

# 有无人驾驶后视效应和前车加速度信息的双速度差模型

刘卫平, 化存才\*

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2022年6月19日; 录用日期: 2022年7月14日; 发布日期: 2022年7月21日

## 摘要

本文在无人驾驶(Unmanned Driving, UD)环境下研究车辆跟驰模型。在双速度差模型(Two-Velocity Difference, TVD)的基础上, 考虑无人驾驶汽车后视效应和前车加速度信息对车辆跟驰行为的影响, 提出一种改进的跟驰模型(BL-ATVD)。利用线性稳定性方法得到了BL-ATVD模型的稳定性条件, 并分析了稳定区域的扩大情况和占比; 利用约化摄动方法导出了BL-ATVD模型分别在稳定区域和不稳定区域内的Burgers方程、mKdV方程, 给出相应的孤立波解、扭结-反扭结波解。数值模拟结果表明, BL-ATVD模型的交通流稳定性好于全速度差(Full Velocity Difference, FVD)模型, 且稳定性随后视效应权重的减小或前车加速度敏感系数的增大而增强。因此, BL-ATVD模型适合用于描述无人驾驶车辆的跟驰特性。

## 关键词

无人驾驶, 交通流, 跟驰模型, 数值模拟

# Two-Velocity Difference Model with Rear View Effect of Unmanned Driving and Acceleration Information of the Preceding Vehicles

Weiping Liu, Cuncai Hua\*

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 19<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jul. 14<sup>th</sup>, 2022; published: Jul. 21<sup>st</sup>, 2022

\*通讯作者 Email: [cuncai-hua@139.com](mailto:cuncai-hua@139.com)

文章引用: 刘卫平, 化存才. 有无人驾驶后视效应和前车加速度信息的双速度差模型[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4780-4792. DOI: [10.12677/aam.2022.117503](https://doi.org/10.12677/aam.2022.117503)

## Abstract

In this paper, the car-following model in the unmanned driving (UD) environment is studied. Based on the two-velocity difference model (TVD), an improved car-following model (BL-ATVD) is proposed by considering the influence of the rear view effect of the driverless cars and the acceleration information of the preceding ones on the car-following behavior. The stability conditions of the BL-ATVD model are obtained by using the linear stability method, and the expansion and proportion of the stable region are analyzed. Burgers equation, mKdV equation, and the corresponding solitary wave solutions, kink-anti-kink wave solutions are given by using the reduced perturbation method. Numerical simulation results show that the BL-ATVD model has better traffic flow stability than the full speed difference model (FVD), and the stability is strengthened by the reduction of the apparent effect weight or the acceleration sensitivity coefficient of the preceding vehicles. Therefore, the BL-ATVD model is suitable for describing the car-following characteristics of unmanned vehicles.

## Keywords

Unmanned Driving, Traffic Flow, Car-Following Model, Numerical Simulation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

多少年来, 标志着经济社会迅猛发展和人们生活水平日益提高的汽车保有量的持续增加, 使得城市交通拥堵、交通事故、交通污染等瓶颈问题始终处于高位难解状态。道路拥堵易发交通事故, 易致环境污染, 交通事故路段加重拥堵、加重污染。为解决这些道路交通症结问题, 交通学科领域学者已将研究目光转向快速发展的人工智能和通信技术与现代交通流的深度融合上, 这为缓和城市道路矛盾提供了新的思路和途径[1]。目前, 智能交通系统的推行和广泛应用已成为主流, 为减少交通事故和拥堵现象发生提供重要技术支持。例如, 车辆导航系统智能规划行车路线, 提前提示限速信息, 播报事故多发点、路况等交通信息, 有利于扩大交通安全稳定区域。又如, 定速巡航、V2V等车载互联网智能设备的逐步引入, 实现车-车通信, 互联共享, 可使得交通流动顺畅, 精准减少安全事故, 并提升半自动驾驶行车体验。正在研发实验中的自动无人驾驶汽车(AV)技术, 必将为实现全新智能精准稳定交通奠定重要技术基础。

车辆跟驰理论研究车辆微观行为, 其关键在于深入认识在无法超车的单行道上行驶的前后车辆之间的相互作用规律和交通拥堵等本质特性, 从而把握交通流的重要内在运行机理。车辆跟驰概念最早由Reushel于1950年首先提出[2], Pipes[3]于1953年用动力学的方法分析车辆的跟驰现象, 提出了第一个相对速度-加速度跟驰模型, 由此开启了车辆跟驰模型的研究。1958年, Chandler[4]建立了最原始的驾驶动力学模型, 即刺激-反应类模型。1961年, Gazis等[5]考虑速度差和车间距对汽车加速度产生影响的问题提出了Gazis-Herman-Rothery(GHR)模型。1995年, Bando等[6]提出了优化速度(Optimal Velocity, OV)模型。1998年, Helbing等[7]提出了广义力(General Force, GF)模型, 克服了OV模型存在加速度过大及减速度不合理的问题。2001年, Jiang等[8]考虑正、负速度差对于跟驰行为的影响, 基于OV模型和GF模型提出了全速度差(FVD)模型。2011年, 彭光含等[9]考虑优化速度差信息, 基于FVD模型提出

了优化速度差(Optimal Velocity Difference, OVD)模型。2012年,葛红霞等[10]考虑了现代交通中的导航问题,基于OV模型提出了双速度差(TVD)模型。2019年,和光珠[11]、曹芳[12]考虑智能提前提示限速信息的影响,分别改进了最优速度模型和全速度差模型。2022年,李良鹏[13]在V2V环境下,考虑安全问题,基于OV和FVD模型改进得到了防碰撞跟驰模型,周琳[14]在智能网联环境下改进提出了有电子节气门开度和时滞影响的多前车速度差模型。

