Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4588-4602
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117485

Hans汉斯

利用等价无穷小求函数极限

黄紫茵，陈敏风

广东外语外贸大学，数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2022年6月13日；录用日期：2022年7月8日；发布日期：2022年7月15日

摘 要

在求解函数极限的过程中，选择正确的方法可以事半功倍，避免计算过程的繁琐，而利用等价无穷小是一种具有代表性的途径，具有快速、简便、适用性强等优点。因此，有必要探讨如何在函数极限中运用等价无穷小从而简化运算。本文主要基于函数极限知识和常用的等价无穷小，对等价无穷小的比较、代换定理及等价关系进行介绍，探究其在不同函数极限中的应用，并且辅以例题举证。

关键词

等价无穷小，函数极限，无穷小量，等价代换定理，应用

Application of Equivalent Infinitesimal in Function Limit

Ziyin Huang, Minfeng Chen

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 13th, 2022; accepted: Jul. 8th, 2022; published: Jul. 15th, 2022

Abstract

In the process of solving the function limit, the method of selecting pairs can get twice the result with half the effort, avoiding the complicated calculation process. Equivalence infinitesimal is a kind of representative algorithm with its advantages of quickness, simplicity and strong applicability. It can be used to solve the limit problems that are difficult to be solved by other methods, so as to simplify the complexity and make the difficulty easy. The basic method is to replace some infinitesimal factors with its equivalent infinitesimal in the process of finding the limit, so as to achieve the purpose of simplifying the operation. Therefore, it is necessary to explore the application of equivalent infinitesimal in finding function limit. Based on the knowledge of function limit and equivalent infinitesimal in common use, this paper introduces the comparison of equivalent

文章引用: 黄紫茵, 陈敏风. 利用等价无穷小求函数极限[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4588-4602.
DOI: 10.12677/aam.2022.117485

infinitesimal, substitution theorem and equivalent relation, explores its application in different function limit, and verifies it with examples.

Keywords

Equivalent Infinitesimal, Function Limit, Dimensionless, The Equivalent Substitution, Application

1. 绪论

1.1. 研究背景及意义

极限理论是数学分析中一个非常重要的组成部分，而函数极限理论也是连续、可导、级数等理论的基础，因此，学会计算函数极限是学习好数学分析的基础和关键。在数学分析的学习过程中，我们常用的函数极限计算方法有：等价无穷小法、点导数法、变量代换法、两个重要的极限公式、极限存在准则、洛必达法则、Taylor 公式等。

在寻找函数极限的过程中，选择合适的方法可以省去繁琐的计算过程，而等价无穷小法便以便捷、简单、适用范围广等优点而突出，它可以快速解决其他求解方法难以解决的极限问题，将复杂的问题简单化。因此，学会正确使用等价无穷小的方法计算函数极限是非常重要的。其基本方法：在求极限的过程中，用函数中的无穷小量替换成其等价无穷小量，从而简化运算。本文基于函数极限知识和常用的等价无穷小，对等价无穷小的比较、代换定理及等价关系进行介绍，并探究其在函数极限中的应用。

1.2. 研究思路

笔者在做函数极限的计算题时发现在计算一些函数极限时灵活应用等价无穷小替代法则可以使得计算量大幅度降低，相反这些题如果使用其他求函数极限的方法却容易把问题复杂化，甚至可能解不出来，于是笔者查阅资料，探究等价无穷小的替代法则是否在任何情况都适用，然而事实并非如此，于是笔者在查阅大量文献之后发现尽管有大量关于等价无穷小在函数极限中的应用的文献，但却很少完整地总结这些方法。于是笔者得到启发，对其进行归类分析总结，力求为有关的读者提供一个更为详尽全面的指引与参考。

第一部分是导论，这是本文的开头，它的主要功能是引导全文。绪论主要介绍了本课题的研究背景及意义、研究思路、研究背景及文献综述、研究方法，再就本文的创新之处及不足之处展开了详尽地论述，这一部分为本研究作详尽的铺垫，引出文章主要内容。

第二部分引入正文，对本文一大角色——等价无穷小量进行介绍，从定义、性质入手，总结了常见的等价无穷小量及等价无穷小量的等价关系、性质，最后对等价无穷小量的代换定理中的规则进行了归纳介绍，分别有乘除规则及和差规则，在引出定理的同时，本文辅以例题举证，从而方便读者学习和使用代换定理。

第三部分介绍函数极限，主要参考华东师范大学《数学分析》第四版教材，归纳总结函数极限的三个等价定义及其基本性质，为求为解函数极限的方法提供了理论基础。

第四部分基于第二、三部分所做的理论准备进行应用，通过给出一些例题的解题思路，验证等价无

穷小在函数极限中具有重大作用。

第五部分对等价无穷小在求函数极限中的应用进行更加详尽的推广，探究在不同函数中等价无穷小的灵活运用，具体包括不定式极限函数、积分函数、幂指数函数、函数增量与自变量增量的比值、无穷小乘以无穷大及复合函数。等价无穷小在不同的函数中有不同的性质，笔者将其一一列出并举例。

