

平面图和不含 K_5 -子式图的弱退化度

丁萧萧

浙江师范大学, 数学与计算机科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2022年6月19日; 录用日期: 2022年7月14日; 发布日期: 2022年7月21日

摘要

图的弱退化度是由Bernshteyn 和Lee 提出的一个新定义, 是图的退化度的变形。根据定义可知, 每个 d -退化的图也是 d -弱退化的。另一方面, 如果 G 是弱退化的, 那么 $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq d + 1$ 。在这篇论文中, 我们证明了不含 K_5 -子式的图是 4-弱退化的; 不含4-圈的平面图是 3-弱退化的; 不含4-圈与3-圈相邻的平面图是3-弱退化的。

关键词

退化度, 弱退化度, 平面图, 圈长, 权转移

Weak Degeneracy of Planar Graphs and K_5 -Minor-Free Graphs

Xiaoxiao Ding

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jun. 19th, 2022; accepted: Jul. 14th, 2022; published: Jul. 21st, 2022

Abstract

Weak degeneracy of graphs is a new definition proposed by Bernshteyn and Lee. It

is the deformation of the degeneracy of graphs. By definition, every d -degenerate graph is also weakly d -degenerate. On the other hand, if G is weakly d -degenerate, then $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq d + 1$. In this paper, we prove that planar graphs with K_5 -minor-free are weakly 4-degenerate, planar graphs without 4-cycles are weakly 3-degenerate and planar graphs without 4-cycles adjacent to 3-cycles are weakly 3-degenerate.

Keywords

Degeneracy, Weak Degeneracy, Planar Graphs, The Length of Cycles, Discharging

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本篇文章中所有的图都是有限简单图. G 的一个 k 顶点染色是指 k 种颜色 $1, 2, \dots, k$ 对于 G 的各顶点的一个分配; 如果任意两个相邻的顶点都分配到不同的颜色, 那么我们称该染色是正常的. 当 G 有一个正常 k 顶点染色时, 就称 G 是 k 可染的. 图 G 的色数 $\chi(G)$ 是指 G 可染的数 k 的最小值.

列表染色是图顶点染色的一种推广. 1976 年, Vizing [1] 首次介绍了图的列表染色概念, 1979 年, Erdős, Rubin 以及 Taylor [2] 提出并推广了图的列表染色概念.

给图 G 的每一个顶点 v 指定一个颜色列表 $L(v)$. 如果对每一个顶点 $v \in V(G)$, 都存在一个颜色 $\varphi(v) \in L(v)$, 使得当 $xy \in E(G)$ 时, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, 那么我们称 G 是 L -可染的. 如果对任意指定的颜色列表 L , 使得对每个 $v \in V(G)$, 满足 $|L(v)| \geq k$, G 都存在一个 L -染色, 那么我们称 G 是 k -列表可染的. G 的列表色数, 用 $\chi_l(G)$ 表示, 是使得图 G 是 L -可染的最小的正整数 k . 显然, 对于任意的图 G , $\chi_l(G) \geq \chi(G)$.

DP -染色是列表染色的进一步推广, 在 2015 年, 为了证明不含 4-8 圈的平面图是 3-可选的, Dvořák 和 Postle [3] 引入了对应染色的概念(即: DP -染色). 在 2018 年, Bernshteyn 和 Kostochka [4] 提出了 DP -染色.

设 G 是具有 n 个顶点的简单图, L 是 $V(G)$ 的一个列表配置. 对于每条边 $uv \in E(G)$, 令 $L(u)$ 和 $L(v)$ 之间的一个匹配为 M_{uv} (不一定是完美匹配, 也可能是空的). 设 $\mathcal{M}_L = \{M_{uv} : uv \in E(G)\}$, H_L 是满足下面四个条件的图:

- 对于每一个点的 $u \in V(G)$, $L(u)$ 形成一个完全图;
- 对于每一个点的 $u \in V(G)$ 关联 H_L 中的一个点集 $L(u)$;
- 若 $uv \notin E(G)$, 那么 $L(u)$ 和 $L(v)$ 之间不含边;
- 若 $uv \in E(G)$, 那么 $L(u)$ 和 $L(v)$ 之间的边在 M_{uv} 中.

如果 H_L 是一个包含有 n 个元素的独立集, 那么图 G 有一个 \mathcal{M}_L -染色. 若对于 $u \in V(G)$, $[k] \subseteq L(u)$ 的任意匹配 \mathcal{M}_L , 它都有一个 \mathcal{M}_L -染色, 则称图 G 是 DP -可染的. G 的 DP -色数, 用 $\chi_{DP}(G)$ 来表示, 是使得图 G 是 DP -可染的最小正整数 k . 列表染色是 DP -染色的一种特殊情况, 若对于任意点 $u \in V(G)$, 列表配置 L' 满足 $|L'(u)| = k$. 我们可以在 $L'(u)$ 和 $[k]$ 之间建立一个双射. 对于每条边 $uv \in E(G)$, 令点 u 和点 v 之间的与 $L'(u)$ 和 $L'(v)$ 中的元素一一对应的颜色形成的一个匹配为 M_{uv} . 我们可以得知, 这个 \mathcal{M}_L -染色等价于一个 L' -染色. 因此, 对于任意的图 G , $\chi_{DP}(G) \geq \chi_l(G)$.

在这篇文章中, 我们研究了图染色的贪婪算法. 基本的贪婪算法是每次只考虑 G 的一个顶点, 当我们考虑点 u 时, 从 $L(u)$ 中给它分配一个任意的颜色, 比如 α . 此时, 为了确保染色是正常的, 我们必须从 u 的邻居可用的颜色列表中移除 α . 因此, u 的每个邻居的列表大小可能会减少1, 而其它所有列表保持不变. 如果在整个过程中没有一个点的列表大小减少到0 (即每个未染色的顶点总是至少有一种可用的颜色), 那么我们就得到了 G 的一个正常染色. 这个想法引出了退化度的概念.

