Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2022, 11(7), 4188-4197**
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117445

一类Schrödinger-Maxwell系统的多解

刘林祥，曾　晶*

福建师范大学，数学与统计学院，福建　福州

收稿日期：2022年6月4日；录用日期：2022年6月28日；发布日期：2022年7月5日

摘　要

本文主要研究一类Schrödinger-Maxwell系统，在一定条件下利用临界点理论中的Ekeland变分原理和山路定理证得该系统存在两个正解，并且其中一个解是正能量解，另一个解是负能量解。

关键词

Schrödinger-Maxwell系统，Ekeland变分原理，山路定理，多重正解

Multiple Solutions of a Class of Schrödinger-Maxwell System

Linxiang Liu, Jing Zeng*

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Jun. 4th, 2022; accepted: Jun. 28th, 2022; published: Jul. 5th, 2022

Abstract

This paper mainly studies a class of Schrödinger-Maxwell system. Under certain conditions, using the Ekeland's variational principle and Mountain Pass theorem, it is proved that the system has two positive solutions, one of which is a positive energy solution and the other is a negative energy solution.

Keywords

Schrödinger-Maxwell System, Ekeland's Variational Principle, Mountain Pass Theorem, Multiple Positive Solution

*通讯作者。

文章引用: 刘林祥, 曾晶. 一类 Schrödinger-Maxwell 系统的多解[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4188-4197.
DOI: 10.12677/aam.2022.117445

1. 引言

Schrödinger 方程，又称为 Schrödinger 波动方程，是由奥地利物理学家 Schrödinger 在二十世纪初期根据 Duc de Broglie 的微观粒子具有波粒二象性的假设提出的量子力学中的一个基本方程，也是量子力学的一个基本假定。该方程在物理和应用数学中有较为广泛的应用，例如光纤孤立子通信问题，非线性光学问题，充满流体的弹性管道中的波动问题以及血管中血流非线性波问题等等。该方程通常用于表示微观粒子的运动规律，即用来描述粒子在三维空间和任意给定时间的运动规律。质量为 $m>0$ 的粒子的运动一般用如下线性的 Schrödinger 方程来描述[1]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+Q(x)\psi, x\in\mathbf{R}^3,$$

其中 i 表示单位虚根，$\hbar$ 是普朗克常数，ψ 表示粒子的运动状态，$Q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 表示粒子在 $x\in\mathbf{R}^3$ 处的与时间无关的势。若存在多个粒子的情况下，引入一个扰动项 $g(x,\psi)$ 来模拟相互作用的效果：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+Q(x)\psi-g(x,\psi), x\in\mathbf{R}^3.$$

若考虑粒子在运动过程受自己引力场的影响，通常加入一个满足如下形式的扰动项 $\phi(x)$

$$\phi(x)=-\int_{\mathbf{R}^3}\frac{|\psi|^2}{|x-y|}\mathrm{d}y,$$

即满足泊松方程 $-\Delta\phi(x)=|\psi|^2$。那么上式的 Schrödinger 方程就转化为如下 Schrödinger-Maxwell 系统(又称 Schrödinger-Poisson 系统)

$$\begin{cases}i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+Q(x)\psi+\phi\psi-g(x,\psi), & x\in\mathbf{R}^3,\\ -\Delta\phi=|\psi|^2, & x\in\mathbf{R}^3.\end{cases}\tag{1}$$

通过驻波变换

$$\psi(x,t)=u(x)\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}},\quad x\in\mathbf{R}^3, t\in\mathbf{R},$$

其中 $E>0$，则系统(1)转化成稳态的 Schrödinger-Maxwell 系统[1]

$$\begin{cases}-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta u+V(x)u+\phi u=f(x,u), & x\in\mathbf{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbf{R}^3,\end{cases}$$

其中 $V(x)=Q(x)-E$，$g\left(x,\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}}u\right)=\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}}f(x,u)$，$u\in\mathbf{R}$。

本文研究 Schrödinger-Maxwell 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+b(x)\phi u=f(x,u)+h(x), & x\in\mathbf{R}^3,\\ -\Delta\phi=b(x)u^2, & x\in\mathbf{R}^3.\end{cases}\tag{2}$$