第六部分是结论与建议，在撰写完本文后，笔者发现等价无穷小在计算函数极限中有着非比寻常的地位，方法使用对了，便可以事半功倍，然而笔者也发现文章的一些不足之处，期待后续看到本文的读者对其进行延续和补充。

1.3. 文献综述

张辉，李应岐，敬斌等[1]讨论了用等价无穷小求得分子或分母为两个无穷小之差时函数的极限的方法，并举出例题加以应用。

祝安[2]讨论了在实际情况下时如何运用等价无穷小来求解函数极限，并推广至等价无穷小在更复杂的函数极限运算中的使用。

陈大桥[3]给出了等价无穷小的普遍应用及初学者易犯错误，并对等价无穷小代换在复合函数、变上限积分函数上的应用作了推广，最后，结合等价无穷小和其他求函数极限的方法举出具体例题进行举证。

马艳丽，聂东明[4]进一步挖掘了等价无穷小代换法则在计算函数的极限应用。其主要结论是，在易于验证的条件下，等价无穷小代换的应用扩展到未定式极限和变上限积分函数极限的情况。在求解变上限积分函数极限情况中，扩大了等价无穷小代换的范围。

张辉，李应岐，方晓峰[5]探讨论了运用等价无穷小进行函数极限求解的四种情况：无穷小与无穷小之差、无穷小与无穷大之积、幂指函数以及函数增量与自变量增量的比值。

杨子兰，李睿，杨惠娟[6]讨论了等价无穷小量替换法则在一些复合函数极限中的定理及其应用，同时与使用 Lobida 法则求解的情况相对比，验证了恰当使用等价无穷小在求解函数极限中的简便性。

陈飞翔[7]探讨了等价无穷小的基本概念、性质，应用其求解函数的极限，并研究了无穷小在变上限积分函数及和差代换规则上的推广且辅以例题举证。

关鈺淋[8]给出并证明了在加法、减法、乘法、除法等基本运算下使用等价无穷小代换的条件，以及复合函数中代换规则的条件。同时，列举了利用这些定理求极限的几个例子。

楼向东[9]罗列出一些常用的等价无穷小，并举出了几个利用等价无穷小求极限的实例。

金亚东，朱鹏[10]给出了等价无穷小的常见应用，利用无穷小与幂函数的等价关系，探讨计算函数极限时可进行等价无穷小加减代换的充分条件并加以证明。

肖志涛[11]探究了自变量为等价无穷小的情况下，函数也同样为等价无穷小关系的充分条件之一，并利用等价无穷小运算性质给出函数等价无穷小代换的一些结论，举例说明并使用常见错误例子对结论重点及易错点进行挖掘。

杨凤[12]探讨了幂指数函数主要是 0^0 ，∞^0 ，1^∞ 型幂指数函数在求极限中利用等价无穷小代换的问题，并提出了相关定理且给出证明和举例分析。

孙玉海[13]研究了等价无穷小在求复合函数的极限中的运用，根据一些相关引理，得出求极限过程中两等价无穷小在复合函数中依旧可以相互代换的定理并给出证明及相关的实际例子中的应用。

目前，国内研究已总结了常见的等价无穷小及其应用。近年来，国内学者把在求解函数极限中如何运用等价无穷小，研究地很透彻。比如等价无穷小代换法则，并对其进行了不同范围的推广。例如，等价无穷小代换定理的条件推广，以及等价无穷小在不同函数极限中的推广：在不定式极限函数、变上限积分函数、幂指数函数、函数增量与自变量增量的比值、复合函数等函数中的应用。

1.4. 研究方法

本文通过对各类文献的参考学习，将等价无穷小在求各类函数极限的应用归纳总结，并给出典型例题、习题解析，部分例题给出了错题分析，以便读者更好的理解掌握。

1.5. 本文的创新之处

1) 关于等价无穷小在函数极限中的应用的相关论文较多，但很少完整地总结这些方法。本文则对其进行归类分析总结，力求为有关的读者提供一个更为详尽全面的指引与参考。

2) 本文在探讨研究常用的等价无穷小的各种应用之外，还给出了代换定理及不同函数极限下，等价无穷小的应用和推广。

3) 通过具体例子，部分给出错误解答及其错误分析，方便读者识别不同情况下等价无穷小在函数极限中的用法及条件。

1.6. 本文的不足之处

虽然本文归纳总结了等价无穷小代换定理在不同函数极限中的应用，但在研究中也遇到了一些瓶颈。由于笔者能力有限，无法对等价无穷小在函数极限中的应用进行更加深入地推广，只能停留在对代换定理及前人推广做一些详尽的总结和运用，并以此来解决有关的问题。

