Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4806-4817
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117505

Hans汉斯

对称性在积分计算中的应用

刘晓伟[1]，**宋妙缘**[1]，**王　超**[2*]

[1]河北工程大学，数理科学与工程学院，河北 邯郸
[2]河北工程大学，信息与电气工程学院，河北 邯郸

收稿日期：2022年6月19日；录用日期：2022年7月18日；发布日期：2022年7月25日

摘　要

积分计算是高等数学的重要内容之一。在计算积分的过程中，若不能掌握正确的方法和技巧，往往会把简单的问题复杂化。通过分析积分区域的对称性、被积函数的对称性及积分变量的轮换对称性，给出一些重要的结论，并将其应用到积分计算中。

关键词

对称性，积分，被积函数，积分区域

Application of Symmetry in Integrals

Xiaowei Liu[1], **Miaoyuan Song**[1], **Chao Wang**[2*]

[1]School of Mathematics and Physics Science and Engineering, Hebei University of Engineering, Handan Hebei
[2]School of Information and Electronic Engineering, Hebei University of Engineering, Handan Hebei

Received: Jun. 19th, 2022; accepted: Jul. 18th, 2022; published: Jul. 25th, 2022

Abstract

Integral is one of the important contents of advanced mathematics. In the process of calculating integrals, simple problems are often complicated if the correct methods and techniques are not mastered. By analyzing the symmetry of the integration region, the symmetry of the product function and the rotation symmetry of the integral variable, some important conclusions are given and applied to the integral calculation.

Keywords

Symmetry, Integral, Quadratic Function, Integral Region

[*]通讯作者。

文章引用: 刘晓伟, 宋妙缘, 王超. 对称性在积分计算中的应用[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4806-4817.
DOI: 10.12677/aam.2022.117505

1. 引言

在积分求解的过程中，利用对称性是一个非常重要的技巧。一元复杂函数和多元函数的积分计算及证明往往十分繁琐，用换元法或分部积分法等方法解决并不容易，甚至十分困难。如果我们能够掌握积分区域的对称性、被积函数的对称性以及积分变量的轮换对称性等重要结论，并合理地应用到实际问题中，往往能够简化积分求解过程，甚至不用计算就可以直接判断出一些问题的结果。另外，并不是所有问题都有对称性，如果某些问题没有明显的对称性，这就需要我们分析题目的特点，构造对称性，从而达到化难为易的目的。本文分别给出了对称性在定积分[1]、重积分[2]、第一二型曲线积分和第一二型曲面积分[3]中的相关理论及应用。

2. 对称性在定积分计算中的应用

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上可积：

1) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

2) 如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

证明：1) 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x) = -f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

在等号右边的第一个式子中令 $x=-t$，则有

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

结论得证。

2) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x) = f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

在等号右边的第一个式子中令 $x=-t$，则有

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

结论得证。

定理 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

若积分区间变为$[0,a]$，相应地，结论变为

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$$

证明：令$a+b-x=t$，则$x=a$时，$t=b$；$x=b$时，$t=a$。

于是

$$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

结论得证。

定理 3 设函数$f(x)$在闭区间$[0,a]$上可积，如果$f(x)=f(a-x)$，即$f(x)$是关于区间中点的偶函数，则有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

证明：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x$，在等号右边的第二个式子里，令$x=a-t$，则

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

结论得证。

定理 4 设函数$f(x)$在闭区间$[0,a]$上可积，如果$f(x)=-f(a-x)$，即$f(x)$是关于区间中点的奇函数，则有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0$$

证明：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x$在等号右边的第二个式子里，令$x=a-t$，则

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a}{2}}^0 -f(a-t)(-\mathrm{d}t)=-\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x=0$$

结论得证。

例 1 设函数$f(x)$在区间$[0,a]$上连续，且$f(x)+f(a-x)\neq 0$，计算

$$I=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x$$

解：令$x=a-t$，则有

$$I=\int_a^0 \frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}(-\mathrm{d}t)=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x$$

于是

$$2I=\int_0^a\frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=\int_0^a 1\mathrm{d}x=a$$

所以

$$I=\frac{a}{2}$$

例 2 计算

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解：令 $x=\tan t$，则 $x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$

于是

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2 t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln(\cos t+\sin t)-\ln\cos t\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)-\ln\cos t\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由定理 1 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t$$

综上，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln\sqrt{2}}{4}$$

3. 对称性在二重积分计算中的应用

定理 5 设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 上连续，

1) 当 R 关于 x 轴对称时

a) 如果 $f(x,y)=f(x,-y)$，则

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}x=2\iint\limits_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}x$$

