[[x,z]_1,y\right]_1\right)\\
&+ad_2(x)ad_1\left([z,y]_1\right)-ad_2(z)ad_1(x)ad_1(y)+ad_2(y)ad_1(z)ad_1(x)-ad_1\left(\left[[x,z]_2,y\right]_1\right)\\
&+ad_1(x)ad_1\left([z,y]_2\right)-ad_1(z)ad_1(x)ad_2(y)+ad_1(y)ad_1(z)ad_2(x)-ad_1\left(\left[[x,z]_1,y\right]_2\right)\\
&+ad_1(x)ad_2\left([z,y]_1\right)-ad_1(z)ad_2(x)ad_1(y)+ad_1(y)ad_2(z)ad_1(x)\Big)t\\
&=\left[[x,y]_1,[z,t]_1\right]_2+\left[[x,y]_1,[z,t]_2\right]_1+\left[[x,y]_2,[z,t]_1\right]_1-\left[\left[[x,z]_1,y\right]_1,t\right]_2\\
&\quad-\left[\left[[z,y]_1,t\right]_1,x\right]_2-\left[\left[[y,t]_1,x\right]_1,z\right]_2-\left[\left[[t,x]_1,z\right]_1,y\right]_2-\left[\left[[x,z]_2,y\right]_1,t\right]_1\\
&\quad-\left[\left[[z,y]_2,t\right]_1,x\right]_1-\left[\left[[y,t]_2,x\right]_1,z\right]_1-\left[\left[[t,x]_2,z\right]_1,y\right]_1-\left[\left[[x,z]_1,y\right]_2,t\right]_1\\
&\quad-\left[\left[[z,y]_1,t\right]_2,x\right]_1-\left[\left[[y,t]_1,x\right]_2,z\right]_1-\left[\left[[t,x]_1,z\right]_2,y\right]_1=0
\end{aligned}$$

即ad_1,ad_2满足等式(3.3)。由$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$是相容 Malcev 代数可知，$[,]_1,[,]_2$满足等式(3.2)。因此直接计算得

$$\begin{aligned}
&\Big(ad_1\left([x,y]_2\right)ad_2(z)+ad_2\left([x,y]_1\right)ad_2(z)+ad_2\left([x,y]_2\right)ad_1(z)-ad_1\left(\left[[x,z]_2,y\right]_2\right)\\
&+ad_1(x)ad_2\left([z,y]_2\right)-ad_1(z)ad_2(x)ad_2(y)+ad_1(y)ad_2(z)ad_2(x)-ad_2\left(\left[[x,z]_2,y\right]_1\right)\\
&+ad_2(x)ad_1\left([z,y]_2\right)-ad_2(z)ad_1(x)ad_2(y)+ad_2(y)ad_1(z)ad_2(x)-ad_2\left(\left[[x,z]_1,y\right]_2\right)\\
&+ad_2(x)ad_2\left([z,y]_1\right)-ad_2(z)ad_2(x)ad_1(y)+ad_2(y)ad_2(z)ad_1(x)\Big)t\\
&=\left[[x,y]_2,[z,t]_2\right]_1+\left[[x,y]_1,[z,t]_2\right]_2+\left[[x,y]_2,[z,t]_1\right]_2-\left[\left[[x,z]_2,y\right]_2,t\right]_1\\
&\quad-\left[\left[[z,y]_2,t\right]_2,x\right]_1-\left[\left[[y,t]_2,x\right]_2,z\right]_1-\left[\left[[t,x]_2,z\right]_2,y\right]_1-\left[\left[[x,z]_2,y\right]_1,t\right]_2\\
&\quad-\left[\left[[z,y]_2,t\right]_1,x\right]_2-\left[\left[[y,t]_2,x\right]_1,z\right]_2-\left[\left[[t,x]_2,z\right]_1,y\right]_2-\left[\left[[x,z]_1,y\right]_2,t\right]_2\\
&\quad-\left[\left[[z,y]_1,t\right]_2,x\right]_2-\left[\left[[y,t]_1,x\right]_2,z\right]_2-\left[\left[[t,x]_1,z\right]_2,y\right]_2=0
\end{aligned}$$