定义1.1 设 G 是一个图, $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ 为一个函数, 对于点 $u \in V(G)$, “删除”操作 (G, f, u) 得到了图 $G' := G - u$, 函数 $f': V(G') \rightarrow \mathbb{Z}$ 由下面式子给出

$$f'(v) := \begin{cases} f(v) - 1, & \text{如果 } uv \in E(G); \\ f(v), & \text{其它情况.} \end{cases}$$

如果最终得到的函数 f' 是非负的, 即对任意的 $v \in V(G')$, 都有 $f'(v) \geq 0$, 那么我们称该“删除”操作是有效的. 如果我们可以通过一系列有效的“删除”操作去掉 G 中所有的点, 那么我们称图 G 是 f -退化的.

图的 DP -染色和列表染色一个区别是: 在列表染色中, 如果 n 是偶数, 那么 $\chi_l(C_n) = 2$, 如果 n 是奇数, 那么 $\chi_{DP}(C_n) = 3$. 但在 DP -染色中, 对于所有的 $n \geq 3$, 都有 $\chi_{DP}(C_n) = 3$. 因此, 我们考虑是否可以修改贪婪染色过程来“保存”一些颜色, 得到 $\chi_{DP}(G)$ 的一个更好的界限. 这是很有趣的, 因此, 我们研究一种简单但却很强大的方法.

考虑点 $u \in V(G)$, 设 w 是它的邻居. 一般来说, 如果我们给 u 染一种颜色 c , 那么 w 可能会失去颜色 c . 但是, 假设 $|L(u)| > |L(w)|$, 即严格来说 u 的可用颜色比 w 多. 在这种情况下, $L(u)$ 中一定有一种颜色不出现在 $L(w)$ 中, 并且这种颜色分配给 u 并不会影响 $L(w)$ (当然, u 的其它邻居可能仍然会失去一种颜色). 通过这种方式, 我们为 w “保存”了一种额外的颜色. Bernshteyn 和 Lee [5] 提出了以下定义:

定义1.2 设 G 是一个图, $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ 为一个函数, 对于一对相邻的点 $u, w \in V(G)$, “删

除保存”操作 (G, f, u, w) 得到了图 $G' := G - u$, 函数 $f' : V(G') \rightarrow \mathbb{Z}$ 由下面式子给出

$$f'(v) := \begin{cases} f(v) - 1, & \text{如果 } uv \in E(G), v \neq w; \\ f(v), & \text{其它情况.} \end{cases}$$

如果 $f(u) > f(w)$ 且最终得到的函数 f' 是非负的, 那么我们称该“删除保存”操作是有效的. 如果我们可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点, 那么我们称图 G 是 f -弱退化的. 给定 $d \in \mathbb{N}$, 如果 $f = d$, 那么我们称 G 是 d -弱退化的. G 的弱退化度, 记作 $wd(G)$, 是使得 G 是 d -弱退化的最小的 d 值.

给定一个集合 $S \subseteq V(G)$, 如果从 (G, f) 开始, 使得 S 中的点仅通过有效的“删除”操作去掉, 而其它点可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉, 那么我们称 G 是“保 S - f -弱退化的”. 特别地, G 是“保 S - f -弱退化的”当且仅当 G 是 f -退化的.

Bernshiteyn 和 Lee [5] 证明了以下命题:

命题1.3 [5] 对任意图 G , 都满足

$$\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq \chi_{DPP}(G) \leq wd(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

这里 $\chi_{DP}(G)$ 表示 G 的 DP -色数, $\chi_{DPP}(G)$ 表示 G 的 DP -在线色数.

在[5]中, 作者证明了Brooks定理的弱退化版本: 如果 G 是一个最大度 $\Delta \geq 3$ 的连通图, 那么 G 是 $(\Delta - 1)$ -弱退化的或者 $G \cong K_{\Delta+1}$. 我们知道, GDP树是一个连通图, 每个块是一个完全图或者一个圈. 在[5]中作者证明了令 G 是一个连通图, 那么下面两条是等价的: (1) G 是 $(d - 1)$ -弱退化的; (2) G 不是一个GDP树. 作者还证明了令 G 是一个非空图, 如果 G 的弱退化度至少为 $d \geq 3$, 那么 G 包含一个 $(d + 1)$ -团或者

$$mad(G) \geq d + \frac{d - 2}{d^2 + 2d - 2}.$$

事实证明, 使用“删除”和“删除保存”操作的方法可以证明几个非平凡的上界. 1994年, Thomassen [6] 证明了所有的平面图是5-可选的; 2015年, Dvořák 和 Postle [3] 证明了所有的平面图是 DP -5-可染的; 2021年, Bernshiteyn 和 Lee [5] 提出了弱退化度的概念, 再次把这一结果进行加强, 他们证明了所有的平面图是4-弱退化的.

Škrekovski [7] 证明了不含 K_5 -子式的图是5-可选的; 后来, Shen [8] 等人给出了另一种方法证明不含 K_5 -子式的图是5-可选的; Wang [9] 等人证明了不含 K_5 -子式的图是 DP -5-可染的. 我们加强该结果, 证明如下定理:

定理1.4 所有不含 K_5 -子式的图是4-弱退化的.

Lam [10] 等人证明了不含4-圈的平面图是4-可选的; Kim 和 Ozeki [11] 证明了不含4-圈的平面图是 DP -4-可染的. 下面将该结果推广到这类图也是3-弱退化的.

定理1.5 不含4-圈的平面图是3-弱退化的.

Wang [12] 等人证明了不含 4-圈与3-圈相邻的平面图是 4-可选的; Kim 和 Yu [13] 证明了不含 4-圈与3-圈相邻的平面图是 DP-4-可染的. 我们改进了这个结果, 证明下面定理:

定理1.6 不含4-圈与3-圈相邻的平面图是3-弱退化的.