2. 无穷小量

2.1. 无穷小量的定义与性质

- **定义**([14], P 61)

  设 f 在某 $U^{\circ}(x_0)$ 上有定义，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

  则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

  若函数 g 在某 $U^{\circ}(x_0)$ 上有界，则称 g 为当 $x\to x_0$ 时的有界量。

  类似地定义当 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to +\infty$，$x\to -\infty$ 以及 $x\to\infty$ 的无穷小量和有界量。

- **性质**([14], P 61)

  1) 有限个(相同类型的)无穷小量相加、相减、相乘仍为无穷小量。

  2) 有界量与有限个无穷小量的相乘仍为无穷小量。

  3) $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

  4) 无穷小量不是一个数，它是一个变量。

  5) 无穷小量(不为零)的倒数为无穷大量，而无穷大量的倒数为无穷小量。

  6) 无穷小量与常数的乘积也为无穷小量。

  7) 无穷小量与其自变量的趋势相关。

  8) 零可作为无穷小量的唯一常量。

  9) 若函数 $\alpha(x)$ 在某 x_0 的空心领域内有界，则称 α 为当 $x\to x_0$ 时的有界量，特别地，任何无穷小量必定是有界量。

2.2. 无穷小量阶的比较

由无穷小量的定义可知，它们都是以 0 为极限的函数，但我们知道，往往不同的无穷小量收敛于 0

的速度是各不相同的，为此，探究两个无穷小量的比值，从而对二者的收敛速度作比较是至关重要的。

- **高阶无穷小量**

  若 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量。

- **低阶无穷小量**

  若 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的低阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))(x\to x_0)$。

  特别地，当 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，记作 $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0)$。

- **同阶无穷小量**

  假设存在 $A,B>0$，使得在 $U^{\circ}(x_0)$ 上，有

$$A\le\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\le B$$

  则称当 x 趋近于 x_0 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量，特别地，当

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\ne 0$$

  时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 一定为同阶无穷小量。

  如：当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{2}x}=2.$$

  因此，$\arcsin x$ 与 $\sqrt{1+x}-1$ 为同阶无穷小量。

- **等价无穷小量**

  若 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时当等价无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$。

  例如，$\arcsin x$ 和 x 为等价无穷小。

- ***k* 阶无穷小量**

  如果 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)^k}=c(c\ne 0)$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量。

2.3. 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，有(其中 $a>0$，$a\ne 1$，$\alpha\ne 0$)

$\sin x\sim x$	$\tan x\sim x$	$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$
$e^x-1\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$	$\arcsin x\sim x$
$a^x-1\sim x\ln a$	$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$	$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$

Continued

$\arctan x \sim x$	$(1+bx)^{\alpha}-1 \sim \alpha bx, \alpha, b \in \mathbb{R}$	$\tan x-\sin x \sim \frac{x^3}{2}$
$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$	$x-\arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$	$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$
$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \sim x$	$e^x-1-x \sim \frac{x^2}{2}$

2.4. 等价无穷小等价性质

1) 自反性：$\alpha \sim \alpha$。

2) 对称性：若 α, β 自变量在同一变化过程中，且 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$。

3) 传递性：若 α, β, γ 自变量在同一变化过程中，且 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma$。

如：求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(\arctan^2 x\right)\cos x}{5x^2+9x^3}$。

解：已知 $\arctan^2 x \sim x^2$，$\arcsin x \sim x$，由等价无穷小的传递性可知 $\arcsin\left(\arctan^2 x\right) \sim \arcsin x^2 \sim x^2$。

故原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{5x^2+9x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{5+9x}=\dfrac{1}{5}$。

2.5. 等价无穷小的代换定理

- **乘除代换规则**

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的等价无穷小，则

1) 若 $\lim_{x\to 0}\alpha(x)\varphi(x)=A$，则 $\lim_{x\to 0}\beta(x)\varphi(x)=A$。

2) 若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\alpha(x)}=A$，则 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\beta(x)}=A$。

3) 等价替换定理：假设在自变量 x 的同一变化过程中，$\alpha_1(x)$，$\alpha_2(x)$，$\beta_1(x)$，$\beta_2(x)$ 都是无穷小量，而且 $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$，$\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$。

若 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A.$$

说明：设对同一变化过程，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为无穷小量，由无穷小量的性质，可得简化某些极限运算的规则。

- **和差代换规则**

1) 和差取大规则

若 $\beta(x)=o(\alpha(x))$，即 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，则 $\alpha \pm \beta \sim \alpha$。

例 2.5.1 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$。

解：由于 $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{3}{x^2}=0$，因此 $3x$ 是 x^3 的高阶无穷小量，

由和差取大规则知，$3x+x^3 \sim 3x$，故 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$。

2) 和差代替规则[15]

