

# 半马尔科夫跳变忆阻神经网络的同步采样控制研究

权沈爱\*, 熊良林\*

云南民族大学, 数学与计算机科学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2022年6月25日; 录用日期: 2022年7月20日; 发布日期: 2022年7月27日

## 摘要

本文主要基于采样控制研究半马尔科夫跳变时滞忆阻神经网络的同步问题。首先, 通过微分包含、集值映射以及鲁棒分析方法将具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络转化为带不确定参数的传统半马尔科夫跳变神经网络。其次, 基于采样控制器, 构造一个包含采样信息更多的Lyapunov泛函, 使得采样周期更长, 从而获得保守性更低的同步判据。最后, 通过实例仿真来验证所得理论结果的有效性。

## 关键词

忆阻神经网络, 采样控制, 半马尔科夫跳变, 同步问题, 采样周期

# Sampled-Data Synchronization Control for Semi-Markovian Jump Memristive Neural Networks

Shenai Quan\*, Lianglin Xiong\*

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 25<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jul. 20<sup>th</sup>, 2022; published: Jul. 27<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

This paper investigates the problem of sampled-data synchronization for semi-Markovian jump delayed memristive neural networks. First, the semi-Markovian jump delayed memristive neural networks are converted into traditional semi-Markovian jump neural network with uncertain pa-

\*通讯作者。

rameters by differential inclusion, set-valued mapping and robust analysis. Next, based on the sampled-data controller, a Lyapunov functional with more sampling information is constructed to make the sampling period longer, so as to obtain a new synchronization standard with lower conservatism. Finally, a numerical example illustrates the feasibility and effectiveness of the obtained theory results.

## Keywords

Memristive Neural Networks, Sampled-Data Control, Semi-Markovian Jump, Synchronous Problems, Sampling Period

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自从忆阻器被发现以来[1], 很多学者致力于忆阻器的研究。如在文献[2]中, Sah 等研究发现忆阻器能够很好的模拟人类的大脑行为。文献[3]中, Prezioso 等首次研发出基于忆阻器的神经网络芯片。该芯片的顺利研发, 开启了忆阻神经网络的研究热潮。此后, 忆阻神经网络的动力学行为的研究也受到了大量的关注。

近几十年, 由于忆阻神经网络同步的重要性, 时滞忆阻神经网络的同步问题引起了许多研究者的关注。对于忆阻神经网络的指数同步问题, 文献[4]利用李雅普诺夫泛函理论, 结合不等式技术和牵制控制方法得到了具有反应扩散项的时滞忆阻神经网络指数同步的充分条件。文献[5]将复值忆阻神经网络的驱动-响应模型转化为两个实值忆阻神经网络, 建立了时变时滞复值忆阻神经网络指数同步的一些充分条件。而针对忆阻神经网络的反同步问题, 文献[6]在驱动-响应系统的框架下, 通过 Lyapunov 函数方法和一些不等式技巧, 给出了复值忆阻神经网络反同步的几个充分条件。文献[7]在 Filippov 意义下, 结合不等式技巧得到了随机忆阻神经网络的有限时间反同步准则。

目前, 学者们也提出了许多忆阻神经网络的同步控制方法。比如文献[8]建立了一种新颖的忆阻神经网络的同步误差, 根据同步误差设计相应的自适应控制器, 从而得到了忆阻神经网络的同步充分条件。文献[9]设计了一种具有反馈控制的自适应控制器, 通过 Lyapunov 函数方法实现了一类具有混合时变时滞的广义忆阻神经网络的指数同步。而文献[10]通过设计状态反馈控制器, 研究了具有随机扰动和时变时滞的忆阻递归神经网络的指数同步问题。文献[11]利用状态反馈控制方法, 获得了耦合惯性忆阻神经网络有限时间同步的充分条件。对比以上连续控制方法, 在采样控制的过程中, 仅需要将系统在采样点处的信息传输到控制器中。因此采样控制方法具有以下优点: 1) 有效的减少了信息传输量, 从而节约了网络的通讯资源; 2) 成本较低, 容易实现, 具有较高的可靠性。然而, 使用采样控制器研究忆阻神经网络同步问题的结果还比较少; 因此, 使用采样控制研究忆阻神经网络的同步问题是本文的研究动机之一。

另一方面, 马尔科夫现象在实际情况中是普遍存在的, 比如突然加剧的环境干扰、组件故障等情况。因此, 具有马尔科夫跳变的神经网络也吸引了许多研究者的关注。文献[12]实现了具有部分未知转移概率的马尔科夫跳变忆阻神经网络的有限时间稳定。文献[13]研究了具有反应扩散项的马尔科夫跳变复值忆阻神经网络的有限/固定时间的同步问题及其应用。文献[14]基于采样控制器, 使用代数的方法获得了具有