即ad_1,ad_2满足等式(3.4)。综上可知$\left(ad_1,ad_2,M\right)$是$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$的表示。

定理 3.3 设$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$是相容 Malcev 代数，$\left(\rho_1,\rho_2,V\right)$是$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$的表示，则$\left(\rho_1^*,\rho_2^*,V^*\right)$是$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$的表示，称为$\left(\rho_1,\rho_2,V\right)$的对偶表示。

证明 由定理 2.2 可知$\left(\rho_i^*,V^*\right)$是 Malcev 代数$\left(M,[,]_i\right)(i=1,2)$的表示。由$\left(\rho_1,\rho_2,V\right)$是$\left(M,[,]_1,[,]_2\right)$的表示可知，$\rho_1,\rho_2$满足等式(3.3)。因此对于任意的$x,y,z\in M,v\in V,f\in V^*$直接计算得

$$\begin{aligned}
&\Big\langle\Big(\rho_2^*\left([x,y]_1\right)\rho_1^*(z)+\rho_1^*\left([x,y]_1\right)\rho_2^*(z)+\rho_1^*\left([x,y]_2\right)\rho_1^*(z)-\rho_2^*\left(\left[[x,z]_1,y\right]_1\right)\\
&+\rho_2^*(x)\rho_1^*\left([z,y]_1\right)-\rho_2^*(z)\rho_1^*(x)\rho_1^*(y)+\rho_2^*(y)\rho_1^*(z)\rho_1^*(x)-\rho_1^*\left(\left[[x,z]_2,y\right]_1\right)\\
&+\rho_1^*(x)\rho_1^*\left([z,y]_2\right)-\rho_1^*(z)\rho_1^*(x)\rho_2^*(y)+\rho_1^*(y)\rho_1^*(z)\rho_2^*(x)-\rho_1^*\left(\left[[x,z]_1,y\right]_2\right)\\
&+\rho_1^*(x)\rho_2^*\left([z,y]_1\right)-\rho_1^*(z)\rho_2^*(x)\rho_1^*(y)+\rho_1^*(y)\rho_2^*(z)\rho_1^*(x)\Big)f,v\Big\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Big\langle f,\Big(\rho_2\big([z,y]_1\big)\rho_1(x)+\rho_1\big([z,y]_1\big)\rho_2(x)+\rho_1\big([z,y]_2\big)\rho_1(x)-\rho_2\big(\big[[z,x]_1,y\big]_1\big)\\
&\quad+\rho_2(z)\rho_1\big([x,y]_1\big)-\rho_2(x)\rho_1(z)\rho_1(y)+\rho_2(y)\rho_1(x)\rho_1(z)-\rho_1\big(\big[[z,x]_2,y\big]_1\big)\\
&\quad+\rho_1(z)\rho_1\big([x,y]_2\big)-\rho_1(x)\rho_1(z)\rho_2(y)+\rho_1(y)\rho_1(x)\rho_2(z)-\rho_1\big(\big[[z,x]_1,y\big]_2\big)\\
&\quad+\rho_1(z)\rho_2\big([x,y]_1\big)-\rho_1(x)\rho_2(z)\rho_1(y)+\rho_1(y)\rho_2(x)\rho_1(z)\Big)v\Big\rangle=0
\end{aligned}
$$

即 ρ_1^*,ρ_2^* 满足等式(3.3)。由 (ρ_1,ρ_2,V) 是 $\big(M,[,]_1,[,]_2\big)$ 的表示可知， ρ_1,ρ_2 满足等式(3.4)。因此直接计算得