若$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，$\beta(x)\sim\beta'(x)$，且$\alpha(x)$和$\beta(x)$不等价，则$\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$。

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\neq-1$，则$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$

设$\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,\gamma'$自变量在同一变化过程中的无穷小量，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\gamma\sim\gamma'$，其中$\alpha,\beta$不等价，且$\lim\frac{\alpha'\pm\beta'}{\gamma'}$存在，$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=k\neq\pm1$，则$\lim\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}$也存在，且$\lim\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}=\lim\frac{\alpha'\pm\beta'}{\gamma'}$。

例 2.5.2 求解$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$。

解：由于$\tan 2x\sim 2x,\sin x\sim x$且$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x}{(1-\tan^2 x)\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(1-\tan^2 x)\cos x}=2\neq1$，即$\tan 2x$与$\sin x$不等价。

由和差代替规则可知，$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x-x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\sqrt{1+x}+1=2$。

这里需要注意，如果$\alpha\sim\beta$，结论未必成立。

例 2.5.3 求解$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$。

错误解法：$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{\sin^3 x}=0$。

正确解法：由于$\tan x\sim\sin x$，因此不能使用和差代替规则。

$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$.

因为$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sin^3 x\sim x^3$，由代换定理

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

3) 因式代替规则

若$\alpha\sim\beta$且$\varphi(x)$极限存在或有界，则$\lim_{x\to0}\alpha(x)\varphi(x)=\lim_{x\to0}\beta(x)\varphi(x)$。

例 2.5.4 求解$\lim_{x\to0}\arcsin x\cdot\sin\frac{1}{x}$。

解：由于$\arcsin x\sim x$，且$\sin\frac{1}{x}$有界。

故$\lim_{x\to0}\arcsin x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$。

3. 函数极限

3.1. 函数极限的定义

- **定义 1** ([14], P 46)

设函数$f\in[a,+\infty)$，A为定数。若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0(\geq a)$，s.t.当$x>M$时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当$x\to+\infty$时，$f(x)$以A为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{或} f(x)\to A(x\to+\infty).$$

- **定义 2** ([14], P 46)：($\varepsilon-\delta$ 定义)

  设函数 f 在点 x_0 的 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数。若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(<\delta')$，s.t.当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

  则称当 x 趋近于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} f(x)\to A(x\to x_0).$$

- **定义 3** ([14], P 46)

  设函数 f 在 $U_{+}^{\circ}(x_0;\delta')$ (或 $U_{-}^{\circ}(x_0;\delta')$)上有定义，$A$ 为定数，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(<\delta')$，s.t.当 $x_0<x<x_0+\delta$ (或 $x_0-\delta<x<x_0$)时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

  则称 A 为函数 f 当 $x\to x_0^+$ (或 x_0^-)时的右(左)极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\ (\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A)\text{或} f(x)\to A(x\to x_0^+)\ (f(x)\to A(x\to x_0^-))。$$

3.2. 函数极限的基本性质

1) 唯一性：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则该极限唯一。

2) 局部有界性：若函数极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 $U^{\circ}(x_0)$ 内有界。

3) 局部保号性：若函数极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$ (或者<0)，则对任意正数 $r<A$ (或 $r<-A$)，存在 $U^{\circ}(x_0)$，使得对一切 $x\in U^{\circ}(x_0)$，有 $f(x)>r>0$ 或 $f(x)<-r<0$。

4) 函数极限与数列极限之间的关系：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，设 $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内，任意以 x_0 为极限的数列，且满足 $x_n\neq x_0$，则函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim_{x\to x_0} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)$。

注：上述函数极限的性质对 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\pm\infty$ 均成立。

4. 等价无穷小在求函数极限中的应用

例 4.1 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\tan x}-\sqrt{1+2\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$。

解：原式 $=2\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+2\tan x}+\sqrt{1+2\sin x}}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2\tan x}+\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}。$$

由于当 $x\to 0$，有 $\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)-x\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，

故原式 $=1\cdot 1\cdot(-1)=-1$。

解题思路：含有根式函数的极限，求导较为复杂的情况下，可考虑先有限化，然后再用四则运算，等价无穷小及洛必达法则求极限。

例 4.2 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{\arcsin^3 x}$。

解：原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}\left(e^{x-\tan x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$。

解题思路： 此题是 $\dfrac{0}{0}$ 型，但不适合直接用洛必达法则，而是先将分子提出非重心因子，再通过无穷小等价，简化后用洛必达法则计算。

例 4.3 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-1}{\ln(3-2\cos x+\sin x)}$。

解：当 $x\to 0$，$\sqrt[4]{1+4x}-1\sim x$，

$\ln(3-2\cos x+\sin x)=\ln\left[1+(2-2\cos x+\sin x)\right]\sim 2-2\cos x+\sin x\sim \sin x\sim x$，