反应扩散项的马尔科夫跳变时滞忆阻神经网络同步的充分条件。然而, 与马尔科夫过程不同, 半马尔科夫的逗留时间不再服从指数分布, 而是服从更一般的概率分布, 如拉普拉斯分布、韦伯分布等。因此, 研究具有半马尔科夫跳变的忆阻神经网络更具有一般性。所以, 本文的另外一个研究动机是基于采样控制研究具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络的同步问题。

根据上述分析, 本文主要研究基于采样控制的半马尔科夫跳变时滞忆阻神经网络的同步问题。本文内容组织如下: 在第二节中, 将具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络模型通过微分包含理论、集值映射理论以及鲁棒分析技巧转化为具有半马尔科夫跳变的带不确定参数的传统神经网络, 并设计系统相关的采样控制器以及给出必要的引理和定理。在第三节中, 基于采样控制器, 构建一个包含采样信息的 Lyapunov 泛函, 得到具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络同步的充分条件。在第四节中, 给出实例仿真来验证所得理论结果的可行性与有效性。最后, 在第五节给出本文的一个总结。

符号: \* 表示对称矩阵中的对称块,  $R$  是实数域,  $A > 0$  表示  $A$  是正定矩阵,  $A < 0$  表示矩阵  $A$  是负定矩阵,  $I_n$  是  $n$  维单位矩阵,  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置,  $A^{-1}$  表示矩阵  $A$  的逆,  $\|\cdot\|$  表示一个向量的 Euclid 范数或一个矩阵的诱导范数,  $diag\{\dots\}$  是块对角矩阵,  $Sym\{X\}$  表示  $X + X^T$ ,  $\varepsilon\{x\}$  表示随机变量  $x$  的数学期望。设  $\bar{a}_{ij}(r_i) = \max\{\tilde{a}_{ij}(r_i), \hat{a}_{ij}(r_i)\}$ ,  $\underline{a}_{ij}(r_i) = \min\{\tilde{a}_{ij}(r_i), \hat{a}_{ij}(r_i)\}$ ,  $a_{ij}^+(r_i) = \frac{1}{2}(\bar{a}_{ij}(r_i) + \underline{a}_{ij}(r_i))$ ,  $a_{ij}^-(r_i) = \frac{1}{2}(\bar{a}_{ij}(r_i) - \underline{a}_{ij}(r_i))$ ,  $\bar{b}_{ij}(r_i) = \max\{\tilde{b}_{ij}(r_i), \hat{b}_{ij}(r_i)\}$ ,  $\underline{b}_{ij}(r_i) = \min\{\tilde{b}_{ij}(r_i), \hat{b}_{ij}(r_i)\}$ ,  $b_{ij}^+(r_i) = \frac{1}{2}(\bar{b}_{ij}(r_i) + \underline{b}_{ij}(r_i))$ ,  $b_{ij}^-(r_i) = \frac{1}{2}(\bar{b}_{ij}(r_i) - \underline{b}_{ij}(r_i))$ 。

## 2. 模型描述与预备知识

### 2.1. 模型描述

本文考虑以下具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络

$$\dot{x}(t) = -C(r_t)x(t) + A(x(t), r_t)f(x(t)) + B(x(t), r_t)f(x(t - \tau(t))) + I \tag{1}$$

其中,  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  是神经状态向量,  $f(x(\cdot)) = [f_1(x_1(\cdot)), f_2(x_2(\cdot)), \dots, f_n(x_n(\cdot))]^T$  表示非线性神经激活函数;  $C(r_t) = diag\{c_1(r_t), c_2(r_t), \dots, c_n(r_t)\} > 0$  是一个对角矩阵,

$A(x(t), r_t) = (a_{ij}(x_i(t), r_t))_{n \times n}$  和  $B(x(t), r_t) = (b_{ij}(x_i(t), r_t))_{n \times n}$  分别是具有随机跳变过程  $r(t)$  的非时滞和时滞忆阻连接权矩阵, 其中  $r(t)$  是一个表示系统模态有限状态半马尔科夫过程, 即  $r(t)$  在一个给定的有限集  $\wp = \{1, 2, \dots, N\}$  上取离散值。  $I$  是一个外部输入向量,  $\tau(t)$  是时变时滞且满足:  $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ ,  $\dot{\tau}(t) \leq v < 1$  ( $\tau$  与  $v$  是常数)。为了后续描述的方便, 令  $C(r_t)$ ,  $A(x(t), r_t)$ ,  $B(x(t), r_t)$  为  $C_\lambda$ ,  $A_\lambda(x(t))$ ,  $B_\lambda(x(t))$ , 其中  $\lambda \in \wp$ 。

令  $\{r(t), t \geq 0\}$  是概率空间  $(\Omega, \Psi, \mathcal{P})$  上右连续离散状态半马尔科夫过程, 且在有限集  $\wp = \{1, 2, \dots, N\}$  上取值, 其转移概率与转移速率之间的关系有如下定义:

$$\Pr\{r(t + \sigma) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}(\sigma)\sigma + o(\sigma), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}(\sigma)\sigma + o(\sigma), & i = j \end{cases}$$