针对无人驾驶这种高度智能自动化的汽车技术,发达国家自20世纪70年代以来就陆续开始了相关研究[15]。无人驾驶车辆是集监测、传感、控制、通信、传输等多功能技术设备于一身,在无人工干预的情况下能自动完成图像感知、路径规划、决策控制等任务。无人驾驶车辆没有驾驶员的主观能动操作,完全依靠汽车内部配置的通信传感设备而对道路交通环境实时监控,并对突发交通状况迅速做出反应,因而更能有效地减少驾驶员主观因素造成的交通拥堵和安全事故等问题。鉴于无人驾驶车辆对改善道路交通环境的重要意义,建立合适的跟驰模型,探索无人驾驶交通流特性,自然成为交通、管理、数学等多学科交叉研究的热点。A. TALEBPOUR等[16]分析了智能网联环境下无人驾驶汽车对混合交通流稳定性及通行能力的影响。结果显示,无人驾驶比例的提高能有效改善交通运行环境。Manit Klawtanong等[17]基于最优速度模型提出了一种考虑在环形道路上的无人驾驶车辆交通流跟驰模型,模型的模拟仿真得出,无人驾驶车辆能够缓解道路拥堵,提高车流的平均速度。Ma等[18]考虑在智能驾驶环境下,基于OV模型提出了一种改进的无人驾驶车辆跟驰模型,数值模拟结果显示该模型能提升无人驾驶车辆的通行能力和交通流的稳定性。罗嘉陵等[1]基于传统车辆跟驰模型,建立了无人驾驶环境下的多信息融合跟驰模型(Multi-information Fusion Car-following Model, MI-CF),分析了模型的稳定性并进行参数标定,与FVD模型的数值模拟对比分析结果表明,MI-CF模型能提升车辆的通行能力和安全性。顾海燕等[19]建立了无人驾驶汽车车辆组的引导车跟驰模型,用频域变换方法证明了所提模型具备较好的稳定性。

在无人驾驶环境下,通过改进和完善已有的跟驰模型,或者建立适合智能化车辆跟驰模型,能为完全无人驾驶交通流研究和新型城市智慧交通系统建立提供一定的理论依据。为此,本文主要考虑结合无人驾驶车辆具有的强大监测功能,考虑后视效应和前车加速度信息对跟驰车辆的影响,基于双速度差模型提出了一种改进的车辆跟驰模型(BL-ATVD)。对模型进行理论分析和数值模拟,并验证改进模型对交通流稳定性的影响。

## 2. BL-ATVD 模型的提出

1961年,Newell [20]等假定驾驶员在反应时滞 $\tau$ 内调整到最优速度,提出了如下模型:

$$v_n(t+\tau) = V(\Delta x_n(t)) \quad (1)$$

其中, $v_n(t)$ 表示 $t$ 时刻车辆 $n$ 的速度, $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ 表示 $t$ 时刻第 $n+1$ 辆车与第 $n$ 辆车的车间距, $V(\Delta x_n(t))$ 为最优速度函数。选取如下形式:

$$V(\Delta x_n(t)) = \frac{v_{\max}}{2} \left[ \tanh(\Delta x_n(t) - h_c) + \tanh(h_c) \right] \quad (2)$$

其中: $v_{\max}$ 表示车辆的最大行驶速度, $h_c$ 为安全车间距。

1995年,Bando等[6]为了解决Newell模型中加速度不合理的问题,进一步提出优化速度(OV)模型:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \alpha \left[ V(\Delta x_n(t)) - v_n(t) \right] \quad (3)$$

其中, $\alpha$ 表示驾驶员的敏感系数。

1998年,Helbing等[7]基于OV模型,改进提出了广义力(GF)模型:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \alpha [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda H(-\Delta v_n(t)) \Delta v_n(t) \quad (4)$$

其中,  $H(x)$  是 Hedviside 阶梯函数,  $\lambda$  是驾驶员对速度差的反应灵敏度系数。

2001 年, Jiang 等[8]在 OV 模型和 GF 模型的基础上, 进一步考虑了正、负速度差对跟驰车辆的影响, 提出了如下的全速度差(FVD)模型:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \alpha [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda \Delta v_n \quad (5)$$

2012 年, 葛红霞等[9]基于 OV 模型, 考虑现代交通导航问题, 提出了双速度差(TVD)模型:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \alpha [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda (p \Delta v_n + (1-p) \Delta v_{n+1}) \quad (6)$$

其中,  $p$  为速度差的权重值。

本文在无人驾驶的环境下改进双速度差模型(6)。自动智能无人驾驶的车辆, 是将车—车、车—路、车—人形成一个有机统一的整体, 能够同时监测前后车辆的位置、速度、加速度等信息。为此, 我们考虑引入后视效应和前车加速度信息对跟驰车辆的影响, 建立如下具有后视效应和前车加速度信息的双速度差跟驰模型(简称为 BL-ATVD 模型):

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \alpha [pV_F(\Delta x_n(t)) + (1-p)V_B(\Delta x_{n-1}(t)) - v_n(t)] + \beta [q\Delta v_n(t) + (1-q)\Delta v_{n+1}(t)] + \lambda a_{n+1}(t) \quad (7)$$

其中,  $\alpha = 1/\tau$  表示自动驾驶车辆上安装传感器的灵敏度系数,  $\Delta x_n(t)$  表示  $t$  时刻第  $n$  辆车与第  $n+1$  辆车的车头间距,  $\Delta v_n(t)$  表示  $t$  时刻第  $n$  辆车与第  $n+1$  辆车的速度差, 而  $a_{n+1}(t)$  表示  $t$  时刻第  $n+1$  辆车的加速度,  $\beta$  表示对速度差的敏感系数,  $\lambda$  表示对前车加速度的敏感系数,  $p, q$  为权重系数, 且满足  $0.5 < p \leq 1$ ,  $0.5 < q \leq 1$ ;  $V_F(\Delta x_n(t))$ 、 $V_B(\Delta x_{n-1}(t))$  分别表示跟驰车相对于前车和后车的最佳速度函数, 表达式为:

$$\begin{aligned} V_F(\Delta x_n(t)) &= \alpha_F [\tanh(\Delta x_n(t) - h_c) + \tanh(h_c)] \\ V_B(\Delta x_n(t)) &= -\alpha_B [\tanh(\Delta x_n(t) - h_c) + \tanh(h_c)] \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $\alpha_F, \alpha_B > 0$  为常数,  $h_c$  表示车辆的安全间距。

### 3. BL-ATVD 模型的线性稳定性分析

设初始状态稳定, 车头间距为  $h$ , 对应的最佳速度为  $pV_F(\Delta x_n(t)) + (1-p)V_B(\Delta x_{n-1}(t))$ , 则车辆在交通流中位置可以表示为:

$$x_n^0(t) = hn + [pV_F(h) + (1-p)V_B(h)]t \quad (9)$$

在加上一个平面波小扰动  $y_n(t) = \exp(ikn + zt)$  后, 有  $x_n(t)$  表示为:

$$x_n(t) = x_n^0(t) + y_n(t) = hn + [pV_F(h) + (1-p)V_B(h)]t + y_n(t) \quad (10)$$