故原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$。

解题思路： 用等价无穷小简化计算。

例 4.4 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$。

解：由于 $\sqrt{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\sim 1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4$，$\cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}$，$e^{x^2}\sim 1+x^2$，$\sin x^2\sim x^2$

故 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}=\dfrac{\dfrac{1}{8}x^4}{-\dfrac{3}{2}x^2\cdot x^2}=-\dfrac{1}{12}$。

解题思路： 将式子拆分称若干个等价无穷小的和差，再用等价无穷小替换规则求函数极限。

例 4.5 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$。

解：由于当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$，且该项为乘积因子，因此这里可以使用等价无穷小替换，将原式化成 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)x}$，然而题目中并没有其他有关的常见等价无穷小，此时我们使用洛必达法则。

原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1-x}{x-\tan x+x\left(1-\sec^2 x\right)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1-x}{x-\tan x-x\tan^2 x}$

由于 $\tan^2 x\sim x^2$，且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1+\tan^2 x\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}\neq 1$，

即 $x-\tan x$ 与 $\tan^2 x$ 不等价，由和差取代规则

$$\text{故原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x-\tan x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{1-\sec^2 x-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{-\tan^2 x-3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{-4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(-2\sin x)}{-8x}=\frac{1}{4}。$$

解题思路：等价无穷小替换法则在求解函数极限的时候是非常方便有效的，但是很多题目并不一定完全适用，因此，有时我们会将其同其他求函数极限的方法联合使用，例如我们最熟悉的洛必达法则。

5. 等价无穷小在求不同函数极限中的应用

5.1. 不定式极限函数

- $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限函数

定理 1 [15]：假设在同一极限的过程中，α 和 β 是无穷小量，且 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则能够得到 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$。这个定理可以证明对于 $\frac{0}{0}$ 未定式能够进行等价无穷小替换来求极限值。

注：这样的替换只有在分子或分母只含函数的乘积的情况下，方可使用乘积因子的等价无穷小来替换各个乘积因子，在分子或分母是代数和的情况下不能轻易使用等价无穷小替换。

例 5.1.1 求解 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$。

解：因为 $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2}-1=0$，$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，故此极限为 $\frac{0}{0}$ 型。

由于当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{2}x^2$，且 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

故原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1$。

- 0^0 型不定式极限函数

引理[12]：设 $\alpha > 0$，$\alpha' > 0$ 为某变化过程中的无穷小。若 $\alpha \sim \alpha'$，则 $\frac{1}{\ln\alpha} \sim \frac{1}{\ln\alpha'}$。

定理 2 [12]：设 $\alpha > 0$，$\alpha' > 0$ 和 β，β' 均为某变化过程中的无穷小。若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$ 且 $\lim \alpha'^{\beta'} = A$，则有 $\lim \alpha^{\beta} = \lim \alpha'^{\beta'} = A$。

这说明，当 $\lim \alpha'^{\beta'} = A$ 时，$\lim \alpha'^{\beta'}$ 中的 α, β 可代换为等价无穷小 α', β'。

例 5.1.2 求解 $\lim_{x\to 0^+} (2-2\cos x)^{\sin x}$。

解：由于 $2-2\cos x \sim x^2$，$\sin x \sim x$，故本题为 0^0 型。

原式 $= \lim_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x\cdot\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{2x}\right)'}} = e^0 = 1$。

- ∞^0 型不定式极限函数

∞^0 型的极限可以写成 $\lim\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta} = \lim \frac{1}{\alpha^{\beta}}$，其中 $\alpha > 0$ 和 β 均为某变化过程中的无穷小。

定理 3 [12]：设 $\alpha > 0$，$\alpha' > 0$ 和 β，β' 均为某变化过程中的无穷小。若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^{\beta'} = A$，则 $\lim\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta} = \lim\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^{\beta'} = A$。

这说明当 $\lim\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^{\beta'} = A$ 时，$\lim\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^{\beta'}$ 中的 α, β 可代换为等价无穷小 α', β'。

例 5.1.3 求解 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\ln(x+1)}$。

解：由 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{\sin x}\to\infty$，$\ln(x+1)\to 0$，此题为 ∞^0 型。

当 $x\to 0$，$\sin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$

故 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}x\ln\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$。

- **1^∞ 型不定式极限函数**

1^∞ 型的极限可写成 $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$，其中 α 和 β 均为某变化过程中的无穷小。

引理 [12]：设 α 和 β 均为某变化过程中的无穷小。若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A$，则有 $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\mathrm{e}^{\lim\frac{\alpha}{\beta}}=\mathrm{e}^A$。

定理 4 [12]：设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 均为某变化过程中的无穷小。若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A$，则有 $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim(1+\alpha')^{\frac{1}{\beta'}}=\mathrm{e}^A$。

这说明当 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A$ 时，$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ 中的 α,β 可代换为等价无穷小 α',β'。