将 G 嵌入到一个平面中, 我们得到一个平面图 $G = (V, E, F)$, 其中 V, E, F 分别表示 G 的顶点、边和面的集合. 对于一个集合 $S \subseteq V(G)$, $G[S]$ 表示由 S 诱导的 G 的子图. 对于点 $v \in V$, v 在 G 中的度数表示为 $d_G(v)$, 度为 d (至少为 d 或至多为 d) 的点称为 d -点 (d^+ -点或 d^- -点). 符号 d -面, d^+ -面, d^- -面也类似定义. 对于面 $f \in F$, 如果 f 边界上的点按照顺时针顺序 v_1, v_2, \dots, v_k 排列, 那么我们记作 $f = [v_1 v_2 \dots v_k v_1]$, 并且称 f 为一个 $(d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_k))$ -面. 图 G 的最小度和最大度分别为 $\delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in V(G)\}$ 和 $\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in V(G)\}$. 如果两个面(圈)至少有一条公共边, 那么它们是相邻的. 如果两个面(圈)相邻且恰好有一条公共边, 则我们称它们是正常相邻的. 对于平面图 G 中的圈 C , 如果圈 C 的内部和外部都含有 G 中的点, 那么我们称圈 C 为 G 的一个分离圈. 收缩一条边, 我们指的是从图中删掉这条边, 同时把这条边的端点粘在一起. 如果通过收缩 G 的某些边和(或者)删除点和边得到的图中, 可以形成一个同态于 H 的图, 那么我们称 H 为 G 的一个子式. 如果 H 不是 G 的一个子式, 那么 G 称为不含 H -子式. 设 x 和 y 为 G 中两个不同的点. 如果在 G 中 x 和 y 是不相邻的, 我们用 $G + xy$ 表示在 G 中把 xy 连接起来而得到图. $G - v$ 表示在 G 中删掉点 v 和所有与其关联的边得到的图.

2. 不含 K_5 -子式的图

平面三角剖分是一种嵌入式平面图, 它的每个面都以一个长度为3的圈为界, 近似三角剖分图也是一种嵌入式平面图, 其中每个有界面以一个三角形为界, 无界面(外部面)以一个圈为界. 两个图 G_1 和 G_2 的 ℓ -和是指 $G = G_1 \cup G_2$ 且 $G = G_1 \cap G_2 = K_\ell$.

Wagner 图[14] (见图 1)一个有8个顶点, 12条边的3正则图. 注意到该图是非平面图, 因此, 它不能是平面图子图. 不含 K_5 -子式的极大边的图 G 指它本身不含 K_5 -子式, 但是对于 G 中任意两个不相邻的顶点 x 和 y , $G + xy$ 包含一个 K_5 -子式.

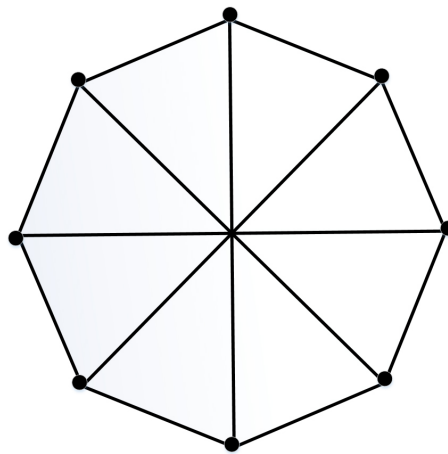


Figure 1. Wagner graph

图 1. Wagner 图

定理2.1 (Wagner [14]) 每个不含 K_5 -子式的极大边的图都可以通过Wagner 图和平面三角剖分图的2-和与3-和不断粘连而成.

定理2.2 [5] 设 G 是一个至少有3个点的平面图, 其中每个非外部的面都是三角形, 且外部的面是一个 k 长的圈 C , C 边界上的点按照顺时针顺序 v_1, v_2, \dots, v_k 排列. 定义 $f: V(G) \setminus \{v_1, v_2\} \rightarrow \mathbb{Z}$ 为

$$f(u) := \begin{cases} 2 - |N_G(u) \cap \{v_1, v_2\}|, & \text{如果 } u \in V(C); \\ 4 - |N_G(u) \cap \{v_1, v_2\}|, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

那么 $G - v_1 - v_2$ 是“保 $(V(G) \setminus \{v_1, v_2\})$ - f -弱退化的”.

引理2.3 设 G 是一个近似三角剖分的图, f 为 G 的一个常函数, 并且对任意 $v \in V(G)$ 均满足 $f(v) = 4 - |N_G(v) \cap \{v_1, v_2\}|$. 假设 H 为 G 的一个同态于 K_3 的子图, λ 是 H 中所有点的一个序列, 使得在这个序列下可以经过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 H 中所有的点. 那么我们可以在这个序列基础上修改成一个新的序列, 使得在此序列下可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点. 即 G 是4-弱退化的.

证明 采用反证法, 假设这个引理是错误的, 令 G 是一个点数最少的极小反例. 我们假设 $H \simeq K_3$ 和 $V(H) = (u, v, w)$.

情况1: H 不是 G 的一个分离3-圈. 由于 G 是一个近似三角剖分图, 我们可以重新画出该图, 使得 H 是 G 的外部的面. 注意到 $G' = G - w$ 也是近似三角剖分图, 先给 H 上的点 w 排序, 如果 x 和 w 是相邻的, 令 $f'(x) = 3 - |N_G(x) \cap \{u, v\}|$. 其他情况下, 都有 $f' = f$. 根据定理2.2, 可以在 u, v 的序列基础上修改成图 G 的一个序列, 使得在这个序列下可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点, 从而完成了引理的证明.

情况2: H 是 G 的一个分离3-圈. 令 G_1 表示所有点和边在 H 的内部或 H 上的一个图, G_2 表示所有点和边在 H 的外部或 H 上的一个图. 类似于上述证明, 我们可以在 H 的序列 λ 基础上修改成 G_1 的一个序列, 同样修改成 G_2 的一个序列. 结合两者, 我们得到了 G 的一个序列, 使得在这个序列下, 可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点. 因此 G 是 f -弱退化的, 引理2.3证毕.