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle\Big(\rho_1^*\big([x,y]_2\big)\rho_2^*(z)+\rho_2^*\big([x,y]_1\big)\rho_2^*(z)+\rho_2^*\big([x,y]_2\big)\rho_1^*(z)-\rho_1^*\big(\big[[x,z]_2,y\big]_2\big)\\
&+\rho_1^*(x)\rho_2^*\big([z,y]_2\big)-\rho_1^*(z)\rho_2^*(x)\rho_2^*(y)+\rho_1^*(y)\rho_2^*(z)\rho_2^*(x)-\rho_2^*\big(\big[[x,z]_2,y\big]_1\big)\\
&+\rho_2^*(x)\rho_1^*\big([z,y]_2\big)-\rho_2^*(z)\rho_1^*(x)\rho_2^*(y)+\rho_2^*(y)\rho_1^*(z)\rho_2^*(x)-\rho_2^*\big(\big[[x,z]_1,y\big]_2\big)\\
&+\rho_2^*(x)\rho_2^*\big([z,y]_1\big)-\rho_2^*(z)\rho_2^*(x)\rho_1^*(y)+\rho_2^*(y)\rho_2^*(z)\rho_1^*(x)\Big)f,v\Big\rangle\\
&=\Big\langle f,\Big(\rho_1\big([z,y]_2\big)\rho_2(x)+\rho_2\big([z,y]_1\big)\rho_2(x)+\rho_2\big([z,y]_2\big)\rho_1(x)-\rho_1\big(\big[[z,x]_2,y\big]_2\big)\\
&\quad+\rho_1(z)\rho_2\big([x,y]_2\big)-\rho_1(x)\rho_2(z)\rho_2(y)+\rho_1(y)\rho_2(x)\rho_2(z)-\rho_2\big(\big[[z,x]_2,y\big]_1\big)\\
&\quad+\rho_2(z)\rho_1\big([x,y]_2\big)-\rho_2(x)\rho_1(z)\rho_2(y)+\rho_2(y)\rho_1(x)\rho_2(z)-\rho_2\big(\big[[z,x]_1,y\big]_2\big)\\
&\quad+\rho_2(z)\rho_2\big([x,y]_1\big)-\rho_2(x)\rho_2(z)\rho_1(y)+\rho_2(y)\rho_2(x)\rho_1(z)\Big)v\Big\rangle=0
\end{aligned}
$$

即 ρ_1^*,ρ_2^* 满足等式(3.4)。综上可知 $\big(\rho_1^*,\rho_2^*,V^*\big)$ 是 $\big(M,[,]_1,[,]_2\big)$ 的表示。

例 3.2 设 $\big(M,[,]_1,[,]_2\big)$ 是相容 Malcev 代数，则 $\big(ad_1^*,ad_2^*,M^*\big)$ 是 $\big(M,[,]_1,[,]_2\big)$ 的表示。

证明 由例 3.1 可知 (ad_1,ad_2,M) 是相容 Malcev 代数 $\big(M,[,]_1,[,]_2\big)$ 的表示，再由定理 3.3 可知 $\big(ad_1^*,ad_2^*,M^*\big)$ 是相容 Malcev 代数 $\big(M,[,]_1,[,]_2\big)$ 的表示。

4. pre-Malcev 代数相容的条件

定义 4.1 设 $(A,\circ_1)$ 和 $(A,\circ_2)$ 是 pre-Malcev 代数，如果对于任意的 $k_1,k_2\in F$ ， A 关于下面定义的代数运算