其中$V(x)\in C(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$为势函数，$b(x)$为非负密度电荷且$b(x)>0$，$|b(x)|<c_1$，$f(x,u)\in C(\mathbf{R}^3\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，$h(x)$为扰动函数，且$h\in L^2(\mathbf{R}^3)$，$h>0$。该系统出现在量子力学中，可以用来描述带电粒子和电磁场的相互作用。此外，Schrödinger-Maxwell 系统也出现在 Abel 规范理论中，用来描述非线性 Schrödinger 场与电磁场相互作用的运动规律，同时在半导体理论、非线性光学和等离子体物理学中都有广泛应用[2]。

近些年，系统(2)被广泛的研究，当$h(x)=0$，$b(x)=1$时，有以下结果：Sun-Ma [3]不仅证得当$f(x,u)$在无穷远处是超线性的且具有亚临界或临界增长时，得到了系统基态解的存在性，还证得当$V(x)=1$时具有广泛超线性的基态解。Alves-Souto-Sérgio [4]通过形变引理和 Miranda 定理得到该系统的最小能量解。当$f(x,u)=|u|^{s-1}u$，$V(x)$为常数时，Azzollini-Pomponio [5]证得当$2<s<5$时该系统基态解的存在性以及当$3<s<5$和$V(x)$无界时基态解的存在与非存在性。当$f(x,u)$满足 Amborosetti-Rabinowitz 条件且$V(x)$既不是径向对称也不是周期函数时，Chen-Tang [6]通过喷泉定理证得该系统的高能量解。文献[7]假设的条件与文献[6]类似，Li-Su-Wei 则是利用变形的喷泉定理证得该系统无穷多解的存在性。

当$h(x)=0$，$b(x)$不为常数时，系统(2)也有一些研究结果。假设$V(x)=1$，$\lim_{|x|\to 0}b(x)=0$，当$f(x,u)=a(x)u^3$且$\lim_{|x|\to 0}a(x)>0$时，Zhang-Cai [8]利用 Nehari 流形证得该系统基态解和束缚态解的存在性。在相同假设下对更一般的$f(x,u)=a(x)f(u)$，Fang [9]通过使用 Szulkin 和 Weth 所提出的广义 Nehari 流形的方法得到该系统的束缚态解。当$f(x,u)=a(x)|u|^{s-1}u$且$a(x)$满足一定条件时，Yang-Zhao-Ding [10]利用变分法证得该系统当$1<s<3$时的解的存在性。

而当$h(x)\neq 0$，$b(x)$不为常数，且$f(x,u)=|u|^{p-2}u$时，Salvatore [11]通过 Benci 和 Fortunato 在 1992 年提出的变分公式和纤维方法得到该系统无穷多个径向对称解。本文即研究当$h(x)\neq 0$，$b(x)$不为常数的情况。

本文假设在系统(2)中，$V(x)$为非径向对称的函数，并且满足以下条件：

(V) $\inf_{x\in\mathbf{R}^3}V(x)\geq c_2>0$ (c_2为正常数)，对任意的$M>0$，有$meas\left(\left\{x\in\mathbf{R}^3:V(x)\leq M\right\}\right)<\infty$，其中$meas$是$\mathbf{R}^3$上的 Lebesgue 测度；

(f_1) 存在常数$c_3>0$，$2<p<2^*=6$，使得$|f(x,u)|\leq c_3\left(1+|u|^{p-1}\right)$；

(f_2) 存在$\mu>4$，使得$\mu F(x,u)\leq uf(x,u)$，其中$F(x,u)=\int_0^u f(x,z)\mathrm{d}z$；

(f_3) $\lim_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u}=0$，对任意的$x\in\mathbf{R}^3$一致成立；

(f_4) $\inf_{x\in\mathbf{R}^3,u\in\mathbf{R}}F(x,u)>0$。

定理 1.1. 若满足条件(V)、(f_1)~(f_4)，则存在一个常数$m_0>0$，当$\|h\|_{L^2}<m_0$时，系统(2)至少有两个不同的解$\left\{(u_0,\phi),(\widetilde{u_0},\tilde{\phi})\right\}\in E\times D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$。

定理 1.2. 若满足条件(V)、(f_1)~(f_3)，当$f(x,u)>0$时，系统(2)的所有非平凡解都是正解。

注 1.3. 1) 条件(V)是由 Bartsch-Wang [12]首次提出，用于克服方程紧性。

2) 不难找出符合条件(f_1)~(f_4)的函数$f(x,u)$，例如$f(x,u)=|u|^{q-2}u,4<q<6$。

3) 在文献[11]的定理 1.2 中，$h(x)$为径向对称的，并且得到了多个径向对称解，而本文中$h(x)$和$V(x)$都不是径向对称，故也可以得到系统(2)的多个解。