其中  $\sigma > 0$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{o(\sigma)}{\sigma} = 0$ ;  $\pi_{ij}(\sigma)$  表示当  $i \neq j$  时, 由  $t$  时刻模态  $i$  跳跃到  $t + \sigma$  时刻模态  $j$  的转移速率;

且每个模态  $i$  都有  $\pi_{ii}(\sigma) = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}(\sigma)$ 。

根据忆阻器的电流 - 电压特征, 系统(1)的参数可以表示为:

$$a_{ij}(x_i(t), r_i) = \begin{cases} \bar{a}_{ij}(r_i), & |x_i(t)| \leq T_i \\ \hat{a}_{ij}(r_i), & |x_i(t)| > T_i \end{cases},$$

$$b_{ij}(x_i(t), r_i) = \begin{cases} \bar{b}_{ij}(r_i), & |x_i(t)| \leq T_i \\ \hat{b}_{ij}(r_i), & |x_i(t)| > T_i \end{cases},$$

其中  $\bar{a}_{ij}(r_i)$ ,  $\hat{a}_{ij}(r_i)$ ,  $\bar{b}_{ij}(r_i)$ ,  $\hat{b}_{ij}(r_i)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 都是常数。

根据集值映射理论[15]和微分包含理论[16], 系统(1)可以转化为以下神经网络

$$\dot{x}_i(t) \in -c_i(r_i)x(t) + co\{\bar{a}_{ij}(r_i), \hat{a}_{ij}(r_i)\}f(x(t)) + co\{\bar{b}_{ij}(r_i), \hat{b}_{ij}(r_i)\}f(x(t-\tau(t))) + I_i \quad (2)$$

或等价的, 对于  $i = 1, 2, \dots, n$  存在可测函数  $a_{ij}^*(r_i) \in co\{\bar{a}_{ij}(r_i), \hat{a}_{ij}(r_i)\}$ ,  $b_{ij}^*(r_i) \in co\{\bar{b}_{ij}(r_i), \hat{b}_{ij}(r_i)\}$  使得

$$\dot{x}_i(t) = -c_i(r_i)x(t) + a_{ij}^*(r_i)f(x(t)) + b_{ij}^*(r_i)f(x(t-\tau(t))) + I_i \quad (3)$$

由[17]中的引理 2.1, 系统(3)可以转化为如下神经网络:

$$\dot{x}(t) = -C_\lambda x(t) + (A_\lambda^+ + Ma_\lambda \Theta_{1\lambda}(t) Na_\lambda) f(x(t)) + (B_\lambda^+ + Mb_\lambda \Theta_{2\lambda}(t) Nb_\lambda) f(x(t-\tau(t))) + I \quad (4)$$

其中,

$$A_\lambda^+ = (a_{ij}^+(r_i))_{n \times n}, \quad B_\lambda^+ = (b_{ij}^+(r_i))_{n \times n},$$

$$Ma_\lambda = (\sqrt{a_{11}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{a_{1n}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{a_{n1}^-(r_i)}\varsigma_n, \dots, \sqrt{a_{nn}^-(r_i)}\varsigma_n)_{n \times n^2},$$

$$Na_\lambda = (\sqrt{a_{11}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{a_{1n}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{a_{n1}^-(r_i)}\varsigma_n, \dots, \sqrt{a_{nn}^-(r_i)}\varsigma_n)_{n^2 \times n}^T,$$

$$Mb_\lambda = (\sqrt{b_{11}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{b_{1n}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{b_{n1}^-(r_i)}\varsigma_n, \dots, \sqrt{b_{nn}^-(r_i)}\varsigma_n)_{n \times n^2},$$

$$Nb_\lambda = (\sqrt{b_{11}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{b_{1n}^-(r_i)}\varsigma_1, \dots, \sqrt{b_{n1}^-(r_i)}\varsigma_n, \dots, \sqrt{b_{nn}^-(r_i)}\varsigma_n)_{n^2 \times n}^T,$$

$\varsigma_i \in R^n$  表示第  $i$  个元素为 1, 其他元素为 0 的列向量; 并且  $\Theta_{i\lambda}^T(t) \Theta_{i\lambda}(t) \leq I$ ,  $i = 1, 2$ 。

本文考虑(1)为主系统, 对应的从系统如下:

$$\dot{y}(t) = -C(r_i)y(t) + A(y(t), r_i)f(y(t)) + B(y(t), r_i)f(y(t-\tau(t))) + I + u(t) \quad (5)$$

其中, 系统的参数表示为

$$a_{ij}(y_i(t), r_i) = \begin{cases} \bar{a}_{ij}(r_i), & |y_i(t)| \leq T_i \\ \hat{a}_{ij}(r_i), & |y_i(t)| > T_i \end{cases},$$

$$b_{ij}(y_i(t), r_i) = \begin{cases} \bar{b}_{ij}(r_i), & |y_i(t)| \leq T_i \\ \hat{b}_{ij}(r_i), & |y_i(t)| > T_i \end{cases},$$