$$
x\circ y=k_1x\circ_1 y+k_2x\circ_2 y\text{，}\quad\forall x,y\in A\text{，}
$$

是 pre-Malcev 代数，则称 $(A,\circ_1,\circ_2)$ 是相容 pre-Malcev 代数。

定理 4.1 设 $(A,\circ_1)$ 和 $(A,\circ_2)$ 是 pre-Malcev 代数， $(A,\circ_1,\circ_2)$ 是相容 pre-Malcev 代数当且仅当对于任意的 $x,y,z,t\in A$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\big((x\circ_1 y)\circ_1 z\big)\circ_2 t-x\circ_2\big((y\circ_1 z)\circ_1 t\big)+\big(z\circ_1(y\circ_1 x)\big)\circ_2 t-z\circ_2\big(y\circ_1(x\circ_1 t)\big)\\
&+y\circ_2\big(x\circ_1(z\circ_1 t)\big)+\big((x\circ_2 y)\circ_1 z\big)\circ_1 t-x\circ_1\big((y\circ_2 z)\circ_1 t\big)+\big(z\circ_1(y\circ_2 x)\big)\circ_1 t\\
&-z\circ_1\big(y\circ_1(x\circ_2 t)\big)+y\circ_1\big(x\circ_1(z\circ_2 t)\big)+\big((x\circ_1 y)\circ_2 z\big)\circ_1 t-x\circ_1\big((y\circ_1 z)\circ_2 t\big)\\
&+\big(z\circ_2(y\circ_1 x)\big)\circ_1 t-z\circ_1\big(y\circ_2(x\circ_1 t)\big)+y\circ_1\big(x\circ_2(z\circ_1 t)\big)-(x\circ_1 z)\circ_2(y\circ_1 t)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&+x\circ_2\left(\left(z\circ_1 y\right)\circ_1 t\right)-\left(z\circ_1\left(x\circ_1 y\right)\right)\circ_2 t+\left(z\circ_1 x\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)-\left(\left(y\circ_1 x\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t\\&-\left(x\circ_1 z\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)+x\circ_1\left(\left(z\circ_2 y\right)\circ_1 t\right)-\left(z\circ_1\left(x\circ_2 y\right)\right)\circ_1 t+\left(z\circ_1 x\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)\\&-\left(\left(y\circ_2 x\right)\circ_1 z\right)\circ_1 t-\left(x\circ_2 z\right)\circ_1\left(y\circ_1 t\right)+x\circ_1\left(\left(z\circ_1 y\right)\circ_2 t\right)-\left(z\circ_2\left(x\circ_1 y\right)\right)\circ_1 t\\&+\left(z\circ_2 x\right)\circ_1\left(y\circ_1 t\right)-\left(\left(y\circ_1 x\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t=0\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(x\circ_2 y\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t-x\circ_1\left(\left(y\circ_2 z\right)\circ_2 t\right)+\left(z\circ_2\left(y\circ_2 x\right)\right)\circ_1 t-z\circ_1\left(y\circ_2\left(x\circ_2 t\right)\right)\\&+y\circ_1\left(x\circ_2\left(z\circ_2 t\right)\right)+\left(\left(x\circ_2 y\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t-x\circ_2\left(\left(y\circ_2 z\right)\circ_1 t\right)+\left(z\circ_1\left(y\circ_2 x\right)\right)\circ_2 t\\&-z\circ_2\left(y\circ_1\left(x\circ_2 t\right)\right)+y\circ_2\left(x\circ_1\left(z\circ_2 t\right)\right)+\left(\left(x\circ_1 y\right)\circ_2 z\right)\circ_2 t-x\circ_2\left(\left(y\circ_1 z\right)\circ_2 t\right)\\&+\left(z\circ_2\left(y\circ_1 x\right)\right)\circ_2 t-z\circ_2\left(y\circ_2\left(x\circ_1 t\right)\right)+y\circ_2\left(x\circ_2\left(z\circ_1 t\right)\right)-\left(x\circ_2 z\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)\\&+x\circ_1\left(\left(z\circ_2 y\right)\circ_2 t\right)-\left(z\circ_2\left(x\circ_2 y\right)\right)\circ_1 t+\left(z\circ_2 x\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)-\left(\left(y\circ_2 x\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t\\&-\left(x\circ_1 z\right)\circ_2\left(y\circ_2 t\right)+x\circ_2\left(\left(z\circ_2 y\right)\circ_1 t\right)-\left(z\circ_1\left(x\circ_2 y\right)\right)\circ_2 t+\left(z\circ_1 x\right)\circ_2\left(y\circ_2 t\right)\\&-\left(\left(y\circ_2 x\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t-\left(x\circ_2 z\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)+x\circ_2\left(\left(z\circ_1 y\right)\circ_2 t\right)-\left(z\circ_2\left(x\circ_1 y\right)\right)\circ_2 t\\&+\left(z\circ_2 x\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)-\left(\left(y\circ_1 x\right)\circ_2 z\right)\circ_2 t=0\end{aligned}\tag{4.2}$$