将(10)式代入(7)式中, 得:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n(t) &= \alpha [pV_F(h + \Delta y_n(t)) + (1-p)V_B(h + \Delta y_{n-1}(t)) - (pV_F(h) + (1-p)V_B(h)) - \dot{y}_n(t)] \\ &\quad + \beta [q\Delta \dot{y}_n(t) + (1-q)\Delta \dot{y}_{n+1}(t)] + \lambda \ddot{y}_{n+1}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\Delta y_n(t) = y_{n+1}(t) - y_n(t)$ 。将(11)式 Taylor 展开, 有:

$$\frac{d^2(y_n(t))}{dt^2} = \alpha \left[ pV'_F(h)\Delta y_n(t) + (1-p)V'_B(h)\Delta y_{n-1}(t) - \frac{d(y_n(t))}{dt} \right] + \beta \left[ q\Delta y'_n(t) + (1-q)\Delta y'_{n+1}(t) \right] + \lambda \frac{d^2(y_{n+1}(t))}{dt^2} \tag{12}$$

其中,  $V'_F(h) = \left. \frac{dV_F(\Delta x_n(t))}{d\Delta x_n(t)} \right|_{\Delta x_n(t)=h}$ ,  $V'_B(h) = \left. \frac{dV_B(\Delta x_{n-1}(t))}{d\Delta x_{n-1}(t)} \right|_{\Delta x_{n-1}(t)=h}$

将  $y_n(t) = \exp(ikn + zt)$  代入(12)式中, 化简整理得:

$$z^2(1 - \lambda e^{ik}) = \alpha \left[ pV'_F(h)(e^{ik} - 1) + (1-p)V'_B(h)(1 - e^{-ik}) - z \right] + \beta z \left[ q(e^{ik} - 1) + (1-q)(e^{2ik} - e^{ik}) \right] \tag{13}$$

将  $e^{ik}$  泰勒展开到二阶有:

$$e^{ik} = 1 + ik + (ik)^2/2 \tag{14}$$

再令  $z = z_1 ik + z_2 (ik)^2 + \dots$ , 连同(14)式代入(13)式中, 得到:

$$z_1^2(1 - \lambda)(ik)^2 = \alpha \left[ pV'_F(h) + (1-p)V'_B(h) - z_1 \right] (ik) + \left[ \alpha \left( \frac{p}{2}V'_F(h) - \frac{1-p}{2}V'_B(h) - z_2 \right) + \beta z_1 \right] (ik)^2 \tag{15}$$

比较  $ik$  和  $(ik)^2$  的系数, 得到:

$$z_1 = pV'_F(h) + (1-p)V'_B(h) \tag{16}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left( pV'_F(h) - (1-p)V'_B(h) \right) - \frac{(pV'_F(h) + (1-p)V'_B(h)) \left[ (1-\lambda)(pV'_F(h) + (1-p)V'_B(h)) - \beta \right]}{\alpha} \tag{17}$$

记  $m_1 = pV'_F(h) + (1-p)V'_B(h)$ ,  $m_2 = pV'_F(h) - (1-p)V'_B(h)$ , 代入(17), 得:

$$z_1 = m_1, \quad z_2 = \frac{1}{2}m_2 - \frac{m_1 \left[ (1-\lambda)m_1 - \beta \right]}{\alpha} \tag{18}$$

当  $z_2 < 0$  时, 初始状态下的交通流系统在小扰动下将会变得不稳定; 当  $z_2 > 0$  时, 交通流系统能保持稳定状态。因此, 在令  $z_2 = 0$  时, 则得到模型(7)的临界稳定条件:

$$\alpha = \frac{2m_1 \left[ (1-\lambda)m_1 - \beta \right]}{m_2} \tag{19}$$

于是, 模型(7)的交通流系统当  $\alpha > \frac{2m_1 \left[ (1-\lambda)m_1 - \beta \right]}{m_2}$  时稳定, 当  $\alpha < \frac{2m_1 \left[ (1-\lambda)m_1 - \beta \right]}{m_2}$  时不稳定。

从(19)式可以得出如下 3 点结论:

1) 当  $p=1, \beta=0, \lambda=0$  时, (19)式退化为经典最优速度(OV)模型的稳定性条件:  $\alpha > 2V'_F(h)$ 。又因为当  $\alpha_F = \alpha_B$  时, 满足:  $2V'_F(h) > (4p-2) \left[ (1-\lambda)(2p-1)V'_F(h) - \beta \right]$ 。所以, 模型(7)的稳定性区域较 OV 模型得到了扩大。

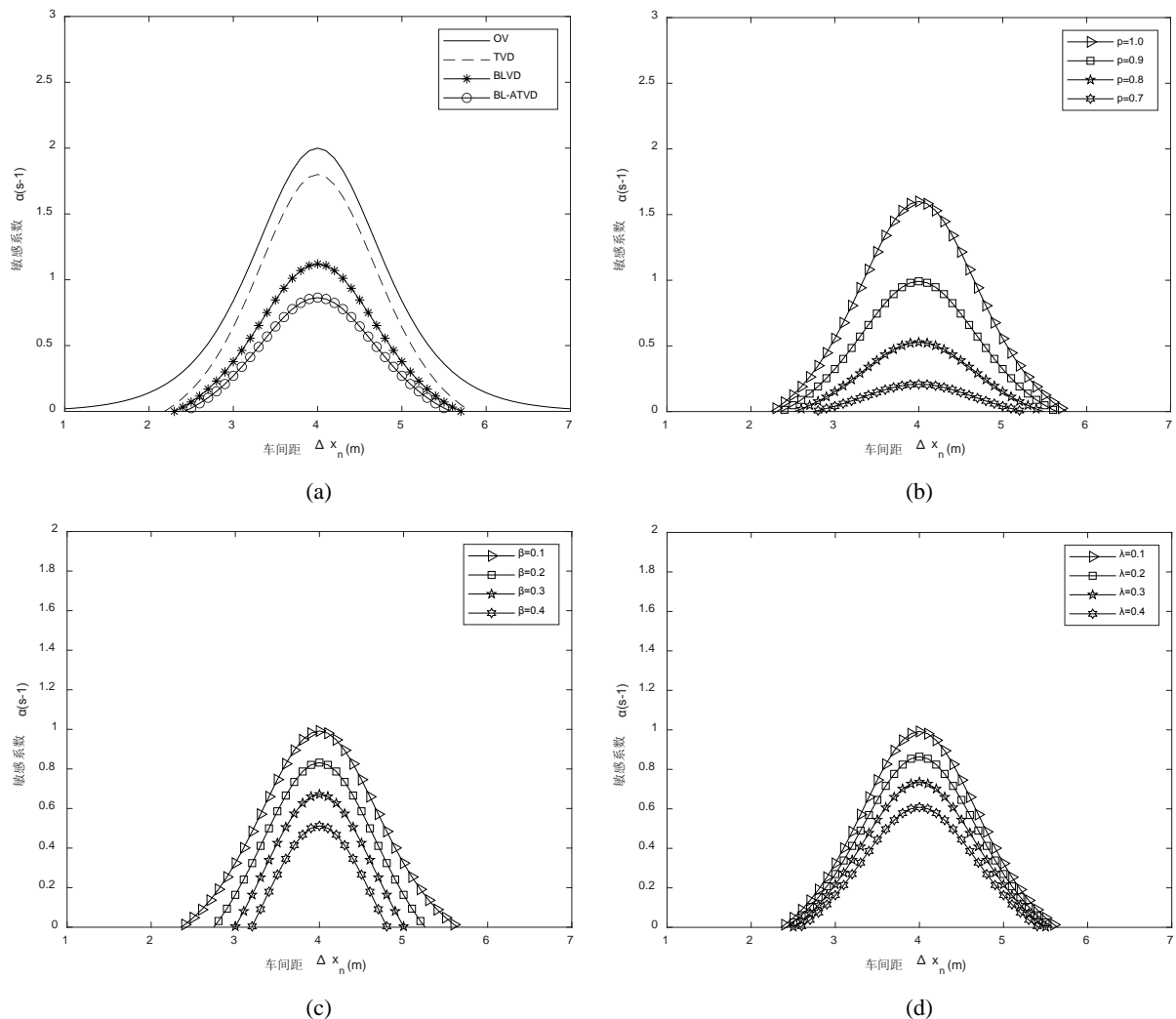
2) 当  $p=1, \lambda=0$  时, (19)式退化为双速度差(TVD)模型的线性稳定性条件:  $\alpha > 2(V'_F(h) - \beta)$ 。又因为当  $\alpha_F = \alpha_B$  时, 满足:  $2(V'_F(h) - \beta) > (4p-2) \left[ (1-\lambda)(2p-1)V'_F(h) - \beta \right]$ 。因此, 模型(7)的稳定性区域较 TVD 模型得到了扩大。