其中,  $\bar{a}_{ij}(r_i)$ ,  $\hat{a}_{ij}(r_i)$ ,  $\bar{b}_{ij}(r_i)$ ,  $\hat{b}_{ij}(r_i)$ ,  $I$  与系统(1)中的参数一致,  $u(t)$  是控制输入向量。

经处理得:

$$\dot{y}(t) = -C_\lambda y(t) + (A_\lambda^+ + Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t) Na_\lambda) f(y(t)) + (B_\lambda^+ + Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t) Nb_\lambda) f(y(t-\tau(t))) + I + u(t) \quad (6)$$

其中  $A_\lambda^+, B_\lambda^+, Ma_\lambda, Na_\lambda, Mb_\lambda, Nb_\lambda$  与系统(4)一致,  $\Theta_{i\lambda}^T(t)\Theta_{i\lambda}(t) \leq I, i=3,4$ 。

定义误差信号为  $e(t) = y(t) - x(t)$ , 由(4)和(6)可表示误差系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & -C_\lambda e(t) + (A_\lambda^+ + Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t) Na_\lambda) g(e(t)) \\ & + (B_\lambda^+ + Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t) Nb_\lambda) g(e(t - \tau(t))) + u(t) + G_1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $g(e(\cdot)) = f(y(\cdot)) - f(x(\cdot))$ ,

$$G_1 = (Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t) Na_\lambda - Ma_\lambda \Theta_{1\lambda}(t) Na_\lambda) f(x(t)) + (Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t) Nb_\lambda - Mb_\lambda \Theta_{2\lambda}(t) Nb_\lambda) f(x(t - \tau(t))).$$

假设系统的控制信号由零阶保持器生成, 保持时间的序列为  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 。本文拟采用的采样控制器设计为:

$$u(t) = -Ke(t_k) - \Omega \text{sign}(\gamma e(t) + \dot{e}(t)), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (8)$$

其中  $K$  为采样反馈控制器的增益矩阵,  $\gamma$  是可谐调的参数,  $\Omega = \text{diag}\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)\}$ , 且有

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & |x_i(t)| \leq T_i \text{ 且 } |y_i(t)| \leq T_i, \text{ 或 } |x_i(t)| > T_i \text{ 且 } |y_i(t)| > T_i, \\ r_i & \text{其它} \end{cases}$$

$e(t_k)$  是  $e(t)$  在采样瞬间  $t_k$  时刻的离散测量值, 且有  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ 。假设对任意整数  $k \geq 0$  有  $t_{k+1} - t_k = h_k \leq h$ , 其中  $h$  是最大的采样区间。

将控制器(8)代入(7)式可得

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & -C_\lambda e(t) + (A_\lambda^+ + Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t) Na_\lambda) g(e(t)) + (B_\lambda^+ + Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t) Nb_\lambda) g(e(t - \tau(t))) \\ & + G_1 - Ke(t - h(t)) - \Omega \text{sign}(\gamma e(t) + \dot{e}(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ ,  $h(t) = t - t_k$ ,  $0 \leq h(t) \leq h$ , 并且对于所有的  $t \neq t_k$ ,  $\dot{h}(t) = 1$ 。

注1: 受到文献[18]的启发, 本文引入具有符号函数项的控制器(8)。本文控制器中的符号函数项在误差系统的参数匹配时取0, 在误差系统的参数不匹配时取  $r_i$ , 从而便于系统的处理。

## 2.2. 预备知识

为了方便推导具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络采样同步的充分条件, 本文给出以下定义、假设和引理。

**定义 1** [19] 对于定义在区间  $[-\max\{\tau, h\}, 0]$  上的初值条件  $e(t) = \psi(t)$  和  $r(0) \in N$ , 如果满足以下条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon \left\{ \int_0^T \|e(s)\|^2 ds(\psi(t), e(0)) \right\} < \infty \quad (10)$$

则误差系统(9)随机稳定, 即主系统(1)与从系统(5)随机同步。

**假设 1** 假设系统(1)的神经激活函数  $f_i(\cdot)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 满足下列条件: 对任意的  $x_1, x_2 \in R$ , 有

$$\beta_i^- \leq \frac{f_i(x_1) - f_i(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \beta_i^+, \quad x_1 \neq x_2, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$|f_i(\cdot)| \leq F_i,$$

其中,  $\beta_i^-, \beta_i^+, T_i > 0$  是已知常数。

**引理 2** [20] 对于矩阵  $\mathfrak{U}$ 、 $\mathfrak{J}$  和对称矩阵  $\mathfrak{R}$ , 若  $\mathfrak{R} + \epsilon \mathfrak{U} \mathfrak{U}^T + \epsilon^{-1} \mathfrak{J}^T \mathfrak{J} < 0$ , 则当且仅当以下不等式成立