其中 $R_1=\{(x,y)\in R\mid y\geq 0\}$。

b) 如果 $f(x,y)=-f(x,-y)$，则

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}x=0$$

2) 当 R 关于 y 轴对称时

a) 如果 $f(x,y)=f(-x,y)$，则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x = 2\iint_{R_2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

其中 $R_2=\{(x,y)\in R \mid x\geq 0\}$。

b) 如果 $f(x,y)=-f(-x,y)$，则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x = 0$$

定理 6 设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 上连续，并且 R 关于原点对称：

1) 如果 $f(x,y)=f(-x,-y)$，则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x = 2\iint_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}x = 2\iint_{R_2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

其中 $R_1=\{(x,y)\in R \mid y\geq 0\}$， $R_2=\{(x,y)\in R \mid x\geq 0\}$。

2) 如果 $f(x,y)=-f(-x,-y)$，则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x = 0$$

定理 7 设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 上连续，并且 R 具有轮换对称性，则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_R f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

例 3 证明当 $(z-a)\varphi(x)+(z-b)\varphi(y)=0$ 时， $x^2+y^2=c^2\ (c>0)$ 和 $z=0$

围成立体的体积等于 $\frac{1}{2}\pi c^2(a+b)$，其中 φ 为任意正的可积函数，且 $a>0$， $b>0$。

证明： $(z-a)\varphi(x)+(z-b)\varphi(y)=0$，即 $z=\dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}$

$$V=\iint_R z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $R=\{(x,y)\mid x^2+y^2=c^2, c>0\}$。

显然区域 R 具有轮换对称性，所以

$$V=\iint_R \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}2V&=\iint_R \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_R \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_R \frac{(a+b)(\varphi(x)+\varphi(y))}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R (a+b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi c^2(a+b)\end{aligned}$$

所以

$$V=\frac{1}{2}\pi c^2(a+b)$$

例 4 计算

$$I=\iint\limits_{R}\left(|x|+|y|\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $R=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 9\right\}$。

解：

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{R}\left(|x|+|y|\right)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{R_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^3 r^2(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}r\\&=36\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta=72\end{aligned}$$

例 5 计算

$$I=\iint\limits_{D}\left(x^2+3x-5y+2\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $R=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$。

解：

$$I=\iint\limits_{D}\left(x^2+3x-5y+2\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{R}x^2\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{R}(3x-5y)\mathrm{d}\sigma+2\iint\limits_{R}\mathrm{d}\sigma$$

因为区域 R 关于原点对称，并且 $3x-5y=-\left[(-3x)-(-5y)\right]$，所以

$$\iint\limits_{R}(3x-5y)\mathrm{d}\sigma=0$$

所以

$$I=\iint\limits_{R}x^2\mathrm{d}\sigma+2\iint\limits_{R}\mathrm{d}\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r+2\pi=\frac{9}{4}\pi$$

4. 对称性在三重积分计算中的应用

定理 8 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭体 V 中连续，并且 V 关于 yoz 平面对称：

1) 如果 $f(x,y,z)=f(-x,y,z)$，则

$$\iiint\limits_{V}f(x,y,z)\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{V_1}f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

其中 $V_1=\left\{(x,y,z)\in V\mid x\ge 0\right\}$。

2) 如果 $f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$，则

$$\iiint\limits_{V}f(x,y,z)\mathrm{d}V=0$$

同理可得 V 关于 xoy(或 xoz)平面对称的情形。

定理 9 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭体 V 中连续，并且 V 关于原点对称：

1) 如果 $f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$，则

$$\iiint\limits_{V}f(x,y,z)\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{V_1}f(x,y,z)\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{V_2}f(x,y,z)\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{V_3}f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

其中 $V_1=\left\{(x,y,z)\in V\mid x\ge 0\right\}$，$V_2=\left\{(x,y,z)\in V\mid y\ge 0\right\}$，$V_3=\left\{(x,y,z)\in V\mid z\ge 0\right\}$。

2) 如果 $f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=0$$

定理 10 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭体 V 中连续，并且 V 具有轮换对称性，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega f(y,z,x)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega f(z,x,y)\mathrm{d}V$$

例 6 计算

$$I=\iiint_V (x+z)\mathrm{d}V$$

其中 V 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域。

解：

$$I=\iiint_V x\mathrm{d}V+\iiint_V z\mathrm{d}V=0+\iiint_V z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$$

例 7 计算

$$\iiint_V (x+y+z)^2\mathrm{d}V$$

其中 $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1\}$。

解：

$$\begin{aligned}\iiint_V (x+y+z)^2\mathrm{d}V&=\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\right)\mathrm{d}V=3\iiint_V x^2\mathrm{d}V+6\iiint_V xy\mathrm{d}V\\&=3\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+6\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xy\mathrm{d}x=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