3) 当  $q=1, \lambda=0$  时, (19)式退化为具有后视效应的速度差(BLVD)模型的线性稳定性条件:

$\alpha > \frac{2m_1(m_1 - \beta)}{m_2}$ 。由于  $\frac{2m_1(m_1 - \beta)}{m_2} > \frac{2m_1[(1 - \lambda)m_1 - \beta]}{m_2}$ , 故模型(7)的稳定性区域较 BLVD 得到了扩大。

为了更清晰直观地表示 BL-ATVD 模型较其他三种退化模型的稳定性区域扩大情况, 并分析各参数对模型(7)的线性稳定性的影响。利用 Matlab 软件画出四种模型和 BL-ATVD 模型在不同  $p$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$  组合下的中性稳定性曲线如图 1 所示。

图 1 中临界稳定曲线的上方表示交通流处于稳定状态, 曲线下方表示交通流不稳定。由图 1(a)可知, 四种模型稳定性区域的包含关系为:  $BL-ATVD \supset BLVD \supset TVD \supset OV$ 。



**Figure 1.** Neutral stability curves of BL-ATVD model under four models and combinations of different parameter. (a) Neutral stability curves of the four models; (b)  $\beta = 0.1, \lambda = 0.1, p$  change; (c)  $p = 0.9, \lambda = 0.1, \beta$  change; (d)  $p = 0.9, \beta = 0.1, \lambda$  change  
**图 1.** 四种模型和不同参数组合下的 BL-ATVD 模型中性稳定性曲线。(a) 四种模型中性稳定曲线; (b)  $\beta = 0.1, \lambda = 0.1, p$  变化; (c)  $p = 0.9, \lambda = 0.1, \beta$  变化; (d)  $p = 0.9, \beta = 0.1, \lambda$  变化

进一步, 定义稳定区域所占面积比率为:  $\varepsilon = 1 - \frac{H_1}{H} \times 100\%$ 。其中,  $H$  表示总面积(其值等于中性稳定性曲线横纵坐标之差的乘积(在本文的参数下,  $H = 18$ )),  $H_1$  代表不稳定区域所占的面积, 有定积分计算公式:

$$H_1 = \int_{x_1}^{x_2} (4p-2) \left[ (1-\lambda)(2p-1) \operatorname{sech}^2(x-h_c) - \beta \right] dx \tag{20}$$

其中  $x \in [1, 7]$ ,  $h_c = 4$ , 积分上下限  $x_1$ 、 $x_2$  分别表示中性稳定性曲线与车头间距所在轴的交点坐标[13]。通过 Matlab 编程计算得到不同模型的稳定区域面积占比率为:  $\varepsilon_{(OV)} = 77.89\%$ ,  $\varepsilon_{(TVD)} = 82.94\%$ ,  $\varepsilon_{(BLVD)} = 89.72\%$ ,  $\varepsilon_{(BL-ATVD)} = 92.33\%$ 。由此可见, 考虑后视效应和前车加速度信息的 BL-ATVD 模型的交通流稳定性确实得到了有效地提升。

由图 1(b)~(d)可知, 参数  $p$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$  均会影响模型的稳定性。具体情况如表 1 所示:

**Table 1.** Influence of parameters on the stability of the model (7)

**表 1.** 参数对模型(7)的稳定性的影响

模型参数	固定两参数	第三个参数对稳定区域的影响	备注
$p$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$	$\beta$ 、 $\lambda$	稳定区域随 $p$ 的减小而增大	$p \in (0.5, 1]$
$p$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$	$p$ 、 $\lambda$	稳定区域随 $\beta$ 的减小而增大	$\beta > 0$
$p$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$	$p$ 、 $\beta$	稳定区域随 $\lambda$ 的减小而增大	$\lambda > 0$

#### 4. BL-ATVD 模型的非线性分析和孤立波

在本节中, 根据上节推导出的线性稳定性条件, 由临界稳定性曲线划分出交通流的稳定区域和不稳定区域, 运用约化摄动法推导出 BL-ATVD 模型在不同区域的非线性波方程和孤立波解, 从而分析交通流的内在传播机理。除做出新的说明外, 相关符号仍沿用前面给出的。

为了计算方便, 将模型(7)改写为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\Delta x_n(t))}{dt^2} = & \alpha \left\{ p \left[ V_F(\Delta x_{n+1}(t)) - V_F(\Delta x_n(t)) \right] + (1-p) \left[ V_B(\Delta x_n(t)) - V_B(\Delta x_{n-1}(t)) \right] \right\} - \alpha \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} \\ & + \beta q \left( \frac{d\Delta x_{n+1}(t)}{dt} - \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} \right) + \beta(1-q) \left( \frac{d\Delta x_{n+2}(t)}{dt} - \frac{d\Delta x_{n+1}(t)}{dt} \right) + \lambda \frac{d^2(\Delta x_{n+1}(t))}{dt^2} \end{aligned} \tag{21}$$