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{U} \mathfrak{J} \mathfrak{J} + (\mathfrak{U} \mathfrak{J} \mathfrak{J})^T < 0,$$

其中  $\epsilon > 0$ ,  $\mathfrak{J}^T \mathfrak{J} < I$ 。

**引理 3** [20] 对于给定的矩阵  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , 且满足  $\Delta_1 = \Delta_1^T$ ,  $0 < \Delta_2 = \Delta_2^T$ , 若

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_3^T \\ \Delta_3 & -\Delta_2 \end{pmatrix} < 0 \text{ 或 } \begin{pmatrix} -\Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_3^T & \Delta_1 \end{pmatrix} < 0,$$

当且仅当  $\Delta_1 + \Delta_3^T \Delta_2^{-1} \Delta_3 < 0$ 。

**引理 4** [21] 对于矩阵  $0 < T \in R^{n \times n}$  和任意可微函数  $\sigma: [\beta_1, \beta_2] \rightarrow R^n$ , 有

$$-(\beta_2 - \beta_1) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sigma^T(\theta) T \sigma^T(\theta) d\theta \leq -[\sigma(\beta_2) - \sigma(\beta_1)]^T T [\sigma(\beta_2) - \sigma(\beta_1)] - 3\Omega_1^T T \Omega_1$$

其中  $\Omega_1 = \sigma(\beta_2) + \sigma(\beta_1) - \frac{2}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sigma(\theta) d\theta$ 。

### 3. 主要内容

本节在定理 3.1 中给出具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络采样同步的充分条件。推导出该条件的 Lyapunov 函数由包含半马尔科夫跳变的二次函数和包含采样信息的积分项组成。

为了方便表达, 我们定义块矩阵  $I_i = \begin{bmatrix} 0_{n,(i-1)n} & I_n & 0_{n,(11-i)n} \end{bmatrix}$  ( $i = 1, 2, \dots, 11$ ), 部分向量和矩阵定义如下:

$$\beta_1 = \text{diag}(\beta_1^-, \beta_2^-, \dots, \beta_n^-), \quad \beta_2 = \text{diag}(\beta_1^+, \beta_2^+, \dots, \beta_n^+),$$

$$\Lambda_1(t) = \left[ e^T(t) + e^T(t - \tau(t)) - \frac{2}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t e(s) ds \right]^T,$$

$$\Lambda_2(t) = \left[ e^T(t - \tau(t)) + e^T(t - \tau) - \frac{2}{\tau - \tau(t)} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} e(s) ds \right]^T,$$

$$\Lambda_3(t) = \left[ e^T(t) + e^T(t - h(t)) - \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds \right]^T,$$

$$\Lambda_4(t) = \left[ e^T(t - h(t)) + e^T(t - h) - \frac{2}{h - h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds \right]^T,$$

$$\eta_1(t) = \left[ e^T(t) - e^T(t - \tau(t)), e^T(t) + e^T(t - \tau(t)) - \frac{2}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t e(s) ds, \right.$$

$$\left. e^T(t - \tau(t)) - e^T(t - \tau), e^T(t - \tau(t)) + e^T(t - \tau) - \frac{2}{\tau - \tau(t)} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} e(s) ds \right]^T,$$

$$\eta_2(t) = \left[ e^T(t) - e^T(t - h(t)), e^T(t) + e^T(t - h(t)) - \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds, \right.$$

$$\left. e^T(t - h(t)) - e^T(t - h), e^T(t - h(t)) + e^T(t - h) - \frac{2}{h - h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds \right]^T,$$

$$\xi(t) = \left[ e^T(t), e^T(t-\tau(t)), e^T(t-\tau), e^T(t-h(t)), e^T(t-h), e^T(t), \frac{2}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t e(s) ds, \right. \\ \left. \frac{2}{\tau-\tau(t)} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} e(s) ds, \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds, \frac{2}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds, g^T(e(t)), g^T(e(t-\tau(t))) \right].$$

**定理 3.1** 假设 1 成立, 对给定参数  $\gamma, \tau, \mu$ , 具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络(1)和(5)是随机同步的, 如果存在对称正定矩阵  $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, P_\lambda (\lambda \in \wp)$ , 正定对角矩阵  $W, M_1, M_2$ , 任意合适维数的矩阵  $R, X_{m1}, X_{m2}, X_{m3} (m=1,2)$  和正参数  $s_k (k=1,2,3,4)$ , 使得下列线性矩阵不等式成立

$$\bar{R}_m = \begin{bmatrix} R_m & 0 & X_{m1} & X_{m2} \\ * & 3R_m & X_{m2}^T & X_{m3} \\ * & * & R_m & 0 \\ * & * & * & 3R_m \end{bmatrix} > 0, (m=1,2) \tag{11}$$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Omega_i & \sqrt{\gamma}WMA_i & \sqrt{\gamma}WMB_i & WMA_i & WMB_i \\ * & -s_1I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -s_2I & 0 & 0 \\ * & * & * & -s_3I & 0 \\ * & * & * & * & -s_4I \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