本文主要研究 Schrödinger-Maxwell 系统的多解，通过 Ekeland 变分原理和山路定理得到两个临界点，从而证明该系统至少存在两个解，并在一定条件下证得这两个解都是正解，其中一个解是正能量解，另一个解是负能量解。推广了文献[6]中当$h(x)=0$时证得高能量解的存在性的结论。

本文的第一部分主要讨论 Schrödinger-Maxwell 系统的背景以及研究现状，第二部分主要介绍一些基

本知识并给出一些引理的证明，第三部分证明定理 1.1 和定理 1.2。

2. 预备知识

2.1. 一些符号说明

在空间 $H^1(\mathbf{R}^3):=\{u\in L^2(\mathbf{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbf{R}^3)\}$ 上定义范数

$$\|u\|_{H^1}:=\left(\int_{\mathbf{R}^3}\left(|\nabla u|^2+u^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在空间 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3):=\{u\in L^{2^*}(\mathbf{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbf{R}^3)\}$ 上定义范数

$$\|u\|_{D^{1,2}}:=\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$L^n(\mathbf{R}^3)$ 是一般的 Lebesgue 空间，对任意的 $n\in[1,+\infty)$ 上定义范数

$$\|u\|_{L^n}:=\left(\int_{\mathbf{R}^3}|u|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}.$$

定义 Hibert 空间 E 为

$$E:=\left\{u\in H^1(\mathbf{R}^3):\int_{\mathbf{R}^3}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

其上的内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle_E=\int_{\mathbf{R}^3}\left(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv\right)\mathrm{d}x,\ \|u\|_E=\langle u,u\rangle_E^{\frac{1}{2}},$$

其中 $V(x)$ 为系统(2)中的势函数。

定义系统(2)的泛函 $J\in C^1\left(E\times D^{1,2}(\mathbf{R}^3),\mathbf{R}\right)$ 为

$$J(u,\phi)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}b(x)\phi u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x.$$

本文中 C 在不同位置表示不同正常数。

2.2. 预备引理

引理 2.1. [13]若满足条件(V)，则 E 嵌入到 $L^s(\mathbf{R}^3)(2\le s<2^*)$ 是紧的。

引理 2.2. [14]若对任意的 $u\in E$，则存在唯一的 $\phi=\phi_u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得 $-\Delta\phi_u=b(x)u^2$，其中 $b(x)$ 见系统(2)，此外 ϕ_u 的积分表达式为

$$\phi_u=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{b(y)u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y. \tag{3}$$

由引理 2.2 可知，通过 Sobolev 不等式以及 Hölder 不等式可得到

$$\|\phi_u\|_{D^{1,2}}^2=\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\phi_u|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}b(x)\phi_u u^2\mathrm{d}x\le C\|\phi_u\|_{L^6}\|u\|_{L^{12/5}}^2\le C\|\phi_u\|_{D^{1,2}}\|u\|_{L^{12/5}}^2. \tag{4}$$

即

$$\|\phi_u\|_{D^{1,2}}\le C\|u\|_{L^{12/5}}^2. \tag{5}$$

由(4)和(5)可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}b(x)\phi_u u^2\mathrm{d}x\le C\|\phi_u\|_{D^{1,2}}\|u\|_{L^{12/5}}^2\le C\|u\|_{L^{12/5}}^4\le C\|u\|_E^4. \tag{6}$$

定义 $I:E\to\mathbf{R}$

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}b(x)\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x, \tag{7}$$

对任意的 $v\in E$ 有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\mathbf{R}^3}\left(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv+b(x)\phi_u uv-f(x,u)v-h(x)v\right)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

引理 2.3. [15]以下两个命题等价：

1) $(u,\phi)\in E\times D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 是 $J(u,\phi)$ 的临界点。

2) u 是 $I(u)$ 的临界点且 $\phi=\phi_u$。

引理 2.4. 若满足条件(V)、(f_1)和(f_3)，则存在常数 ρ，α，$m_0>0$，当 $\|h\|_{L^2}<m_0$ 则有 $I(u)|_{\|u\|_E=\rho}\geq\alpha$。