##### 4.1. 在稳定区域内导出 Burgers 方程和孤立波解

在稳定区域, 满足线性稳定性条件:  $\alpha > \frac{2m_1[(1-\lambda)m_1 - \beta]}{m_2}$

对空间变量  $n$  和时间变量  $t$ , 定义慢变量  $X$  和  $T$  为:

$$X = \varepsilon(n+bt), \quad T = \varepsilon^2 t \tag{22}$$

其中,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 且  $b$  是待定常数。设车头间距为:

$$\Delta x_n(t) = h + \varepsilon R(X, T) \tag{23}$$

将  $\Delta x_{n+1}(t)$  在  $\Delta x_n(t)$  处进行泰勒展开, 有:

$$\Delta x_{n+1}(t) = \Delta x_n(t) + \frac{d\Delta x_n(t)}{dn} + \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta x_n(t)}{dn^2} + \frac{1}{6} \frac{d^3\Delta x_n(t)}{dn^3} + \dots \tag{24}$$

$$\Delta x_{n-1}(t) = \Delta x_n(t) - \frac{d\Delta x_n(t)}{dn} + \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta x_n(t)}{dn^2} - \frac{1}{6} \frac{d^3\Delta x_n(t)}{dn^3} + \dots \tag{25}$$

$$\Delta x_{n+2}(t) = \Delta x_n(t) + 2 \frac{d\Delta x_n(t)}{dn} + 2 \frac{d^2\Delta x_n(t)}{dn^2} + \frac{4}{3} \frac{d^3\Delta x_n(t)}{dn^3} + \dots \tag{26}$$

将式(23)、(24)、(25)和(26)代入式(21)中, 泰勒展开到  $\varepsilon^3$  量级, 整理得到如下偏微分方程:

$$(b-m_1)\partial_x R + \varepsilon \left[ \partial_T R - [pV_F''(h) + (1-p)V_B''(h)]R \partial_x R + \left( \frac{1-\lambda}{\alpha} b^2 - \frac{1}{2} m_2 - \frac{\beta}{\alpha} b \right) \partial_x^2 R \right] = 0 \quad (27)$$

其中,  $V_F''(h) = \frac{d^2 V_F(\Delta x_n(t))}{d(\Delta x_n(t))^2} \Big|_{\Delta x_n=h}$ ,  $V_B''(h) = \frac{d^2 V_B(\Delta x_{n-1}(t))}{d(\Delta x_{n-1}(t))^2} \Big|_{\Delta x_{n-1}=h}$ ,  $\partial_T R = \frac{\partial R}{\partial T}$ ,  $\partial_x^k R = \frac{\partial^k R}{\partial X^k}$ 。

令  $b = m_1$ , 并将  $\alpha = 1/\tau$  代入式(27)化简得:

$$\partial_T R - [pV_F''(h) + (1-p)V_B''(h)]R \partial_x R = \left( \frac{1}{2} m_2 + \beta \tau m_1 - (1-\lambda) \tau m_1^2 \right) \partial_x^2 R \quad (28)$$

由于稳定性条件为  $\tau < \frac{m_2}{2m_1[(1-\lambda)m_1 - \beta]}$ , 故有  $\frac{1}{2} m_2 + \beta \tau m_1 - (1-\lambda) \tau m_1^2 > 0$ , 因而(28)是 Burgers 方程, 它有一个解为:

$$R(X, T) = \frac{1}{[pV_F''(h) + (1-p)V_B''(h)]T} \left[ X - \frac{\eta_n + \eta_{n+1}}{2} \right] - \frac{\eta_{n+1} - \eta_n}{2[pV_F''(h) + (1-p)V_B''(h)]T} \times \tanh \left[ \frac{(\eta_{n+1} - \eta_n)(X - \zeta_n)}{4[pV_F''(h) + (1-p)V_B''(h)]T} \left( \frac{1}{2} m_2 + \beta \tau m_1 - (1-\lambda) \tau m_1^2 \right) \right] \quad (29)$$

其中,  $\eta_n$  代表沿着  $x$  轴的斜率,  $\zeta_n$  代表激波的波前坐标;  $m_1 = pV_F'(h) + (1-p)V_B'(h)$  为三角激波相对车辆向后的传播速度, 且随着车头间距的增大, 传播速度越小。

设  $B = \frac{1}{2} m_2 + \beta \tau m_1 - (1-\lambda) \tau m_1^2$ , 则可知当  $\lambda$  增大时,  $B$  也随之增大。Burgers 方程的解  $R(X, T)$  变小,

由于车间距  $\Delta x_n(t) = h + \varepsilon R(X, T)$ , 故自动驾驶车辆以更接近于安全距离  $h$  的状态行驶, 从而使得交通流越趋于保持稳定。因此, 考虑前车加速度信息能够提升交通流的稳定性和道路的通行能力。

#### 4.2. 在不稳定区域内导出 mKdV 方程和孤立波解

在不稳定区域内, 满足线性稳定性条件:  $\alpha < 2m_1[(1-\lambda)m_1 - \beta]/m_2$

在临界点  $(h_c, \tau_c)$  附近, 对空间变量  $n$  和时间变量  $t$ , 定义慢变量  $X$  和  $T$  为:

$$X = \varepsilon(n + bt), \quad T = \varepsilon^3 t \quad (30)$$

其中,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 且  $b$  是待定常数。设车头间距为:

$$\Delta x_n(t) = h_c + \varepsilon R(X, T) \quad (31)$$

将式(24)、(25)、(26)和(31)代入(21)中, 泰勒展开到  $\varepsilon^5$  量级, 整理得到偏微分方程:

$$\begin{aligned} & (b-m_1)\partial_x R + \varepsilon \left[ (1-\lambda)b^2\tau - \frac{1}{2}m_2 - \beta b\tau \right] \partial_x^2 R \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \partial_T R - \left[ \frac{1}{6}m_1 - \beta b\tau \left( q - \frac{3}{2} \right) + \lambda b^2\tau \right] \partial_x^3 R - \frac{1}{6} [pV_F'''(h_c) + (1-p)V_B'''(h_c)] \partial_x R^3 \right\} \\ & + \varepsilon^3 \left\{ [2(1-\lambda)b\tau - \beta\tau] \partial_x \partial_T R - \left[ \frac{1}{24}m_2 - \beta b\tau \left( q - \frac{7}{6} \right) + \frac{1}{2}\lambda b^2\tau \right] \partial_x^4 R \right\} \\ & - \varepsilon^3 \left\{ \frac{1}{12} [pV_F'''(h_c) - (1-p)V_B'''(h_c)] \partial_x^2 R^3 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$