其中,

$$\Omega_i = Sym\{I_1^T P_i I_6\} + I_1^T \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j I_1 + I_1^T (Q_1 + Q_2 + Q_3) I_1 - (1-\mu) I_2^T Q_1 I_2 - I_3^T Q_2 I_3 - I_5^T Q_3 I_5 \\ + I_6^T (\tau^2 R_1 + h^2 R_2) I_6 - \varsigma_1^T \bar{R}_1 \varsigma_1 - \varsigma_2^T \bar{R}_2 \varsigma_2 - I_1^T \beta_1 M_1 \beta_2 + Sym\left\{ I_1^T \left( \frac{1}{2} M_1 (\beta_1 + \beta_2) \right) I_{11} \right\} \\ - I_{11}^T M_1 I_{11} - I_2^T \beta_1 M_2 \beta_2 + Sym\left\{ I_2^T \left( \frac{1}{2} M_2 (\beta_1 + \beta_2) \right) I_{12} \right\} - I_{12}^T M_2 I_{12} \\ + Sym\{-\gamma I_1^T W I_6 - \gamma I_1^T W C_i I_1 + \gamma I_1^T W A_i^+ I_{11} + \gamma I_1^T W B_i^+ I_{12} - \gamma I_1^T L I_4\} \\ + Sym\{-I_6^T W I_6 - I_6^T W C_i I_1 + I_6^T W A_i^+ I_{11} + I_6^T W B_i^+ I_{12} - I_6^T L I_4\} \\ + I_{11}^T (\gamma * s_1 + s_3) N a_i^T N a_i I_{11} + I_{12}^T (\gamma * s_2 + s_4) N b_i^T N b_i I_{12}$$

且,

$$\varsigma_1 = [I_1 - I_2, I_1 + I_2 - I_7, I_2 - I_3, I_2 + I_3 - I_8]^T, \\ \varsigma_2 = [I_1 - I_4, I_1 + I_4 - I_9, I_4 - I_5, I_4 + I_5 - I_{10}]^T.$$

设计的采样控制器(8)式中的参数有如下限制:

$$r_i = \sum_{j=1}^n (|\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}| + |\bar{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}|) F_j, \tag{13}$$

并且控制增益矩阵为  $K = W^{-1}L$ 。

**证明:** 对于误差系统(9), 选取如下 Lyapunov 泛函

$$V(e(t), r(t)) = \sum_{i=1}^3 V_i(e(t), r(t)) \tag{14}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 V_1(e(t), r(t)) &= e^T(t)P(r(t))e(t), \\
 V_2(e(t), r(t)) &= \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s)Q_1e(s)ds + \int_{t-\tau}^t e^T(s)Q_2e(s)ds + \int_{t-h}^t e^T(s)Q_3e(s)ds, \\
 V_3(e(t), r(t)) &= \tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t \dot{e}^T(s)R_1\dot{e}(s)dsd\theta + h \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \dot{e}^T(s)R_2\dot{e}(s)dsd\theta.
 \end{aligned}$$

半马尔科夫跳变过程的若无穷小算子为:

$$\mathcal{L}V(e(t), r(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{E\{V(x(t+\Delta), r(t+\Delta)|x(t), r(t))\} - V(x(t), r(t))}{\Delta}, \tag{15}$$

其中  $\Delta$  是一个很小的正数。令  $r(t) = i$ , 应用全概率公式和条件概率公式, 且根据文献[22]的计算公式, 可得:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V_1(e(t), r(t)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^N \Pr\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} e^T(t+\Delta)P_j e(t+\Delta) \right. \\
 &\quad \left. + \Pr\{r(t+\Delta) = i | r(t) = i\} e^T(t+\Delta)P_i e(t+\Delta) - e^T(t)P_i e(t) \right] \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_{ij}(G_i(\sigma+\Delta) - G_i(\sigma))}{1 - G_i(\sigma)} e^T(t+\Delta)P_j e(t+\Delta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - G_i(\sigma+\Delta)}{1 - G_i(\sigma)} e^T(t+\Delta)P_i e(t+\Delta) - e^T(t)P_i e(t) \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

其中  $\sigma$  表示系统从最后一次跳跃开始保持在模态  $i$  时逗留的时间,  $G_i(t)$  是系统保持在模态  $i$  时逗留时间的概率分布函数,  $q_{ij}$  是系统从模态  $i$  跳跃到模态  $j$  的概率密度。给定的  $\Delta$  很小,  $e(t+\Delta)$  的一阶近似为

$$e(t+\Delta) = e(t) + \dot{e}(t)\Delta + o(\Delta) \tag{17}$$

因此, 将(17)式带入(16)式且由于  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$ , 所以有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V_1(e(t), r(t)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_{ij}(G_i(\sigma+\Delta) - G_i(\sigma))}{1 - G_i(\sigma)} (e^T(t) + \Delta \dot{e}^T(t))P_j (e(t) + \Delta \dot{e}(t)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - G_i(\sigma+\Delta)}{1 - G_i(\sigma)} (e^T(t) + \Delta \dot{e}^T(t))P_i (e(t) + \Delta \dot{e}(t)) - e^T(t)P_i e(t) \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