引理2.4 设 G 是一个含有极大边的不含 K_5 -子式的图, 且对任意 $u \in V(G)$, $f(u) = 4 - |N_G(u) \cap \{v_1, v_2\}|$. 假设 H 是 G 的一个同态于 K_2 或者 K_3 的子图, λ 是 H 中所有点的一个序列, 使得在这个序列下可以经过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 H 中所有的点. 那么我们可以在这个序列基础上修改成图 G 的一个序列, 使得通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点. 即由 H 是 f -弱退化的可以得到图 G 是 f -弱退化的.

证明 我们对 $|V(G)|$ 作归纳来证明该引理, 如果 G 是近似三角剖分图, 那么这个结果可以直接从引理2.3得到. 如果 $H = y_1y_2$, 我们可以假设 y_1y_2 邻接于一个3-面 $[y_1y_2y_3]$, 那么显然在 H 的序列基础上可以修改成 $G' = [y_1y_2y_3]$ 的一个序列. 从而该问题可以简化为引理2.3的情况.

如果 G 是Wagner图, 那么显然 G 是 f -弱退化的.

假设 G 既不是一个平面三角剖分也不是Wagner图, 在这种情况下, 由Wagner定理[14]可以得出 $G = G_1 \cup G_2$, 其中 G_1, G_2 是 G 的子图, 满足 $G_1 \cap G_2 \simeq K_2$ 或者 K_3 . 显然, $H \subseteq G_1$ 或 G_2 . 不妨设

$H \subseteq G_1$, 在 G_1 上应用归纳假设, 在 H 的序列基础上可以修改成 G_1 的一个序列, 这产生了 $G_1 \cap G_2$ 的一个序列. 在 G_2 上应用归纳假设, 可以将 H 在 $G_1 \cap G_2$ 的序列基础上修改成 G_2 一个序列. 这就产生了 G 的一个序列, 且在这个序列下, 可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点, 因此 G 是 f -弱退化的. 引理2.4 证毕.

定理1.4 所有不含 K_5 -子式的图是 4-弱退化的.

证明 由于每个不含 K_5 -子式的图是一个含有极大边的不含 K_5 -子式图的生成子图, 因此, 我们只需要证明含有极大边的不含 K_5 -子式图的生成子图是 4-弱退化的即可. 我们可以首先给 G 中两个相邻的顶点排序, 根据引理2.4 可知, 我们可以在此基础上修改成图 G 的一个序列, 使得在这个序列下可以经过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 G 中所有的点. 定理 1.4 证毕.

3. 不含4-圈的平面图

定理4.1 对于 $k \in \{3, 5, 6\}$, 如果 G 是不含 k -圈的图, 那么 G 是 3-退化的.

证明 当 G 不含 3-圈时, G 的围长至少为 4. 我们可以直接从欧拉公式证明不含 3-圈的平面图是 3-退化的. Lih 和 Wang [15] 证明了不含 5-圈的平面图是 3-退化的. Mohar 和 Juvan [16] 等人证明了不含 6-圈的平面图是 3-退化的. 定理 4.1 证毕.

对于不含 4-圈的平面图, 存在这样的图 G 不是 3-退化的(例如考虑十二面体图的线图), 我们将证明不含 4-圈的平面图是 3-弱退化的. 不妨设不含 4-圈的平面图为 G , 在 [10] 中, 作者设 F_5^3 是由一个 5-圈和一个相邻的 3-圈组成的图. 即 $V(F_5^3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, 其中 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 形成了一个 6-圈, v_2v_6 为一条弦, 令 H 是 G 的一个子图, 如果 H 与 F_5^3 同构, 并且对于任意点 v 都满足 $d_G(v) = 4$, 那么 H 称为 F_5^3 子图.

引理4.2 [10] 设 G 是一个不含 4-圈且不含相邻 3-圈的平面图, 如果 $\delta(G) = 4$, 那么 G 包含一个 F_5^3 -子图.

定理1.5 不含 4-圈的平面图是 3-弱退化的.

证明 设 G 是一个极小反例, 即对于一个不含 4-圈的平面图 G , G 不是 3-弱退化的, 但是对于 G 的任意子图都是 3-弱退化的. 根据引理4.2, 我们知道 G 包含一个 F_5^3 -子图 H . 令 $G' := G - V(H)$, $f \leq 3$ 是 $V(G)$ 的一个常函数. 根据 G 的极小性, 我们可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 (G', f) 中的所有点. 现在我们考虑图 H , 首先“删除 v_6 保存 v_5 ”, 然后按照 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 的顺序“删除”剩下的点. 在此过程中这个“删除保存”和“删除”操作是有效的, 因此 H 也是 3-弱退化的. 这与我们选择的 G 矛盾, 定理1.5 得证.

4. 不含4-圈与3-圈相邻的平面图

定理1.6 不含 4-圈与 3-圈相邻的平面图是 3-弱退化的.

证明 假设定理不成立, 令 G 是一个点数最少的极小反例, 根据我们的假设, G 有下面的性质:

- (a) G 是连通图;

- (b) G 中没有同构于4-圈与3-圈相邻的子图;
- (c) G 不是3-弱退化的;
- (d) G 的每个子图 G' 是3-弱退化的.

引理4.1 G 中没有 3^- -点.

证明 假设 G 中存在一个 3^- -点 v , 那么我们将证明 G 是3-弱退化的. 令 f 是 $V(G)$ 上的常函数. 根据 G 的极小性, 我们可以通过一系列有效的“删除”和“删除保存”操作去掉 $(G - v, f)$ 中所有点. 由于 v 是一个 3^- -点, 我们只需要最后“删除”点 v 即可. 引理4.1 证毕.

接下来, 我们定义几个不同的5-面. 设 f 是 G 的一个5-面.