其中:  $\tau = 1/\alpha$ ,  $V_F'''(h_c) = \frac{d^3 V_F(\Delta x_n(t))}{d(\Delta x_n(t))^3} \Big|_{\Delta x_n=h_c}$ ,  $V_B'''(h_c) = \frac{d^3 V_B(\Delta x_{n-1}(t))}{d(\Delta x_{n-1}(t))^3} \Big|_{\Delta x_{n-1}=h_c}$

记  $m_3 = pV_F'''(h_c) + (1-p)V_B'''(h_c)$ ,  $m_4 = pV_F'''(h_c) - (1-p)V_B'''(h_c)$ 。令  $b = m_1$ , 消去第一项, 而第二项为零。在临界点  $(h_c, \tau_c)$  附近, 令  $\tau = (1 + \varepsilon^2)\tau_c$ , 代入方程(32)中, 得:

$$\begin{aligned} & \partial_T R - \left[ \frac{1}{6} m_1 - \beta m_1 \tau_c \left( q - \frac{3}{2} \right) + \lambda m_1^2 \tau_c \right] \partial_X^3 R - \frac{1}{6} m_3 \partial_X R^3 \\ & + \varepsilon \left\{ \left[ 2(1-\lambda)m_1\tau_c - \beta\tau_c \right] \partial_X \partial_T R - \left[ \frac{1}{24} m_2 - \beta m_1 \tau_c \left( q - \frac{7}{6} \right) + \frac{1}{2} \lambda m_1^2 \tau_c \right] \partial_X^4 R \right\} \\ & - \varepsilon \left[ \frac{1}{12} m_4 \partial_X^2 R^3 - \left[ (1-\lambda)m_1^2 - \beta m_1 \right] \tau_c \partial_X^2 R \right] = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

又设  $\partial_X \partial_T R = \left[ \frac{1}{6} m_1 - \beta m_1 \tau_c \left( q - \frac{3}{2} \right) + \lambda m_1^2 \tau_c \right] \partial_X^4 R + \frac{1}{6} m_3 \partial_X^2 R^3$ , 则方程(33)化简为:

$$\partial_T R - a_1 \partial_X^3 R + a_2 \partial_X R^3 + \varepsilon \left( a_3 \partial_X^2 R + a_4 \partial_X^4 R + a_5 \partial_X^2 R^3 \right) = 0 \tag{34}$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6} m_1 - \beta m_1 \tau_c \left( q - \frac{3}{2} \right) + \lambda m_1^2 \tau_c, \quad a_2 = -\frac{1}{6} m_3, \quad a_3 = (1-\lambda)m_1^2 \tau_c - \beta m_1 \tau_c, \\ a_4 &= \left[ 2(1-\lambda)m_1\tau_c - \beta\tau_c \right] \cdot \left[ \frac{1}{6} m_1 - \beta m_1 \tau_c \left( q - \frac{3}{2} \right) + \lambda m_1^2 \tau_c \right] - \left[ \frac{1}{24} m_2 - \beta m_1 \tau_c \left( q - \frac{7}{6} \right) + \frac{1}{2} \lambda m_1^2 \tau_c \right], \\ a_5 &= \frac{2m_3 \left[ 2(1-\lambda)m_1\tau_c - \beta\tau_c \right] - m_4}{12}. \end{aligned}$$

对(34)式作线性变换:  $T = \frac{1}{a_1} T_k$ ,  $R = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} R_k$ , 得到:

$$\frac{\partial R_k}{\partial T_k} - \frac{\partial^3 R_k}{\partial X^3} + \frac{\partial R_k^3}{\partial X} + \varepsilon \left[ \frac{a_3}{a_1} \frac{\partial^2 R_k}{\partial X^2} + \frac{a_4}{a_1} \frac{\partial^4 R_k}{\partial X^4} + \frac{a_5}{a_2} \frac{\partial^2 R_k^3}{\partial X^2} \right] = 0 \tag{35}$$

忽略式(35)中的校正项  $O(\varepsilon)$ , 得到标准的 mKdV 方程, 它的扭结 - 反扭结波解为:

$$R_{k_0}(X, T_k) = \sqrt{c} \tanh \sqrt{\frac{c}{2}} (X - cT_k) \tag{36}$$

其中,  $c$  是扭结 - 反扭结波的传播速度, 根据文献[13], 可以得到传播速度  $c$  的值为:

$$c = \frac{5a_2 a_3}{2a_2 a_4 - 3a_1 a_5} \tag{37}$$

替换回原变量, 可以得到 mKdV 方程的解如下:

$$R(X, T) = \sqrt{\frac{a_1 c}{a_2}} \tanh \sqrt{\frac{c}{2}} (X - ca_1 T) \tag{38}$$

于是, 将式(38)代入式(31)中, 得到用扭结 - 反扭结波表示的车头间距解:

$$\Delta x_n(t) = h_c \pm \sqrt{\frac{a_1 c}{a_2} \left( \frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right)} \tanh \left\{ \sqrt{\frac{c}{2} \left( \frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right)} \left[ n + \left( m_1 - c a_1 \left( \frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right) \right) t \right] \right\} \quad (39)$$

由此得到扭结 - 反扭结波的振幅  $A_1$  为:

$$A_1 = \sqrt{\frac{a_1 c}{a_2} \left( \frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right)} \quad (40)$$

扭结 - 反扭结解表示交通流中由自由阶段和拥挤阶段所形成的共存相, 共存曲线可用于描述交通流状况。自由相和拥挤相的车头间距分别为  $\Delta x_n(t) = h_c + A_1$  和  $\Delta x_n(t) = h_c - A_1$ 。解(40)表明, 当选取适当参数使振幅  $A_1$  减小时, 扭结 - 反扭结波的波动越小, 交通流越稳定, 道路也就越通畅。