证明 由(f_3)可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|u|<\delta$ 时，使得

$$|f(x,u)|<2\varepsilon|u|. \tag{9}$$

又由(f_1)可知，当 $|u|\geq\delta$ 时有

$$|f(x,u)|\leq c_3+c_3|u|^{p-1}\leq c_3\left(\frac{|u|}{\delta}\right)^{p-1}+c_3|u|^{p-1}=\left(\frac{c_3}{\delta^{p-1}}+c_3\right)|u|^{p-1}. \tag{10}$$

由(9) (10)可知

$$|f(x,u)|\leq 2\varepsilon|u|+\left(\frac{c_3}{\delta^{p-1}}+c_3\right)|u|^{p-1}. \tag{11}$$

故令 $c_4=\frac{1}{p}\left(\frac{c_3}{\delta^{p-1}}+c_3\right)$，则有

$$F(x,u)\leq\varepsilon|u|^2+c_4|u|^p, \tag{12}$$

又因为 $\phi_u\geq 0$ 且对任意的 $s\in[2,2^*)$，E 嵌入到 $L^s(\mathbf{R}^3)$ 且是连续的，再利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}I(u)&\geq\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\varepsilon\|u\|_{L^2}^2-c_4\|u\|_{L^p}^p-\|h\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\\&\geq\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\frac{\varepsilon}{c_2}\|u\|_E^2-C\|u\|_E^p-\frac{1}{\sqrt{c_2}}\|h\|_{L^2}\|u\|_E\\&=\|u\|_E\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{c_2}\right)\|u\|_E-C\|u\|_E^{p-1}-\frac{1}{\sqrt{c_2}}\|h\|_{L^2}\right],\end{aligned}$$

其中 c_2 见条件(V)。上式中取 $\varepsilon=\frac{c_2}{4}$，$\|u\|_E=t>0$，再令

$$g(t)=\frac{1}{4}t-Ct^{p-1},$$

则存在一个常数 $\rho>0$，使得 $\max_{t>0}g(t)=g(\rho)>0$。取 $m_0=\frac{1}{2}\sqrt{c_2}g(\rho)$ 则存在一个常数 $\alpha>0$，使得 $I(u)|_{\|u\|_E=\rho}\geq\alpha$。 □

引理 2.5. 若满足条件(V)、(f_2)和(f_4)，则存在 $v\in E$ 且 $\|v\|_E>\rho$（ρ 见引理 2.4)使得 $I(v)<0$。

证明 对任意的 $t\geq 1$，令

$$k(t)=t^{-\mu}F(x,tu)-F(x,u),$$

其中 $\mu>4$，则由(f_2)可知

$$k'(t)=t^{-\mu-1}\left(f(x,tu)tu-\mu F(x,tu)\right)\geq 0.$$

那么 $k(t)\geq k(1)=0$，并且对任意的 $x\in\mathbf{R}^3$，$u\in\mathbf{R}$ 有

$$t^{\mu}F(x,u)\leq F(x,tu).$$

通过(6) (7)和(f_4)可得

$$\begin{aligned}I(tu)&=\frac{1}{2}t^2\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}b(x)\phi_{tu}(tu)^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}F(x,tu)\mathrm{d}x-t\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{2}t^2\|u\|_E^2+\frac{Ct^4}{4}\|u\|_E^4-t^{\mu}\int_{\mathbf{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-t\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{13}$$

当 $t\to+\infty$，$u\in E$，$u\neq 0$ 时 $I(tu)\to-\infty$。故存在 $v=t_0u$，$t_0>0$ 足够大且 $\|v\|_E>\rho$ 使得 $I(v)<0$。 □

引理 2.6. 设 $\{u_n\}\subseteq E$ 是 $I(u)$ 的有界 Palais-Smale 序列，若满足条件(V)、(f_1)~(f_3)，则 $\{u_n\}$ 具有强收敛子列。

证明 设序列 $\{u_n\}$ 满足

$$I(u_n)\to c,\ I'(u_n)\to 0,\ \sup_n\|u_n\|_E<+\infty.$$

在序列 $\{u_n\}$ 中选取一个子序列，仍记为 $\{u_n\}$ 并且在 E 中有 $u_n\rightharpoonup u$，又由引理2.1可知，对任意的 $s\in\left[2,2^*\right)$，在 $L^s\left(\mathbf{R}^3\right)$ 中 $u_n\to u$。由(8)可知，我们容易得到

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|_E^2&=\left\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\right\rangle+\int_{\mathbf{R}^3}\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbf{R}^3}b(x)\left(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u\right)(u_n-u)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