例 8 计算

$$\iiint_V (x+z)^2\mathrm{d}V$$

其中 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,z\ge 0\}$。

解：

$$\begin{aligned}\iiint_V (x+z)^2\mathrm{d}V&=\iiint_V \left(x^2+2xz+z^2\right)\mathrm{d}V=\iiint_V \left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_{V_1}\left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{3}\iiint_{V_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi\end{aligned}$$

其中 $V_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$。

5. 对称性在第一型曲线积分计算中的应用

定理 11 [4]设二元函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线段 L 上可积，并且 L 关于 x 轴对称：

1) 如果 $f(x,y)=f(x,-y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$$

其中 $L_1=\{(x,y)\in L\,|\,y\ge 0\}$。

2) 如果 $f(x,y)=-f(x,-y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0.$$

同理可得当曲线段 L 关于 y 轴对称的情形。

定理 12 设二元函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线段 L 上可积，并且 L 关于原点对称：

1) 如果 $f(x,y)=f(-x,-y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s=4\int_{L_3} f(x,y)\mathrm{d}s$$

其中 $L_1=\{(x,y)\in L\,|\,y\ge 0\}$， $L_2=\{(x,y)\in L\,|\,x\ge 0\}$， $L_3=\{(x,y)\in L\,|\,x\ge 0,y\ge 0\}$。

2) 如果 $f(x,y)=-f(-x,-y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0.$$

定理 13 设二元函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线段 L 上可积，并且 L 具有轮换对称性，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s$$

例 9 计算

$$I=\int_L\left(x^2+y^3\right)\mathrm{d}s$$

其中 $L=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=R^2\}$。

解：显然 L 关于原点对称，所以由定理 12 可得

$$\begin{aligned}I&=\int_L\left(x^2+y^3\right)\mathrm{d}s=\int_L x^2\mathrm{d}s+\int_L y^3\mathrm{d}s=4\int_{L_1} x^2\mathrm{d}s+0\\&=4\int_0^R x^2\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x=\pi R^3\end{aligned}$$

例 10 计算

$$\int_L\left(3x^2+4y^2+5xy^2\right)\mathrm{d}s$$

其中 $L=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right\}$，周长为 a。

解：显然 L 关于 y 轴对称，所以由定理 11 可得

$$\int_L\left(3x^2+4y^2+5xy^2\right)\mathrm{d}s=\int_L\left(3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s+\int_L 5xy^2\mathrm{d}s=12a+0=12a$$

例 11 [5]计算

$$\int_L z^2\mathrm{d}s$$

其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $x+y+z=0$ 所截部分。

解：

$$\int_L z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\left[\int_L x^2\mathrm{d}s+\int_L y^2\mathrm{d}s+\int_L z^2\mathrm{d}s\right]=\frac{1}{3}\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_L\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3$$

6. 对称性在第二型曲线积分计算中的应用

定理 14 设二元函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向曲线段 L 上连续，并且 L 关于 x 轴对称：

1) 如果 $P(x,y)=P(x,-y)$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0$$

2) 如果 $P(x,y)=-P(x,-y)$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x$$

3) 如果 $Q(x,y)=-Q(x,-y)$，则

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

4) 如果 $Q(x,y)=Q(x,-y)$，则

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=2\int_{L_1} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

其中 $L_1=\{(x,y)\in L \mid y\ge 0\}$。

同理可得当 L 关于 y 轴对称的情形。

定理 15 设二元函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向曲线段 L 上连续，并且 L 关于原点对称：

1) 如果 $P(-x,-y)=P(x,y)$ 且 $Q(-x,-y)=Q(x,y),(x,y)\in L$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

2) 如果 $P(-x,-y)=-P(x,y)$ 且 $Q(-x,-y)=-Q(x,y),(x,y)\in L$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

其中 $L_1=\{(x,y)\in L \mid x\ge 0 \text{或} y\ge 0\}$。

定理 16 设二元函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向曲线段 L 上连续，并且 L 具有轮换对称性，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_L P(y,x)\mathrm{d}y$$

例 12 计算

$$\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$

其中 $L=\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1\right\}$，沿顺时针方向。

解：$P(x,y)=y^2,Q(x,y)=x^2$，因为 L 关于原点对称，由定理 15 可得

$$\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$$

例 13 计算

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2y^2+1}$$

其中 $L=\{(x,y) \mid |x|+|y|=1\}$，沿逆时针方向。

解：

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2y^2+1}=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{x^2y^2+1}+\int_L \frac{\mathrm{d}y}{x^2y^2+1}$$