例 5.1.4 求解 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$。

解：当 $x\to 0$ 时，$\frac{1+\sin x}{1+x}\to 1$，$\frac{1}{x^3}\to\infty$，故极限呈 1^∞ 型。

由引理可知 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+\sin x}{1+x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{1+x}\right)\cdot\frac{1}{x^3}}$。

又因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{1+x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$。

故原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$。

5.2. 积分函数

定理 5 [8]：若 $\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$，且 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 连续，则 $\int_{x_0}^{x}\alpha(t)\mathrm{d}t\sim\int_{x_0}^{x}\beta(t)\mathrm{d}t$。

例 5.2.1 求解 $\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)\arctan x}{\int_0^x(\arcsin t-t)\mathrm{d}t}$。

解：由于当 $x\to 0$ 时 $x-x\sim\frac{1}{6}x^3$，$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$，$\arctan x\sim x$。

故，$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)\arctan x}{\int_0^x(\arcsin t-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4}{\int_0^x\frac{1}{6}t^3\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4}{\frac{1}{24}x^4}=-8$。

解题思路：显然这题使用洛必达法计算会将过程复杂化，甚至可能求不出答案。然而如果经过观察发现式子中的常见等价无穷小，利用定理进行计算，会事半功倍，大大节约了计算成本。

5.3. 变上限积分函数

定理 6 [2]：假定在 $x\to 0$ 的过程中 $\alpha(x)$ 是无穷小量，且 $\beta(x)$，$\gamma(x)$ 都是该过程的无穷小量，且 $\beta(x)\sim\gamma(x)$，则当 $x\to 0$ 时，有 $\int_0^{\alpha(x)}\beta(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^{\alpha(x)}\gamma(t)\mathrm{d}t$。

$$\int_0^x t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \sin t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \tan t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \arcsin t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \arctan t\mathrm{d}t \sim \int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x \mathrm{e}^t - 1\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}x^2 .$$

例 5.3.1 求解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\left(t-\ln(1+t)\right)\mathrm{d}t}{\int_0^{\arcsin x}(\sin t - t)\mathrm{d}t}$。

解：由题可知，此题为变上限积分函数求极限，由于在 $x\to 0$ 的过程中是 $1-\cos x$ 和 $\arcsin x$ 均为无穷小量，且 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$， $\arcsin x \sim x$，此外积分项也为可使用等价无穷小替换， $x-\ln(1+x)\sim \frac{1}{2}x^2$， $\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$。

因此，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\left(t-\ln(1+t)\right)\mathrm{d}t}{\int_0^{\arcsin x}(\sin t - t)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t}{\int_0^{\arcsin x}-\frac{1}{6}t^3\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}(1-\cos x)^3}{\frac{-1}{24}\arcsin^4 x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3}{\frac{-1}{24}x^4} = 0$。

5.4. 幂指数函数

定理 7 [16]：假设在 $x = x_0$ 的去心领域中， $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是连续的， $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = A$， $\alpha(x) > 0$， $\lim_{x\to x_0}\beta(x) = B$。则 $\lim_{x\to x_0}\left[\alpha(x)\right]^{\beta(x)} = A^B$。

定理 8 [17]：假设在 $x = x_0$ 的去心领域中，$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是连续的，$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim\left[a(x)\right]^{\beta(x)}$ 存在，则 $\lim\left[a'(x)\right]^{\beta'(x)} = \lim\left[a(x)\right]^{\beta(x)}$。

例 5.4.1 求解 $\lim_{x\to 0}(\tan x - \sin x)^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$。

解：当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 连续，且 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$， $\tan x - \sin x$ 连续，且 $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$， $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{2}\right)^x$ 存在。

故由定理 8 可知： 原式 $= \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3}{2}\right)^x = \lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\cdot\ln x^3}}{2^x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{(3\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = 1$。

推论 1 [17]：假设在 $x = x_0$ 的去心领域中， $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是连续的， $\alpha(x) > 0$， 在 $x\to x_0$ 时， $\beta(x)\sim\beta'(x)$， 且 $\lim_{x\to x_0}\left[a(x)\right]^{\beta(x)}$ 存在， 则 $\lim_{x\to x_0}\left[\alpha(x)\right]^{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\alpha(x)\right]^{\beta'(x)}$。

例 5.4.2 求解 $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{\arcsin x}}$。

解：由于本题属于 $\lim\left[a(x)\right]^{\beta(x)}$ 题型，且 $\beta(x)$ 可以找到在同一自变量变化过程中的等价无穷小，因此使用上述定理进行求解。

由于当 $x\to 0$ 时， $\arcsin x \sim x$， 因此

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{\arcsin x}} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$$

这里我们使用重要的极限公式 $\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$。

故原式 $= \lim_{x\to 0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^5 = \mathrm{e}^5$。