易知，当 $n\to\infty$ 时有

$$\left\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\right\rangle\to 0.$$

又由(11)可知，存在一个常数 $c_5=\left(\frac{c_3}{\delta^{p-1}}+c_3\right)>0$ 使得

$$f(x,u)\leq 2\varepsilon|u|+c_5|u|^{p-1}.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^3}\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\\&\leq\int_{\mathbf{R}^3}\left[2\varepsilon\left(|u_n|+|u|\right)+c_5\left(|u_n|^{p-1}+|u|^{p-1}\right)\right]|u_n-u|\mathrm{d}x\\&\leq C\left(\|u_n\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}\right)\|u_n-u\|_{L^2}+C\left(\|u_n\|_{L^p}^{p-1}+\|u\|_{L^p}^{p-1}\right)\|u_n-u\|_{L^p}.\end{aligned}$$

因为对任意的 $s\in\left[2,2^*\right)$，在 $L^s\left(\mathbf{R}^3\right)$ 中 $u_n\to u$，所以当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_{\mathbf{R}^3}\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0.$$

再利用(5)、Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^3} b(x)\phi_{u_n}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x &\le C\left\|\phi_{u_n}u_n\right\|_{L^2}\left\|u_n-u\right\|_{L^2}\\ &\le C\left\|\phi_{u_n}\right\|_{L^6}\left\|u_n\right\|_{L^3}\left\|u_n-u\right\|_{L^2}\\ &\le C\left\|\phi_{u_n}\right\|_{D^{1,2}}\left\|u_n\right\|_{L^3}\left\|u_n-u\right\|_{L^2}\\ &\le C\left\|u_n\right\|_{L^{12/5}}^2\left\|u_n\right\|_{L^3}\left\|u_n-u\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

同样因为任意的 $s\in\left[2,2^*\right)$，在 $L^s\left(\mathbf{R}^3\right)$ 中 $u_n\to u$，则当 $n\to\infty$ 时

$$\int_{\mathbf{R}^3} b(x)\phi_{u_n}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0.$$

同理可得，当 $n\to\infty$ 时

$$\int_{\mathbf{R}^3} b(x)\phi_u u(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0.$$

显然当 $n\to\infty$ 时会有

$$\int_{\mathbf{R}^3} b(x)\left(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0.$$

那么当 $n\to\infty$ 时 $\left\|u_n-u\right\|_E\to 0$。 □

3. 主要定理的证明

3.1. 定理 1.1 的证明

本节主要分两步证明定理 1.1。

第一步： 证明存在一个 $u_0\in E$ 使得 $I'(u_0)=0$ 且 $I(u_0)<0$。

设 $s(t):=F\left(x,t^{-1}u\right)t^{\mu}$ 且 $s:[1,\infty)\to\mathbf{R}$。

$$s'(t)=F\left(x,t^{-1}u\right)t^{\mu}\mu-f\left(x,t^{-1}u\right)t^{-2}ut^{\mu-1}=t^{\mu-1}\left(F\left(x,t^{-1}u\right)\mu-f\left(x,t^{-1}u\right)t^{-1}u\right).$$

由(f_2)可知 $s'(t)<0$。

故当 $|u|\ge 1$ 时，$s(1)\ge s(|u|)$，则有

$$F(x,u)\ge F\left(x,|u|^{-1}u\right)|u|^{\mu}\ge c_6|u|^{\mu}, \tag{14}$$

其中 $c_6=\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^3,u\in\mathbf{R}}F(x,u)>0$。

由(f_3)可知，存在 $\alpha>0$，当 $0<|u|\le\alpha$ 时会有

$$\left|\frac{f(x,u)u}{u^2}\right|=\left|\frac{f(x,u)}{u}\right|\le 1. \tag{15}$$

当 $\alpha\le|u|\le 1$ 时，存在 $M_1>0$ 使得

$$\left|\frac{f(x,u)u}{u^2}\right|\le\frac{c_3\left(1+|u|^{p-1}\right)|u|}{u^2}\le M_1. \tag{16}$$