- (a) 如果 f 是一个 $(4,4,4,4,4)$ -面, 那么我们称 f 为小5-面. 如果 f 与一个3-面 $f' = [vv_1v_2v]$ 相邻, 其公共边为 v_1v_2 , 那么我们称 v 是 f 的一个源. 同样, 面 f 称为 v 的一个汇. (见图2中 F_1).
- (b) 如果 f 是一个 $(5^+, 4, 4, 4, 4)$ -面, 并且 f 与四个3-面和一个 4^+ -面相邻, 并且 4^+ -面与 f 上 5^+ -点关联, 那么我们称 f 为一个坏5-面. (见图2中 F_2).
- (c) 如果 f 是一个 $(5^+, 4, 4, 4, 4)$ -面, 并且 f 与五个3-面相邻, 那么我们称 f 为一个特殊5-面. 同时, 我们称 f 上的 5^+ -点为一个特殊顶点. (见图2中的 F_3).

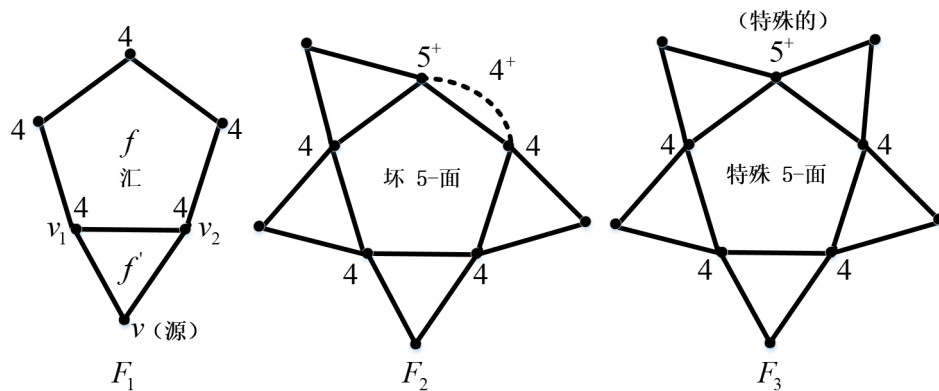


Figure 2. Definition of different 5-faces

图 2. 不同 5-面的定义

标注4.2

- (1) 一个特殊顶点至少关联一个特殊5-面, 而一个特殊5-面恰好与一个特殊顶点关联;
- (2) 如果在一个5-面 f 上存在两个 5^+ -点, 那么 f 既不是一个特殊面也不是一个坏面.

引理4.3 每个源都是一个 5^+ -点.

证明 设 $f = [v_1v_2v_3v_4v_5v_1]$ 是一个小5-面, z 是 f 的一个源. 由引理4.1 可知 G 中不存在 3^- -点, 因此我们可以假设 $d_G(z) = 4$. 不失一般性, 我们可以假设 z 与 v_1 和 v_2 相邻. 设 $G[S]$ 为 $S = \{z, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 诱导的 G 的子图. 考虑 G 的子图 $G' := G - V(G[S])$. 根据(d), G' 是3-弱退化的. 然后我们考虑 $G[S]$, 首先“删除 v_1 保存 z ”, 然后按照 v_5, v_4, v_3, v_2, z 的顺序“删除”剩余

的点. 此过程中“删除保存”和“删除”操作是有效的, 所以 $G[S]$ 是 3-弱退化的. 故 G 也是 3-弱退化的. 这与(c) 是矛盾的, 因此 $d_G(z) \geq 5$. 引理4.3 证毕.

断言4.4 设 v 是 G 的一个 5^+ -点, 则下面结论成立:

- (1) v 最多关联 $\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 个 3-面; 并且
- (2) 如果 v 与 t 个 3-面关联且 $2t < d_G(v)$, 那么 v 最多关联 $t - 1$ 个特殊 5-面.

证明 注意(1) 显然从(b) 中可以得到.

根据特殊 5-面的定义, 如果 v 是 G 的一个 5^+ -点, 那么每个与 v 关联的特殊 5-面都与两个 3-面相邻, 并且这两个 3-面都与 v 关联, 因此(2) 成立. 断言4.4 证毕.

引理4.5 设 v 是 G 的一个 5^+ -点, 假设 v 与一个特殊 5-面或者坏 5-面 f_1 和一个 3-面 f_2 关联, 并且 f_1 和 f_2 相邻, 那么 v 没有邻接于 f_2 的汇.

证明 设 $f_1 = [vv_4v_3v_2v_1v]$ 是一个特殊 5-面或者坏 5-面. 根据特殊 5-面或者坏 5-面的定义, 至少有四个 3-面与 f_1 相邻. 假设 $f_2 = [vv_5v_4v]$, 且 f_2 与 f_1 相邻(见图 3). 利用反证法, 假设 v 有一个汇 $f_3 = [v_4v_5v_6v_7v_8v_4]$ 与 f_2 相邻, 其中 v_4v_5 为它们的公共边, 那么 v_3 是 f_3 的一个源. 然而, v_3 是一个 4-点, 这与引理4.3 矛盾. 引理4.5 证毕.

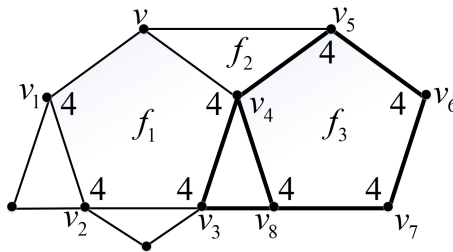


Figure 3. Illustration of Lemma 4.5

图 3. 引理4.5 示意图

引理4.6 设 f_1 和 f_2 是两个坏 5-面, 那么它们不能与一条公共边 vv_1 正常相邻, 其中 v 是 f_1 和 f_2 上的 5^+ -点.