推论 2 [17]：假设在 $x = x_0$ 的去心领域中， $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是连续的， $\alpha(x) > 0$， 在 $x\to x_0$ 时，

$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，且 $\lim[a(x)]^{\beta(x)}$ 存在，则 $\lim_{x\to x_0}[\alpha(x)]^{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}[\alpha'(x)]^{\beta(x)}$。

例 5.4.3 求解 $\lim_{x\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x$。

解：显然本题为幂指数函数题型，因为在 $x\to\infty$，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$。

因此，结合定理和重要极限公式求得，原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

定理 9 [1]：设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同一自变量趋近过程的无穷小，且 $\lim f(x)=1$，$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，$\beta(x)\sim\beta'(x)$，若 $\lim\frac{f(x)-1}{\beta(x)}=A$，$\lim[\alpha'(x)+1]^{\frac{1}{\beta'(x)}}=B$，则 $\lim[\alpha(x)+f(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=B\mathrm{e}^A$。

特别地，当 $\lim\frac{f(x)-1}{\beta(x)}=0$ 时，$\lim[\alpha(x)+f(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[\alpha'(x)+1]^{\frac{1}{\beta'(x)}}$。

例 5.4.4 求解 $\lim_{x\to 0}\left(\arcsin\frac{x}{2}+\mathrm{e}^{x^2}\right)^{\frac{1}{\arctan x}}$。

解：因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}=0$，且 $\arcsin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$，$\arctan x\sim x$，$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x^2}=1$，

故原式 $=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{2}+1\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+1\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

5.5. 函数增量与自变量增量的比值

定理 10 [1]：设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，若 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha'}=f'(x_0)$。

例 5.5.1 已知 $f'(a)=2$，计算 $\lim_{x\to 0}\frac{f(a+\tan^2 x)-f(a)}{2-2\cos x}$。

解：根据题意，该形式为函数增量与自变量增量的比值，且 $\tan^2 x\sim x^2$，$2-2\cos x\sim x^2$，由等价无穷小量的传递性可知：$\tan^2 x\sim 2-2\cos x$，根据定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(a+\tan^2 x)-f(a)}{2-2\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+\tan^2 x)-f(a)}{\tan^2 x}\cdot\frac{\tan^2 x}{2-2\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+\tan^2 x)-f(a)}{\tan^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2-2\cos x}.\end{aligned}$$

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(a+\tan^2 x)-f(a)}{\tan^2 x}=f'(a)$

故原式 $=f'(a)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2-2\cos x}=f'(a)\cdot 1=2$。

5.6. 无穷小乘以无穷大

定理 11 [1]：设 α 和 β 分别为 $x\to x_0$ 的无穷小量和无穷大量，$\alpha\sim\alpha'$，若极限 $\lim_{x\to x_0}\alpha'\beta$ 存在，则 $\lim_{x\to x_0}\alpha\beta=\lim_{x\to x_0}\alpha'\beta$。

例 5.6.1 求解 $\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$。

解：由于 x 为 $x\to\infty$ 的无穷大量，而 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ 为 $x\to\infty$ 的无穷小量，因此，本题为无穷小乘以无穷大题。已知 $\ln(1+x)\sim x$

因此，$\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\ln\left[1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\sim\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1$

由此可知，原式 $=\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$。

又因为 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2x}$，

故原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$。

5.7. 复合函数

定理 12 [18]：若设 $y=f(u)$ 与 $u=\alpha(x)$ 构成复合函数 $y=f[\alpha(x)]$。若 $\lim_{u\to u_0} f(u)=0$，$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0(x\neq 0)$，且 $f(u)\sim u$，则当 $\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to 0)$ 时有 $f[\alpha(x)]\sim f[\beta(x)]$。

例 5.7.1 求解 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\arcsin x}-1}{\ln(1+\arctan 2x)}$。

解：因为当 $x\to 0$ 时，$u=\arcsin x$，$f(u)=\mathrm{e}^u-1\sim u$，$\arcsin x\sim x$，因此，有 $f(\arcsin x)\sim f(x)$。当 $x\to 0$，$u=\arctan 2x$，$g(u)=\ln(1+u)\sim u$，$\arctan 2x\sim 2x$，所以有 $g(\arctan 2x)\sim f(2x)$。

故原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$。

定理 13 [6]：设 $y=f(u)$ 与 $u=\alpha(x)$ 构成复合函数 $y=f[\alpha(x)]$。若 $\lim_{u\to u_0} f(u)=\infty$，$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0(x\neq 0)$，且 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则有 $\lim_{x\to 0} f[\alpha(x)]=\lim_{x\to 0} f[\beta(x)]=\infty$。

例 5.7.2 求解 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 9x}{\ln\tan 2x}$。

解：$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 9x}{\ln\tan 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 9x}{\ln 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{9}{9x}}{\frac{2}{2x}}=1$。