那么当 $0\le|u|\le 1$ 时，由(15) (16)可得

$$f(x,u)u\ge-(M_1+1)|u|^2.$$

再利用等式 $F(x,u)=\int_0^1 f(x,tu)\mathrm{d}t$ 可得

$$F(x,u)\ge-\frac{1}{2}(M_1+1)|u|^2. \tag{17}$$

令 $c_7=-\frac{1}{2}(M_1+1)$ 由(14) (17)可知，对任意的 $u\in\mathbf{R}$ 有

$$F(x,u)\geq c_6|u|^{\mu}-c_7|u|^2. \tag{18}$$

因为 $h(x)\in L^2(\mathbf{R}^3)$，且 $h>0$，取 $\psi\in E$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^3}h(x)\psi(x)\mathrm{d}x>0.$$

则由(7) (18)可知，对任意的 $t>0$ 且足够小时有

$$I(t\psi)\leq\frac{1}{2}t^2\|\psi\|_E^2+\frac{Ct^4}{4}\|\psi\|_E^4-Ct^{\mu}\|\psi\|_{L^{\mu}}^{\mu}+Ct^2\|\psi\|_{L^2}^2-t\int_{\mathbf{R}^3}h\psi\mathrm{d}x<0.$$

因此设 $c_0=\inf\left\{I(u):u\in\bar{B}_{\rho}\right\}<0$， ρ 见引理 2.4，取 $B_{\rho}=\left\{u\in E:\|u\|_E<\rho\right\}$，则利用 Ekeland 变分原理可知，存在一个序列 $\{u_n\}\subseteq\bar{B}_{\rho}$ 有

$$c_0\leq I(u_n)<c_0+\frac{1}{n},$$

和

$$I(\omega_n)\geq I(u_n)-\frac{1}{n}\|\omega_n-u_n\|_E$$

其中 $\omega_n\in\bar{B}_{\rho}$，且 $\omega_n\neq u_n$。

令 $l\in\bar{B}_{\rho}$， $\|l\|_E=1$，取 $\omega_n=u_n+tl$， $t>0$，则

$$\frac{I(u_n+tl)-I(u_n)}{t}\geq-\frac{1}{n}. \tag{19}$$

令 $t\to 0$ 可得

$$\left\langle I'(u_n),l\right\rangle\geq-\frac{1}{n}.$$

再用 $-l$ 代替 l 同理可得 $\left\langle I'(u_n),-l\right\rangle\geq-\frac{1}{n}$，整理可得

$$\left\langle I'(u_n),l\right\rangle\leq\frac{1}{n}. \tag{20}$$

由(19)和(20)可得

$$\left|\left\langle I'(u_n),l\right\rangle\right|\leq\frac{1}{n}.$$

由 l 的任意性可知 $I'(u_n)\leq\frac{1}{n}$。再由引理 2.6 可知，存在一个 $u_0\in E$ 使得 $I'(u_0)=0$ 且 $I(u_0)<0$。

由引理 2.3 可知， u_0 是 $I(u)$ 的临界点等价于 (u_0,ϕ_0) 是 J 的临界点，故得到系统(2)的第一个解。

第二步： 证明存在一个 $\widetilde{u_0}\in E$ 使得 $I'(\widetilde{u_0})=0$ 且 $I(\widetilde{u_0})>0$。

由(7)式，及引理 2.4 中的 α 和引理 2.5 中的 v，我们定义

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)),$$

其中 $\Gamma=\left\{\gamma\in C\left([0,1],H^1(\mathbf{R}^3)\right):\gamma(0)=0,\gamma(1)=v\right\}$。显然， $c\geq\alpha>0$。

由引理 2.4、引理 2.5、引理 2.6 和山路定理可知，存在一个序列$\{u_n\}\subseteq E$使得

$$I(u_n)\to c>0, I'(u_n)\to 0.$$

假设$\|u_n\|_E\to\infty$，

$$\begin{aligned}o(1)&=\frac{1}{\|u_n\|_E^2}\left(I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{\|u_n\|_E^2}\int_{\mathbf{R}^3}\left(\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x-\frac{3}{4\|u\|_E^2}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{4}+o(1).\end{aligned}$$

显然矛盾，故$\{u_n\}\subseteq E$有界。即存在$\widetilde{u_0}\in E$，使得$I'(\widetilde{u_0})=0$且$I(\widetilde{u_0})>0$。

由引理 2.3 可知，$\widetilde{u_0}$是$I(u)$的临界点等价于$(\widetilde{u_0},\widetilde{\phi_0})$是$J$的临界点，故得到系统(2)的第二个解。

3.2. 定理 1.2 的证明

设u为系统(2)的非平凡解，对任意的$v\in H^1(\mathbf{R}^3)$有

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u\nabla v+V(x)uv+b(x)\phi_u uv)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u)+h(x))v\mathrm{d}x,$$