## 5. 数值模拟

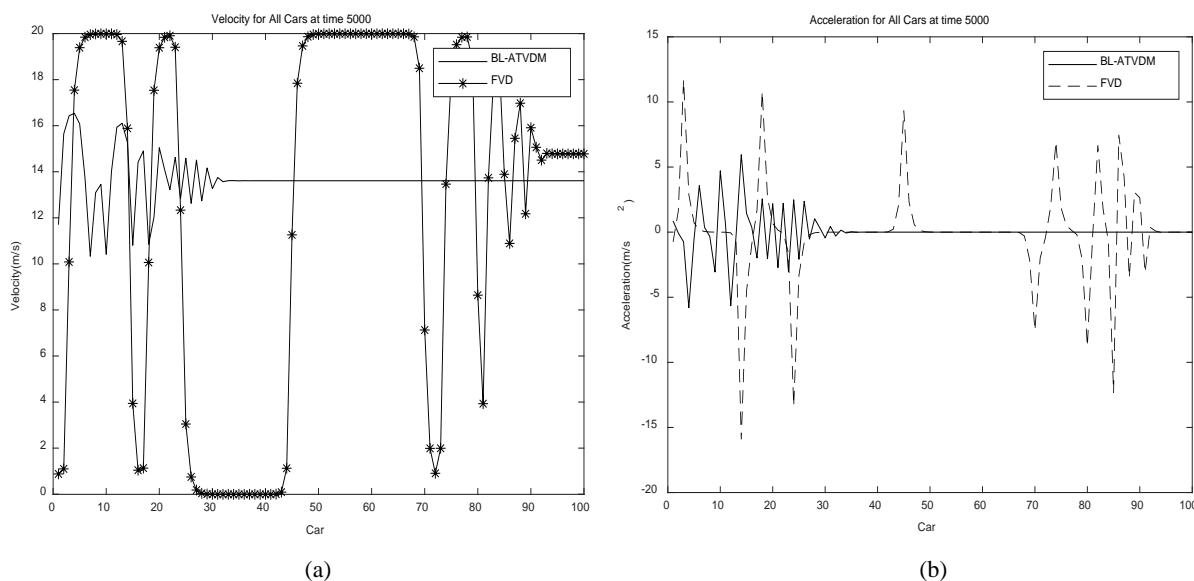
本节将通过 Matlab 数值模拟来验证前面的理论结果, 并进一步分析后视镜效应和前车加速度信息对自动驾驶车辆交通流稳定性的影响。

假设自动驾驶车辆数  $N = 100$ , 道路长度  $L = 800$  m, 所有自动驾驶车辆均匀分布在单行道上, 采样时间间隔为 0.1 秒, 仿真步长为 10,000。根据文献[18]和文献[21], 设置模型的参数为:  $\alpha = 0.85$ ,  $p = 0.92$ ,  $q = 0.7$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\alpha_F = \alpha_B = V_{\max}/2$ , 安全间距  $h_c = 4$  m, 车辆的最大速度  $v_{\max} = 20$  m/s (即 72 km/h)在周期性边界条件下进行数值模拟。初始状态车流稳定时, 对前车施加一个小扰动, 即:

$$x_1(0) = L/N + 1, x_n(0) = n \cdot L/N, (n = 2, 3, \dots, N)$$

$$v_n(0) = pV_F(L/N) + (1-p)V_B(L/N), (n = 1, 2, 3, \dots, N)$$

为比较 BL-ATVD 模型与 FVD 模型的稳定性状态, 用 Matlab 软件编写程序进行计算, 得到的速度与加速度图数值模拟仿真结果如图 2 所示(仿真时间为 500 秒):



**Figure 2.** (a) Velocity diagram of BL-ATVD model and FVD model; (b) Acceleration diagram of BL-ATVD model and FVD model

**图 2.** (a) BL-ATVD 模型与 FVD 模型的速度图; (b) BL-ATVD 模型与 FVD 模型的加速度图

在交通流达到稳定状态时, BL-ATVD 模型和 FVD 模型中的所有车辆均以恒定的速度行驶。由图 2(a) 和图 2(b)可知, BL-ATVD 模型中车辆的速度和加速度波动明显小于 FVD 模型, 且车辆达到稳定状态时间先于 FVD 模型。特别地, 在图 2(a)中, FVD 模型第 26~43 辆车的速度曾一度为 0, 说明对前车施加的扰动造成了交通拥堵现象, 而 BL-ATVD 模型中没有车辆速度为 0, 即对前车施加的扰动只是对车辆速度和加速度产生了波动, 并没有造成拥堵情况, 且随着时间的推移, 交通流逐渐恢复到稳定状态。这表明, 考虑后视效应和前车加速度信息有效提升了交通流的稳定性。

进一步对后视效应权重系数  $p$  和前车加速度敏感系数  $\lambda$  分别取定不同的值, 用 Matlab 软件编程计算, 得到自动驾驶车辆加速度仿真结果如图 3 和图 4 所示:

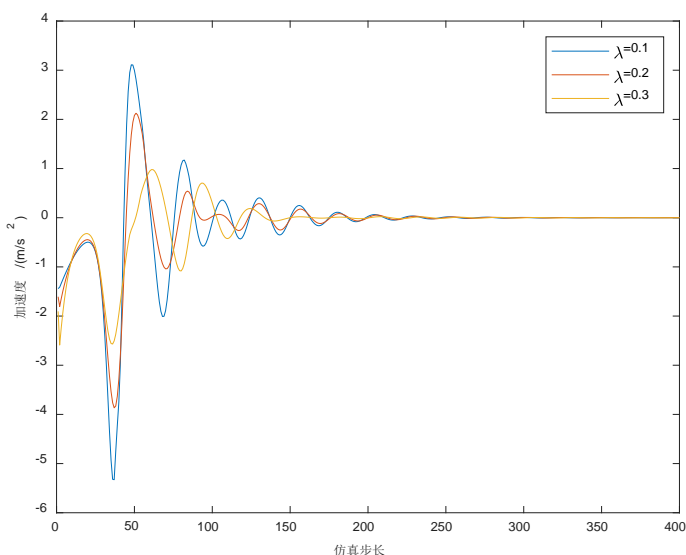


Figure 3. Vehicle acceleration map under different  $\lambda$  values of BL-ATVD model  
图 3. BL-ATVD 模型不同  $\lambda$  值下的车辆加速度图

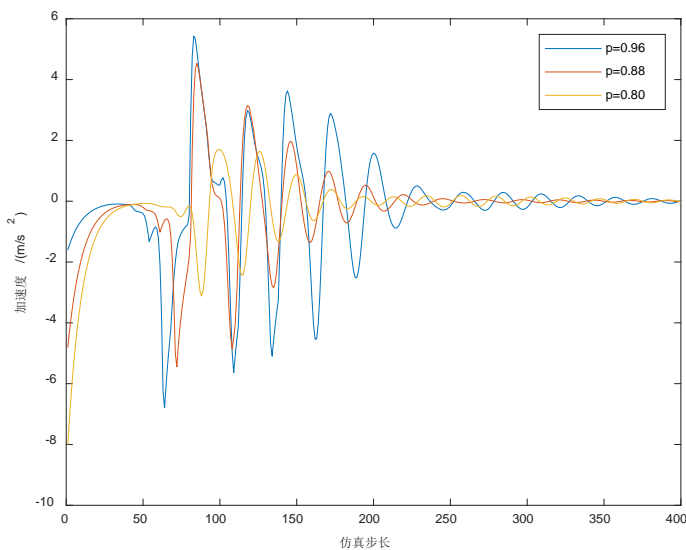


Figure 4. Vehicle acceleration map under different  $p$  values of BL-ATVD model  
图 4. BL-ATVD 模型不同  $p$  值下的车辆加速度图