证明 显然$\circ$是双线性运算。由$(A,\circ_1)$和$(A,\circ_2)$是 pre-Malcev 代数可知，$\circ_1,\circ_2$满足等式(2.5)。因此对于任意的$k_1,k_2\in F,x,y,z,t\in A$直接计算得

$$\begin{aligned}&\left(\left(x\circ y\right)\circ z\right)\circ t-x\circ\left(\left(y\circ z\right)\circ t\right)+\left(z\circ\left(y\circ x\right)\right)\circ t-z\circ\left(y\circ\left(x\circ t\right)\right)+y\circ\left(x\circ\left(z\circ t\right)\right)\\&-\left(x\circ z\right)\circ\left(y\circ t\right)+x\circ\left(\left(z\circ y\right)\circ t\right)-\left(z\circ\left(x\circ y\right)\right)\circ t+\left(z\circ x\right)\circ\left(y\circ t\right)-\left(\left(y\circ x\right)\circ z\right)\circ t\\&=k_1^2k_2\Big[\left(\left(x\circ_1 y\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t-x\circ_2\left(\left(y\circ_1 z\right)\circ_1 t\right)+\left(z\circ_1\left(y\circ_1 x\right)\right)\circ_2 t-z\circ_2\left(y\circ_1\left(x\circ_1 t\right)\right)\\&\quad+y\circ_2\left(x\circ_1\left(z\circ_1 t\right)\right)+\left(\left(x\circ_2 y\right)\circ_1 z\right)\circ_1 t-x\circ_1\left(\left(y\circ_2 z\right)\circ_1 t\right)+\left(z\circ_1\left(y\circ_2 x\right)\right)\circ_1 t\\&\quad-z\circ_1\left(y\circ_1\left(x\circ_2 t\right)\right)+y\circ_1\left(x\circ_1\left(z\circ_2 t\right)\right)+\left(\left(x\circ_1 y\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t-x\circ_1\left(\left(y\circ_1 z\right)\circ_2 t\right)\\&+\left(z\circ_2\left(y\circ_1 x\right)\right)\circ_1 t-z\circ_1\left(y\circ_2\left(x\circ_1 t\right)\right)+y\circ_1\left(x\circ_2\left(z\circ_1 t\right)\right)-\left(x\circ_1 z\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)\\&+x\circ_2\left(\left(z\circ_1 y\right)\circ_1 t\right)-\left(z\circ_1\left(x\circ_1 y\right)\right)\circ_2 t+\left(z\circ_1 x\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)-\left(\left(y\circ_1 x\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t\\&-\left(x\circ_1 z\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)+x\circ_1\left(\left(z\circ_2 y\right)\circ_1 t\right)-\left(z\circ_1\left(x\circ_2 y\right)\right)\circ_1 t+\left(z\circ_1 x\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)\\&-\left(\left(y\circ_2 x\right)\circ_1 z\right)\circ_1 t-\left(x\circ_2 z\right)\circ_1\left(y\circ_1 t\right)+x\circ_1\left(\left(z\circ_1 y\right)\circ_2 t\right)-\left(z\circ_2\left(x\circ_1 y\right)\right)\circ_1 t\\&+\left(z\circ_2 x\right)\circ_1\left(y\circ_1 t\right)-\left(\left(y\circ_1 x\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t\Big]\\&+k_1k_2^2\Big[\left(\left(x\circ_2 y\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t-x\circ_1\left(\left(y\circ_2 z\right)\circ_2 t\right)+\left(z\circ_2\left(y\circ_2 x\right)\right)\circ_1 t-z\circ_1\left(y\circ_2\left(x\circ_2 t\right)\right)\\&+y\circ_1\left(x\circ_2\left(z\circ_2 t\right)\right)+\left(\left(x\circ_2 y\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t-x\circ_2\left(\left(y\circ_2 z\right)\circ_1 t\right)+\left(z\circ_1\left(y\circ_2 x\right)\right)\circ_2 t\\&-z\circ_2\left(y\circ_1\left(x\circ_2 t\right)\right)+y\circ_2\left(x\circ_1\left(z\circ_2 t\right)\right)+\left(\left(x\circ_1 y\right)\circ_2 z\right)\circ_2 t-x\circ_2\left(\left(y\circ_1 z\right)\circ_2 t\right)\\&+\left(z\circ_2\left(y\circ_1 x\right)\right)\circ_2 t-z\circ_2\left(y\circ_2\left(x\circ_1 t\right)\right)+y\circ_2\left(x\circ_2\left(z\circ_1 t\right)\right)-\left(x\circ_2 z\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)\\&+x\circ_1\left(\left(z\circ_2 y\right)\circ_2 t\right)-\left(z\circ_2\left(x\circ_2 y\right)\right)\circ_1 t+\left(z\circ_2 x\right)\circ_1\left(y\circ_2 t\right)-\left(\left(y\circ_2 x\right)\circ_2 z\right)\circ_1 t\\&-\left(x\circ_1 z\right)\circ_2\left(y\circ_2 t\right)+x\circ_2\left(\left(z\circ_2 y\right)\circ_1 t\right)-\left(z\circ_1\left(x\circ_2 y\right)\right)\circ_2 t+\left(z\circ_1 x\right)\circ_2\left(y\circ_2 t\right)\\&-\left(\left(y\circ_2 x\right)\circ_1 z\right)\circ_2 t-\left(x\circ_2 z\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)+x\circ_2\left(\left(z\circ_1 y\right)\circ_2 t\right)-\left(z\circ_2\left(x\circ_1 y\right)\right)\circ_2 t\\&+\left(z\circ_2 x\right)\circ_2\left(y\circ_1 t\right)-\left(\left(y\circ_1 x\right)\circ_2 z\right)\circ_2 t\Big]\end{aligned}$$