证明 假设 f_1 和 f_2 是两个坏 5-面, 它们是正常相邻的, 它们有一个公共 5^+ -点 v 和一条公共边 vv_1 (见图 4). 因为 f_1 和 f_2 都是坏 5-面, 那么 v_1 是一个 4-点, $f_3 = [v_1v_3v_4v_1]$ 和 $f_4 = [v_1v_2v_3v_1]$ 是两个 3-面. 因此, f_3 和 f_4 是相邻的, 这与 (b) 矛盾, 因此假设是错误的. 引理4.6 证毕.

权转移 首先, 我们定义一个如图 5 所示的一个构型. 在图 5 中, 白色顶点的度数至少是关联边的数量, 而黑色顶点的度数等于关联边的数量. 红色顶点 v 是一个特殊 5-点, 它与一个特殊 5-面 f_1 , 一个坏 5-面 f_2 和一个 5-面 f_3 关联, 且满足以下条件:

- f_3 既不是特殊 5-面也不是坏 5-面; 并且
- f_3 与一个特殊 5-点 v 关联, 且 v 与一个坏 5-面 f_2 关联; 并且
- f_3 与 f_2 正常相邻.

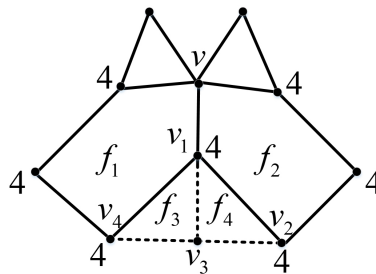


Figure 4. Illustration of Lemma 4.6

图 4. 引理4.6 示意图

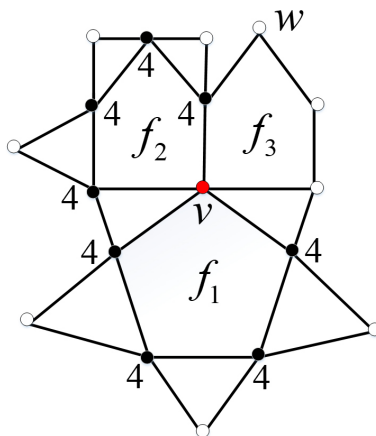


Figure 5. Special 5-vertex and incident 5-faces

图 5. 特殊 5-点与关联的 5-面

我们称 F_5 为 f_3 的集合, 即 F_5 是由所有 5-面组成的集合, 它们与 f_3 有相同的性质. 我们称这样一个特殊 5-点 v 为贫穷的特殊 5-点.

标注 4.7 设 w 为 f_3 的一个顶点, 如图 5 所示. 如果 $d_G(w) = 4$, 那么根据 (b), w 最多关联一个 3-面.

由欧拉公式 $|V| - |E| + |F| = 2$ 和公式 $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| = \sum_{f \in F} d_G(f)$. 我们可以得出

$$\sum_{v \in V} (2d_G(v) - 6) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 6) = -12.$$

现在我们对每个 $x \in V \cup F$ 定义一个初始权重 $ch(x)$, 设对每个 $v \in V$, $ch(v) = 2d_G(v) - 6$, 每个 $f \in F$, $ch(f) = d_G(f) - 6$. 我们将设计适当的权转移规则. 由于权转移过程中, 总的权值是固定的, 如果我们将初始权值 $ch(x)$ 改变为最终权值 $ch'(x)$, 使得对于每个 $x \in V \cup F$, 都满足 $ch'(x) \geq 0$, 那么

$$0 \leq \sum_{x \in V \cup F} ch(x) = \sum_{x \in V \cup F} ch'(x) = -12.$$

这将是一个矛盾. 这意味着定理中的反例不存在, 因此定理成立.

我们用 $c(v \rightarrow f)$ 表示从 v 转移给 f 的权值, 其中 $v \in V(G)$ 和 $f \in F(G)$.

权转移过程如下:

- (R1) 如果 v 是一个 4^+ -点且 f 是它关联的 3-面, 那么 $c(v \rightarrow f) = 1$;
- (R2) 如果 v 是一个 4^+ -点且 f 是它关联的 4-面, 那么 $c(v \rightarrow f) = \frac{1}{2}$;
- (R3) 如果 v 是一个至多与一个 3-面关联的 4-点, 设 f 是一个与 v 关联的 5-面, 那么 $c(v \rightarrow f) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{如果 } v \text{ 恰好与一个 3-面和一个 4-面关联;} \\ \frac{1}{3}, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

- (R4) 根据标记 4.2(1), 一个特殊 5-面恰好与一个特殊顶点关联. 设 v 是一个特殊 5^+ -点, f 是一个与 v 关联的 5-面, 那么 $c(v \rightarrow f) =$

$$\begin{cases} 1, & \text{如果 } f \text{ 是特殊 5-面;} \\ \frac{2}{3}, & \text{如果 } d_G(v) = 5 \text{ 且 } f \text{ 是坏 5-面(见图 5 中的 } f_2); \\ \frac{1}{3}, & \text{如果 } d_G(v) = 5, v \text{ 是贫穷的, 且 } f \in F_5 \text{ (见图 5 中的 } f_3). \end{cases}$$

- (R5) 如果 v 不是一个特殊 5-点或 6^+ -点, 且 f 是一个与 v 关联的坏 5-面, 那么 $c(v \rightarrow f) = \frac{3}{4}$;
- (R6) 如果 v 是 f 的一个源, 那么 $c(v \rightarrow f) = \frac{1}{5}$;
- (R7) 如果 v 是 6^+ -点或不是一个特殊 5-点, 或者是一个不与一个坏 5-面关联的特殊 5-点, 且如果 f 不是一个特殊 5-面或者坏 5-面, 其中 f 与 v 关联, 那么 $c(v \rightarrow f) = \frac{1}{2}$.

要完成定理 1.6 的证明, 还需要检验 $V \cup F$ 中每个元素的最终权值是否是非负的, 下面两条断言将对此进行说明.

断言 4.8 对于所有的 $v \in V(G)$, $ch'(v) \geq 0$.