根据概率分布函数的性质, 有如下式子成立

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q_{ij}(G_i(\sigma+\Delta) - G_i(\sigma))}{(1 - G_i(\sigma))\Delta} = \pi_{ij}(\sigma), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - G_i(\sigma+\Delta)}{1 - G_i(\sigma)} = 1, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q_{ij}(G_i(\sigma+\Delta) - G_i(\sigma))}{1 - G_i(\sigma)} = 0$$

其中  $\pi_i(\sigma)$  表示系统从模态  $i$  跳跃的转移速率。定义  $\pi_{ij}(\sigma) \triangleq q_{ij}\pi_i(\sigma)$  ( $i \neq j$ ), 且满足

$$\pi_{ii}(\sigma) \triangleq - \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}(\sigma).$$

综上, 可得



$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1(e(t), r(t)) &= \text{Sym}\{e^T(t)P_i\dot{e}(t)\} + e^T(t)\left[\sum_{j=1}^N \pi_{ij}(\sigma)P_j\right]e(t) \\ &= \xi^T(t)\left(\text{Sym}\{I_1^T P_i I_1\} + I_1^T \sum_{j=1}^N \pi_{ij}(\sigma)P_j I_1\right)\xi(t) \end{aligned} \tag{19}$$

此外,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2(e(t), r(t)) &= e^T(t)(Q_1 + Q_2 + Q_3)e(t) - (1-\mu)e^T(t-\tau(t))Q_1e(t-\tau(t)) \\ &\quad - e^T(t-\tau)Q_2e(t-\tau) - e^T(t-h)Q_3e(t-h) \\ &= \xi^T(t)\left(I_1^T(Q_1 + Q_2 + Q_3)I_1 - (1-\mu)I_2^T Q_1 I_2 - I_3^T Q_2 I_3 - I_5^T Q_3 I_5\right)\xi(t) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\mathcal{L}V_3(e(t), r(t)) = \tau^2 \dot{e}^T(t)R_1 \dot{e}(t) + h^2 \dot{e}^T(t)R_2 \dot{e}(t) - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s)R_1 \dot{e}(s)ds - h \int_{t-h}^t \dot{e}^T(s)R_2 \dot{e}(s)ds \tag{21}$$

因为  $\bar{R}_m > 0 (m=1,2)$ , 利用引理 4 和文献[23]中的互凸技术, 可以得到

$$\begin{aligned} & -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s)R_1 \dot{e}(s)ds \\ & \leq -\frac{\tau}{\tau(t)} \left\{ \left[ e(t) - e(t-\tau(t)) \right]^T R_1 \left[ e(t) - e(t-\tau(t)) \right] + 3\Lambda_1^T(t)R_1\Lambda_1(t) \right\} \\ & \quad - \frac{\tau}{\tau-\tau(t)} \left\{ \left[ e(t-\tau(t)) - e(t-\tau) \right]^T R_1 \left[ e(t-\tau(t)) - e(t-\tau) \right] + 3\Lambda_2^T(t)R_1\Lambda_2(t) \right\} \\ & \leq -\eta_1^T(t)\bar{R}_1\eta_1(t), \\ & -h \int_{t-h}^t \dot{e}^T(s)R_2 \dot{e}(s)ds \\ & \leq -\frac{h}{h(t)} \left\{ \left[ e(t) - e(t-h(t)) \right]^T R_2 \left[ e(t) - e(t-h(t)) \right] + 3\Lambda_3^T(t)R_2\Lambda_3(t) \right\} \\ & \quad - \frac{h}{h-h(t)} \left\{ \left[ e(t-h(t)) - e(t-h) \right]^T R_2 \left[ e(t-h(t)) - e(t-h) \right] + 3\Lambda_4^T(t)R_2\Lambda_4(t) \right\} \\ & \leq -\eta_2^T(t)\bar{R}_2\eta_2(t). \end{aligned} \tag{22}$$

所以,

$$\mathcal{L}V_3(e(t), r(t), t) \leq \xi^T(t)\left(I_6^T(\tau^2 R_1 + h^2 R_2)I_6 - \varsigma_1^T \bar{R}_1 \varsigma_1 - \varsigma_2^T \bar{R}_2 \varsigma_2\right)\xi(t) \tag{24}$$