由k_1和k_2的任意性可知，$\circ$满足等式(2.5)当且仅当$\circ_1,\circ_2$满足等式(4.1)和(4.2)。因此结论成立。

基金项目

辽宁师范大学教改项目 LS202002。

参考文献

[1] Hegazi, A.S., Abdelwahab, H. and Calderon Martin, A.J. (2018) Classification of Nilpotent Malcev Algebras of Small Dimensions over Arbitrary Fields of Characteristic Not 2. *Algebras and Representation Theory*, **21**, 19-45. https://doi.org/10.1007/s10468-017-9701-4

[2] Kornev, A.I. (2014) Free Malcev algebra of Rank Three. *Journal of Algebra*, **405**, 38-68. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.01.033

[3] 安慧辉, 修立奇. pre-Malcev 代数的表示与配对[J]. 辽宁师范大学学报, 2018, 41(2): 165-173.

[4] Wu, M.-Z. and Bai, C.-M. (2015) Compatible Lie Bialgebras. *Communications in Theoretical Physics*, **63**, 653-664. https://doi.org/10.1088/0253-6102/63/6/653

[5] Sagle, A.A. (1961) Malcev Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **101**, 426-458. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0143791-X

[6] Kuz'min, E.N. (1968) Mal'cev Algebras and Their Representations. *Algebra i Logika*, **7**, 48-69.

[7] Madariaga, S. (2017) Splitting of Operations for Alternative and Malcev Structures. *Communications in Algebra*, **45**, 183-197. https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1175573