证明 根据引理 4.1, G 中不存在 3^- -点, 因此我们需要在下面考虑 4^+ -点.

情况 1: $d_G(v) = 4$.

在这种情况下, 我们有 $ch(v) = 4 \times 2 - 6 = 2$. 根据引理 4.3, v 没有任何汇. 如果 v 与两个 3-面关联, 那么根据 R1, $ch'(v) = ch(v) - 2 \times 1 = 0$.

如果 v 恰好与一个 3-面关联, 那么根据 (b) 可知, v 最多与一个 4-面关联. 假设 v 与一个 4-面关联, 那么它最多与两个 5-面关联. 根据 R1, R2 和 R3, $ch'(v) \geq ch(v) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2 = 0$. 否则, v 最多关联三个 5-面. 根据 R1 和 R3, $ch'(v) \geq ch(v) - 1 - \frac{1}{4} \times 3 > 0$.

如果 v 不与任何 3-面关联, 那么根据 R2 和 R3, $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{1}{2} \times 4 = 0$.

情况 2: $d_G(v) = 5$.

在这种情况下, 我们有 $ch(v) = 5 \times 2 - 6 = 4$. 根据标注 4.2 (1), 假设 v 是特殊点, 即 v 与一个特殊 5-面关联. 由引理 4.4 和特殊 5-面定义可知, v 恰好与两个 3-面和一个特殊 5-面关联. 根据引理 4.5, v 没有汇. 如果 v 与一个坏 5-面关联, 根据引理 4.6 可知, v 最多与一个坏 5-面关联. 因此我们

可以从 R1 和 R4 中得到 $ch'(v) \geq ch(v) - 1 \times 2 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$. 否则 v 不与任何坏 5-面关联, 根据 R1, R4 和 R7, $ch'(v) \geq ch(v) - 1 \times 2 - 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0$.

接下来我们假设 v 不是特殊点, 即由标注 4.2 (1) 可知, v 不与任何特殊 5-面关联. 根据引理 4.4 (1), v 最多与两个 3-面关联. 根据引理 4.6, v 最多与两个坏 5-面关联.

- 如果 v 邻接于两个 3-面, 那么根据引理 4.6, 坏 5-面的定义和 (b) 可知, v 至多与一个坏 5-面关联. 根据 (b), v 不与任何 4-面关联. 因此, 根据 R1, R4, R6 和 R7, 我们可以得出 $ch'(v) > ch(v) - 1 \times 2 - 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times 2 > 0$.
- 如果 v 恰好与一个 3-面关联, 那么根据坏 5-面的定义, v 最多与两个坏 5-面关联, 因此根据 R1, R4, R6 和 R7, $ch'(v) > ch(v) - 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 > 0$.
- 如果 v 不与任何 3-面关联, 那么 v 不与任何坏 5-面关联. 根据 R2 和 R7, $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{1}{2} \times 5 > 0$.

情况 3: $d_G(v) = 6$.

注意到 $ch(v) = 2 \times 6 - 6 = 6$. 根据引理 4.4, v 最多关联三个 3-面, 最多关联三个特殊 5-面.

- 假设 v 与三个 3-面关联. 如果 v 与三个特殊 5-面关联, 那么根据引理 4.5 可知, v 没有任何汇. 根据 R1 和 R4, $ch'(v) \geq ch(v) - 3 - 3 = 0$. 否则 v 最多关联两个特殊 5-面. 根据引理 4.5 可知, v 没有任何汇. 根据 R1, R4 和 R5, $ch'(v) \geq ch(v) - 3 - 2 - \frac{3}{4} > 0$.
- 假设 v 最多与两个 3-面关联, 那么根据引理 4.4 (2) 可知, v 最多与一个特殊 5-面关联. 如果 v 与一个特殊 5-面关联, 那么根据 R1, R4, R5 和 R6 可得, $ch'(v) > ch(v) - 2(1 + \frac{1}{5}) - 1 - \frac{3}{4} \times 3 > 0$. 否则根据引理 4.6, v 最多与两个坏 5-面关联. 因此, 根据 R1, R4, R5, R6 和 R7, 我们可以得出 $ch'(v) > ch(v) - 2(1 + \frac{1}{5}) - \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 > 0$.

情况 4: $d_G(v) = 7$.

在这种情况下, $ch(v) = 2 \times 7 - 6 = 8$. 根据引理 4.4, v 最多关联三个 3-面, 最多关联两个特殊 5-面. 根据 R1, R4, R5 和 R6, 最终权值最少为 $ch'(v) > ch(v) - 3(1 + \frac{1}{5}) - 2 - \frac{3}{4} \times 2 > 0$.

情况 5: $d_G(v) = k \geq 8$.

注意到 $ch(v) = 2k - 6$. 根据引理 4.4, v 最多关联 $\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 个 3-面, 最多关联 $\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 个特殊 5-面. 根据 R1, R4 和 R6, 可以得出 $ch'(v) \geq ch(v) - (1 + \frac{1}{5}) \times \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor - 1 \times \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor > 0$.

断言 4.8 证毕.

断言 4.9 对于所有的 $f \in F(G)$, $ch'(f) \geq 0$.

证明 设 f 是 G 的一个面, 因为 G 是简单图, 所以 G 没有环和多重边. 故 $d_G(f) \geq 3$. 如果 $d_G(f) \geq 6$, 那么 f 既不从别处得到权值, 也不向外转出权值. 因此, $ch'(f) = ch(f) = d_G(f) - 6 \geq 0$. 如果 $d_G(f) = 3$, 那么根据 R1, 与 f 关联的每个点转权 1 给 f . 因此, 我们可以得到 $ch'(f) = ch(f) + 3 \times 1 = d_G(f) - 6 + 3 = 0$. 如果 $d_G(f) = 4$, 那么根据 R2, 与 f 关联的每个点转权 $\frac{1}{2}$ 给 f , 因此最终权值 $ch'(f) = ch(f) + 4 \times \frac{1}{2} = d_G(f) - 6 + 2 = 0$. 接下来我们假设 $d_G(f) = 5$, 那么 $ch(f) = 5 - 6 = -1$.