因为 L 关于 x 轴对称，且 $\frac{1}{x^2y^2}$ 是关于 y 的偶函数，则由定理 1 知

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{x^2y^2+1}=0$$

又因为 L 具有轮换对称性，所以

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{x^2y^2+1}=\int_L \frac{\mathrm{d}y}{x^2y^2+1}=0$$

综上

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2y^2+1}=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{x^2y^2+1}+\int_L \frac{\mathrm{d}y}{x^2y^2+1}=0$$

7. 对称性在第一型曲面积分计算中的应用

定理 17 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 上可积，并且 S 关于 xoy 平面对称：

1) 如果 $f(x,y,z)=f(x,y,-z)$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=2\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $S_1=\{(x,y,z)\in S \mid z\geq 0\}$。

2) 如果 $f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=0$$

同理可得当曲面 S 关于 xoz 平面(或 yoz 平面)对称时的结论。

证明：

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma&=\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma+\iint_{S_2} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint_{D_{xy}} f[x,y,-z(x,y)]\sqrt{1+(-z_x)^2+(-z_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\{f[x,y,z(x,y)]+f[x,y,-z(x,y)]\}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 $S_1=\{(x,y,z)\in S \mid z\geq 0\}$，$S_2=\{(x,y,z)\in S \mid z\leq 0\}$，所以

1) 当 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 时，有

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=2\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

2) 当 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 时，有

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=0$$

定理 18 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 上可积，并且 S 具有轮换对称性，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=\iint_S f(y,z,x)\mathrm{d}\sigma=\iint_S f(z,x,y)\mathrm{d}\sigma$$
$$=\frac{1}{3}\iint_S\left[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)\right]\mathrm{d}\sigma$$

例 13 计算

$$\iint_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}\sigma$$

其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分。

解：

$$\iint_\Sigma(xy+yz+zx)\mathrm{d}s=0+0+\iint_\Sigma zx\mathrm{d}s=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta\mathrm{d}r$$
$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

8. 对称性在第二型曲面积分中的应用

定理 19 设三元函数 $P(x,y,z)$ 在逐片光滑的曲面 S 上有定义，并且 S 关于 yoz 平面对称：

1) 如果 $P(x,y,z)=P(-x,y,z)$，则

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

2) 如果 $P(x,y,z)=P(-x,y,z)$，则

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{S_1}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

定理 20 设三元函数 $P(x,y,z)$ 在逐片光滑的曲面 S 上有定义，并且 S 具有轮换对称性，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S f(y,z,x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_S f(z,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 14 计算

$$\oiint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为 $z^2=x^2+y^2\ (0\le z\le h)$ 的下侧。

解：因为 Σ 关于 xoz 和 yoz 平面对称，并且两侧方向相反，所以由定理 19 可得

$$\oiint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\oiint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r^3\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}h^4$$

其中 $D_{xy}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le h^2\right\}$。

9. 结论

在积分计算过程中，常见的方法有换元法和分部积分法等。然而，当遇到复杂函数积分计算和证明时，特别是涉及到三元或三元以上函数问题时，用常规方法解决往往十分困难。本文利用积分区域对称、被积函数对称及轮换对称，系统、全面地给出了定积分、重积分、第一型曲线积分、第二型曲线积分、第一型曲面积分、第二型曲面积分中的一些重要结论，并通过实例进行验证，得到如下结论：

1) 充分而恰当地使用积分域对称性、被积函数对称性及轮换对称性的特点，能够有效地简化某些积分计算，尤其对于第二类曲面积分来说，可以有效防止路径方向与曲面侧对解题者产生的干扰，使解题难度有效降低，进而提升解题的全面性与准确性；

2) 实际应用中遇到的并非全是对称性问题，这样的问题往往具有很大的难度，与前人研究相比，本文为此类问题提供不同构造对称性的方法，进而转化为对称性问题求解。

对称性在积分运算中占有重要地位，今后将加深对此类问题的研究。在理论上将得到更多重要结论，在应用上将进一步考虑积分对称性在实际生产生活中的应用。

参考文献

[1] 殷锡鸣, 等. 高等数学(下) [M]. 上海: 华东理工大学出版社, 2005.

[2] 吉米多维奇. 数学分析习题集题解(六) [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002.

[3] 同济大学应用数学系. 高等数学(下) [M]. 上海: 同济大学出版社, 2003.

[4] 刘玉琏, 付沛东. 数学分析讲义(下) [M]. 北京: 高等数学教育出版社, 1996.

[5] 林源渠. 高等数学复习指导语与典型例题分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.