定理 14 [6]：设 $y=f(u)$ 与 $u=\alpha(x)$ 构成复合函数 $y=f[\alpha(x)]$。若 $\lim_{u\to u_0} f(u)=0$，$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0(x\neq 0)$，且 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则有 $\lim_{x\to 0} f[\alpha(x)]=\lim_{x\to 0} f[\beta(x)]=0$。

例 5.7.3 求解 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\tan 9x)}{\sin(\tan 2x)}$。

解：原式 $=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 9x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{9x}{2x}=\frac{9}{2}$。

6. 结论与建议

6.1. 结论

在函数极限求解的过程当中，初学者对函数极限求解的方法，有着难以选择的问题，因为求解函数极限的方法众多，例如，洛必达法则、变量代换法、极限存在准则、等价无穷小替换、几个重要极限的公式、点导数、Taylor 公式等等。通常情况，如果直接求解会使得运算变得复杂，因此笔者在此提供等价无穷小的方法供初学者进行学习，牢记常用等价无穷小及等价无穷小代换法则及其在不同函数极限中的定理。需要注意的是定理使用的条件切不可忽视，例如在等价无穷小代换定理中，两无穷小量相减的规则要求二者极限之比不为 1，即二者不等价；同时也需要注意在利用等价无穷小求极限的时候判断等价无穷小是否存在，否则将会得到错误的答案，最终将前功尽弃。

此外，在一些情况下，我们可以将各种求解函数极限的方法进行联合使用，从而使计算过程大大简化。例如使用等价无穷小代换法则和洛必达法则进行求解，或联合使用等价无穷小代换法则和重要的极限公式进行求解等等，而非刻板地只用一种方法。只要条件符合，结合各种方法能使我们游刃有余地解决函数极限的各种问题。

6.2. 不足与展望

等价无穷小在求解函数极限的问题中的应用发挥着重要的作用。虽然前人对等价无穷小的研究已经很深入，但在解题中的应用仍未完全发现、挖掘和完善，因此值得我们继续研究。本文的不足之处在于无法对等价无穷小在函数极限中的应用进行更深入地思考和推广，这也将激励研究者不断探索和发现等价无穷小在函数极限中的奥妙。

基金项目

国家自然科学基金(12001117)、广州科技计划项目(202102020438)资助。

参考文献

[1] 张辉, 李应岐, 敬斌, 等. 等价无穷小在求函数极限中的应用[J]. 数学学习与研究, 2015(23): 93.
[2] 祝安. 等价无穷小在求函数极限中的应用及推广[J]. 课程教育研究, 2017(14): 146-147.
[3] 陈大桥. 等价无穷小代换在求极限中的常见应用及推广[J]. 成都师范学院学报, 2014, 30(5): 117-119.
[4] 马艳丽, 聂东明. 等价无穷小替换在求极限中的应用及推广[J]. 玉溪师范学院学报, 2017, 33(4): 15-19.
[5] 张辉, 李应岐, 方晓峰. 谈等价无穷小在求极限中的应用[J]. 科技资讯, 2015, 13(29): 122-123.
[6] 杨子兰, 李睿, 杨惠娟. 等价无穷小量替换法在复合函数极限中的应用[J]. 湘南学院学报, 2018, 39(5): 16-19.
[7] 陈飞翔. 等价无穷小在函数极限中的应用与推广[J]. 科教导刊: 电子版, 2017(8): 138.
[8] 关鈺淋. 利用等价无穷小代换法求极限札记[J]. 科教导刊, 2018(21): 30-31.
[9] 楼向东. 如何利用等价无穷小代换求函数极限[J]. 计算机产品与流通, 2019(2): 214.
[10] 金亚东, 朱鹏. 无穷小在求极限中的若干应用[J]. 信息系统工程, 2018(3): 86-87.
[11] 肖志涛. 等价无穷小代换在极限运算中的推广[J]. 高等数学研究, 2021, 24(5): 30-32.
[12] 杨凤. 用等价无穷小代换求幂指函数的极限[J]. 科技视界, 2013(34): 197-198.
[13] 孙玉海. 等价无穷小在求复合函数极限中的应用[J]. 抚州师专学报, 2001(3): 11-13.
[14] 华东师范大学数学系. 数学分析上册[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[15] 杨淑娥. 论等价无穷小代换在极限计算中的应用[J]. 徐州工程学院学报: 社会科学版, 1996(3): 101-104.
[16] 郭艳鹂, 刘妮. 幂指函数初探[J]. 高等数学研究, 2021, 24(1): 18-20.
[17] 杨金远, 刘丽波. 等价无穷小在幂指函数极限中的应用[J]. 吉林化工学院学报, 1994, 11(2): 72-74.
[18] 陈新明. 用等价无穷小代换求极限中的一些问题[J]. 高等数学研究, 2008, 11(5): 56-56, 58.