情况1: f 是小 5-面, 即与 f 关联的所有点都是 4-点.

对于 $0 \leq t \leq 5$, 设 t 为 f 上与两个 3-面关联的 4-点的数目, 那么 f 上有 $(5-t)$ 个 4-点至多关联一个 3-面, 并且 f 至少有 $(t+1)$ 个源. 因此, 根据 R3 和 R6, 对于每个 $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 都有 $ch'(f) \geq -1 + \frac{1}{4} \times (5-t) + \frac{1}{5} \times (t+1) = \frac{9-t}{20} > 0$.

情况2: f 是一个 $(5^+, 4, 4, 4, 4)$ -面.

用 v 表示 5^+ -点, 如果 f 是一个特殊 5-面, 那么根据 R4, $ch'(f) \geq -1 + 1 = 0$. 接下来我们假设 f 不是一个特殊 5-面, 那么根据特殊 5-面的定义可知, 存在一个 4-点最多与 f 的一个 3-面关联.

- 假设 v 是一个特殊 5-点, 且 v 与一个坏 5-面关联. 如果 f 是坏的, 那么有一个 4-点(图5中与 v 相邻的 4-点) 恰好与一个 3-面关联, 而不与 f 上的任何 4-面关联. 根据 R3 和 R4, $ch'(f) \geq -1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$. 否则 f 不是坏 5-面, 那么 $f \in F_5$, v 是一个贫穷的特殊 5-点. 注意到图5中的 f 就是 f_3 . 因此, 根据标注4.7, f 至少与两个 4-点关联, 且这两个 4-点最多关联一个 3-面, 且不同时关联一个 3-面和一个 4-面. 根据 R3, R4 和 R7, $ch'(f) \geq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$.
- 否则, v 是一个 6^+ -点, 或者 v 不是一个特殊 5-点, 或者 v 是一个特殊 5-点且 v 不与一个坏 5-面关联. 如果 f 是坏 5-面, 那么存在一个与 f 关联的 4-点, 并且这个 4-点最多关联一个 3-面. 根据 R3 和 R5, $ch'(v) \geq -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$. 如果 f 不是坏 5-面, 那么 f 至少关联两个 4^+ -点, 并且这两个 4^+ -点最多关联一个 3-面. 根据 R3 和 R7, $ch'(f) \geq -1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = 0$.

情况3: f 上至少存在两个 5^+ -点.

从标注4.2 (2) 可知, f 既不是特殊 5-面也不是坏 5-面.

- 如果 $f \in F_5$, 那么根据标注4.7, R3, R4 和 R7, $ch'(f) \geq -1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = 0$.
- 如果 $f \notin F_5$, 即 f 不与一个特殊 5-点关联, 其中这个 5-点在一个特殊的 5-面上且与一个坏 5-面关联. 根据 R7, $ch'(f) \geq -1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = 0$.

定理1.6 证毕.

参考文献

- [1] Vizing, V.G. (1976) Vertex Colorings with Given Colors. *Metody Diskretnogo Analiza Novosibirsk*, **29**, 3-10. (In Russian)
- [2] Erdős, P., Rubin, A.L. and Taylor, H. (1979) Choosability in Graphs. *Congressus Numerantium*, **26**, 125-127.
- [3] Dvořák, Z. and Postle, L. (2018) Correspondence Coloring and Its Application to List-Coloring Planar Graphs without Cycles of Lengths 4 to 8. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **129**, 38-54. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.09.001>

-
- [4] Bernshteyn, A. and Kostochka, A. (2018) On Differences between DP-Coloring and List Coloring. *Siberian Advances in Mathematics*, **21**, 61-71.
- [5] Bernshteyn, A. and Lee, E. (2021) Weak Degeneracy of Graphs. arXiv:2111.05908
- [6] Thomassen, C. (1994) Every Planar Graph Is 5-Choosable. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **62**, 190-191. <https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1062>
- [7] Škrekovskiv, R. (1998) Choosability of K_5 -Minor-Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **190**, 223-226. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(98\)00158-7](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00158-7)
- [8] He, W., Miao, W. and Shen, Y. (2008) Another Proof of the 5-Choosability of K_5 -Minor-Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **308**, 4024-4026.
- [9] Li, L. and Wang, T. (2022) An Extension of Thomassen's Result on Choosability. *Applied Mathematics and Computation*, **425**, Article ID: 127100. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127100>
- [10] Lam, P.C.B., Xu, B. and Liu, J. (1999) The 4-Choosability of Plane Graphs without 4-Cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **76**, 117-126. <https://doi.org/10.1006/jctb.1998.1893>
- [11] Kim, S.J. and Ozeki, K. (2018) A Sufficient Condition for DP-4-Colorability. *Discrete Mathematics*, **341**, 1983-1986. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.03.027>
- [12] Cheng, P., Chen, M. and Wang, Y. (2016) Planar Graphs without 4-Cycles Adjacent to Triangles Are 4-Choosable. *Discrete Mathematics*, **339**, 3052-3057. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.06.009>
- [13] Kim, S.J. and Yu, X. (2019) Planar Graphs without 4-Cycles Adjacent to Triangles Are DP-4-Colorable. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 707-718. <https://doi.org/10.1007/s00373-019-02028-z>
- [14] Wagner, K. (1937) Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Mathematische Annalen*, **114**, 570-590. <https://doi.org/10.1007/BF01594196>
- [15] Wang, W. and Lih, K.W. (2002) Choosability and Edge Choosability of Planar Graphs without Five Cycles. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 561-565. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(02\)80007-6](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80007-6)
- [16] Fijavž, G., Juvan, M., Mohar, B. and Škrekovski, R. (2002) Planar Graphs without Cycles of Specific Lengths. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 377-388. <https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0570>