选取$v=u^-=\min\{0,u\}$可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}\left[\left(|\nabla u^-|^2+V(x)|u^-|^2\right)+b(x)\phi_u|u^-|^2\right]\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}(f(x,u)+h(x))u^-\mathrm{d}x.$$

易知等式左边大于等于零，等式右边小于等于零，由此可知$\|u^-\|_E=0$，因此$u=u^++u^-\geq 0$。根据强极值原理，得到$u>0$。 □

4. 结论

本文主要研究 Schrödinger-Maxwell 系统(2)多解的存在性，通过 Ekeland 变分原理和山路定理得到两个解，并且在一定条件下证明了这两个解都是正解，推广了文献[6]中的结论。本文采用临界点理论研究 Schrödinger-Maxwell 系统，是基于系统本身的性质，只需在一个合适的函数空间内定义内积，构造简约的能量泛函，再对泛函进行估计即可，处理起来简洁准确。此方法还可用于更一般的 Schrödinger 方程。本文中只考虑系统(2)解的个数和能量的正负，而解的集中性、衰减性等等，还需进一步研究。

基金项目

国家自然科学基金(11501110)；福建省自然科学基金(2018J01656)。

参考文献

[1] Vaira, G. (2011) Ground States for Schrödinger-Poisson Type Systems. *Ricerche di Matematica*, **60**, 263-297. https://doi.org/10.1007/s11587-011-0109-x

[2] He, X.M. (2011) Multiplicity and Concentration of Positive Solutions for the Schrödinger-Poisson Equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **62**, 869-889. https://doi.org/10.1007/s00033-011-0120-9

[3] Sun, J. and Ma, S. (2016) Ground State Solutions for Some Schrödinger-Poisson Systems with Periodic Potentials. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2119-2149. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.057

[4] Alves, C.O., Souto, M.A.S. and Soares, S.H.M. (2017) A Sign-Changing Solution for the Schrödinger-Poisson Equation in R^3. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **47**, 1-25. https://doi.org/10.1216/RMJ-2017-47-1-1

[5] Azzollini, A. and Pomponio, A. (2008) Ground State Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations.

Journal of Mathematical Analysis and Applications, **345**, 90-108. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.057

[6] Chen, S.J. and Tang, C.L. (2009) High Energy Solutions for the Superlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **71**, 4927-4934. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.03.050

[7] Li, Q.D., Su, H. and Wei, Z.L. (2010) Existence of Infinitely Many Large Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **72**, 4264-4270. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.002

[8] Zhang, F. and Cai, L. (2019) Bound and Ground States for a Class of Schrödinger-Poisson Systems. *Boundary Value Problems*, **2019**, Article No. 126. https://doi.org/10.1186/s13661-019-1238-5

[9] Fang, X.D. (2019) Bound State Solutions for Some Non-Autonomous Asymptotically Cubic Schrödinger-Poisson Systems. *Ztschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **70**, Article No. 50. https://doi.org/10.1007/s00033-019-1096-0

[10] Yang, M., Zhao, F. and Ding, Y. (2012) On the Existence of Solutions for Schrödinger-Maxwell Systems in R^3. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **42**, 1655-1674. https://doi.org/10.1216/RMJ-2012-42-5-1655

[11] Salvatore, A. (2006) Multiple Solitary Waves for a Non-Homogeneous Schrödinger-Maxwell System in R^3. *Advanced Nonlinear Studies*, **6**, 157-169. https://doi.org/10.1515/ans-2006-0203

[12] Bartsch, T. and Wang, Z.Q. (1995) Existence and Multiplicity Results for Some Superlinear Elliptic Problems on R^N. *Communications in Partial Differential Equations*, **20**, 1725-1741. https://doi.org/10.1080/03605309508821149

[13] Zou, W.M. and Schechter, M. (2006) Critical Point Theory and Its Applications. Springer, New York.

[14] d'Avenia, P., Pomponio, A. and Vaira, G. (2011) Infinitely Many Positive Solutions for a Schrödinger-Poisson System. *Applied Mathematics Letters*, **24**, 661-664. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.12.002

[15] Benci, V., Fortunato, D., Masiello, A. and Pisani, L. (1999) Solitons and the Electromagnetic Field. *Mathematische Zeitschrift*, **232**, 73-102. https://doi.org/10.1007/PL00004759