图 3 是 BL-ATVD 模型在不同  $\lambda$  值下, 通过 Matlab 编程进行仿真得到的车辆的加速度对比图。为了验证前车加速度信息对车辆稳定性的影响,  $\lambda$  分别取值 0.1, 0.2, 0.3, 其他参数值为固定的设置值。从图 3 可知, 随着  $\lambda$  取值的增加, 车辆加速度波动减小, 且更快地趋于 0。这表明, 考虑前车加速度信息的确提升了交通流的稳定性, 并且  $\lambda$  的值越大, 对交通流稳定性的提升效果越明显, 这与前面的理论分析结果相一致。

图 4 是 BL-ATVD 模型在不同  $p$  值下, 通过 Matlab 编程进行仿真得到的车辆的加速度对比图。 $p_i = (0.96, 0.88, 0.80)$ , 其他参数值为固定的设置值。由图 4 可知, 当对车流施加初始扰动后, 车辆加速度均发生了剧烈波动, 随着仿真时间的增加, 车辆加速度逐渐趋近 0, 即交通流恢复稳定状态。经过对比分析, 可以看到不同  $p$  值下车流加速度波动不一,  $p$  值越大加速度波动越剧烈,  $p$  值越小, 加速度的波动越平缓。这表明, 考虑车辆后视效应的影响对交通流的稳定性提升具有促进作用。

## 6. 结论

本文在无人驾驶环境下, 考虑车辆自动监控获取后视效应和前车加速度信息对跟驰行为所产生的影响, 以双速度差模型作为基础, 提出了 BL-ATVD 模型。首先, 对模型进行线性稳定性分析, 绘制了模型的中性稳定性曲线, 对比分析和计算得到: BL-ATVD 模型在后视效应和前车加速度信息参数下的稳定区域较 OV、TVD、BLVD 模型明显扩大。其次, 用约化摄动法对模型进行非线性分析, 导出了模型在稳定区域的 Burgers 方程和不稳定区域的 mKdV 方程及其对应的孤立波解, 用以描述车流的密度波变化。最后, 对模型进行了数值仿真, 结果表明, 减小后视效应的权重系数  $p$  或者增大前车加速度的敏感系数  $\lambda$ , 均可有效提升交通流的稳定性, 由此进一步验证了理论分析结果的可靠性。

## 参考文献

- [1] 罗嘉陵. 基于无人驾驶环境的改进跟驰模型研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2019.
- [2] 刘岩. 车辆跟驰模型研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连交通大学, 2006.
- [3] Pipes, L.A. (1967) Car Following Models and the Fundamental Diagram of Road Traffic. *Transportation Research*, **1**, 21-29. [https://doi.org/10.1016/0041-1647\(67\)90092-5](https://doi.org/10.1016/0041-1647(67)90092-5)
- [4] Chandler, R.E., Herman, R. and Montroll, E.W. (1958) Traffic Dynamics: Studies in Car Following. *Operations Research*, **6**, 165-184. <https://doi.org/10.1287/opre.6.2.165>
- [5] Gazis, D.C. and Rothery, H. (1961) Nonlinear Follow-the-Leader Models of Traffic Flow. *Operations Research*, **9**, 545-567. <https://doi.org/10.1287/opre.9.4.545>
- [6] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., et al. (1995) Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation. *Physical Review E*, **51**, 1035-1042. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.1035>
- [7] Helbing, D. and Tilch, B. (1998) Generalized Force Model of Traffic Dynamics. *Physical Review E*, **58**, 133-138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.133>
- [8] Jiang, R., Wu, Q. and Zhu, Z. (2001) Full Velocity Difference Model for a Car-Following Theory. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **64**, Article ID: 017101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.017101>
- [9] Peng, G.H., Cai, X.H., Liu, C.Q., et al. (2011) Optimal Velocity Difference Model for a Car-Following Theory. *Physics Letters A*, **375**, 3973-3977. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.09.037>
- [10] Ge, H.X., Cheng, R.J. and Li, Z.P. (2012) Two Velocity Difference Model for a Car Following Theory. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **387**, 5239-5245. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.02.081>
- [11] 和光球. 含智能提示限速信息和多时滞的最优速度模型的稳定性和孤立波[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2020. <https://doi.org/10.27459/d.cnki.gynfc.2020.000253>
- [12] 曹芳. 含有智能提示限速和驾驶员反应信息的全速度差模型的稳定性和孤立波研究[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2020, 29(4): 338-343 <https://doi.org/10.27459/d.cnki.gynfc.2020.000541>
- [13] 李良鹏. 在 V2V 智能网联环境下的车辆防碰撞跟驰模型[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2022.
- [14] 周琳, 李良鹏, 化存才. 在智能网联车中考虑电子节气门开度的多前车速度差的跟驰模型[J]. 应用数学进展,

- 2021, 10(9): 2996-3009.
- [15] 乔维高, 徐学进. 无人驾驶汽车的发展现状及方向[J]. 上海汽车, 2007(7): 40-43.
- [16] Talebpour, A. and Mahmassani, H.S. (2016) Influence of Connected and Autonomous Vehicles on Traffic Flow Stability and Throughput. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, **71**, 143-163. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2016.07.007>
- [17] Klawtanong, M. and Limkumnerd, S. (2020) Dissipation of Traffic Congestion Using Autonomous-Based Car-Following Model with Modified Optimal Velocity. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **542**, Article ID: 123412.
- [18] Ma, M., Ma, G. and Liang, S. (2021) Density Waves in Car-Following Model for Autonomous Vehicles with Backward Looking Effect. *Applied Mathematical Modelling*, **94**, 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.002>
- [19] Gu, H.Y., Zhang, J., Jin, P.J., *et al.* (2018) Stability Analysis of Lead-Vehicle Control Model in Cooperative Adaptive Cruise Control Platoon within Heterogeneous Traffic Flow. *Journal of Southeast University (English Edition)*, **34**, 386-393.
- [20] Newell, G.F. (1961) Nonlinear Effects in the Dynamics of Car Following. *Operations Research*, **9**, 209-229. <https://doi.org/10.1287/opre.9.2.209>
- [21] 孙棣华, 张建厂, 赵敏, 等. 考虑后视效应和速度差信息的跟驰模型[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2012, 49(1): 115-120.