下面考虑激活函数的信息, 并且利用系统的信息, 根据假设 1 和对角矩阵  $M_1 > 0, M_2 > 0$ , 有

$$e^T(t)\beta_1 M_1 \beta_2 e(t) - e^T(t)M_1(\beta_1 + \beta_2)g(e(t)) + g^T(e(t))M_1 g(e(t)) \leq 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned} & e^T(t-\tau(t))\beta_1 M_2 \beta_2 e(t-\tau(t)) - e^T(t-\tau(t))M_2(\beta_1 + \beta_2)g(e(t-\tau(t))) \\ & + g^T(e(t-\tau(t)))M_2 g(e(t-\tau(t))) \leq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

根据(25)式和(26)式, 有:

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi^T(t) & \left( -I_1^T \beta_1 M_1 \beta_2 + \text{sym} \left\{ I_1^T \left( \frac{1}{2} M_1 (\beta_1 + \beta_2) \right) I_{11} \right\} - I_{11}^T M_1 I_{11} - I_2^T \beta_1 M_2 \beta_2 \right. \\ & \left. + \text{sym} \left\{ I_2^T \left( \frac{1}{2} M_2 (\beta_1 + \beta_2) \right) I_{12} \right\} - I_{12}^T M_2 I_{12} \right) \xi(t) \end{aligned} \tag{27}$$

根据系统(9), 对于任意合适维数的对角矩阵  $W$  和正标量  $\gamma$  有

$$0 = 2(\gamma e^T(t) + \dot{e}^T(t))W[-\dot{e}(t) - C_\lambda e(t) + (A_\lambda^+ + Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t)Na_\lambda)g(e(t)) + (B_\lambda^+ + Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t)Nb_\lambda)g(e(t-\tau(t))) + G_1 + G_2 - Ke(t-h(t)) - \Omega \text{sign}(\gamma e(t) + \dot{e}(t))] \tag{28}$$

其中,

$$\begin{aligned} & 2(\gamma e(t) + \dot{e}(t))W[G_1 - \Omega \text{sign}(\gamma e(t) + \dot{e}(t))] \\ & = 2(\gamma e(t) + \dot{e}(t))W[(Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t)Na_\lambda - Ma_\lambda \Theta_{1\lambda}(t)Na_\lambda)f(x(t)) \\ & \quad + (Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t)Nb_\lambda - Mb_\lambda \Theta_{2\lambda}(t)Nb_\lambda) \times f(x(t-\tau(t))) - \Omega \text{sign}(\gamma e(t) + \dot{e}(t))] \\ & \leq 2 \sum_{i=1}^n |\gamma e_i(t) + \dot{e}_i(t)| w_i \left[ \sum_{j=1}^n (|\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}| + |\bar{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}|) F_j - r_i \right] \\ & = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

对任意参数  $s_1 > 0$ , 利用引理 2 可得

$$\begin{aligned} & 2\gamma e^T(t)WMa_\lambda \Theta_{3\lambda}(t)Na_\lambda g(e(t)) \\ & \leq \gamma s_1 g^T(e(t))Na_\lambda^T Na_\lambda g(e(t)) + \gamma s_1^{-1} e^T(t)WMa_\lambda Ma_\lambda^T We(t). \end{aligned} \tag{30}$$

同理

$$\begin{aligned} & 2\gamma e^T(t)W Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t)Nb_\lambda g(e(t-\tau(t))) \\ & \leq \gamma s_2 g^T(e(t-\tau(t)))Nb_\lambda^T Nb_\lambda g(e(t-\tau(t))) + \gamma s_2^{-1} e^T(t)W Mb_\lambda M_{b\lambda}^T W^T e(t). \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} & 2\dot{e}^T(t)W Ma_\lambda \Theta_{3\lambda}(t)Na_\lambda g(e(t)) \\ & \leq s_3 g^T(e(t))Na_\lambda^T Na_\lambda g(e(t)) + s_3^{-1} \dot{e}^T(t)W Ma_\lambda Ma_\lambda^T W\dot{e}(t). \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} & 2\dot{e}^T(t)W Mb_\lambda \Theta_{4\lambda}(t)Nb_\lambda g(e(t-\tau(t))) \\ & \leq s_4 g^T(e(t-\tau(t)))Nb_\lambda^T Nb_\lambda g(e(t-\tau(t))) + s_4^{-1} \dot{e}^T(t)W M_b M_b^T W^T \dot{e}(t). \end{aligned} \tag{33}$$

令  $L = WK$ , 整理可得:

$$\begin{aligned} 0 \leq & -2\gamma e^T(t)W\dot{e}(t) - 2\gamma e^T(t)WC_\lambda e(t) + 2\gamma e^T(t)WA_\lambda^+ g(e(t)) + 2\gamma e^T(t)WB_\lambda^+ g(e(t-\tau(t))) \\ & - 2\gamma e^T(t)WKe(t-h(t)) - 2\dot{e}^T(t)W\dot{e}(t) - 2\dot{e}^T(t)WC_\lambda e(t) + 2\dot{e}^T(t)WA_\lambda^+ g(e(t)) \\ & + 2\dot{e}^T(t)WB_\lambda^+ g(e(t-\tau(t))) - 2\dot{e}^T(t)WKe(t-h(t)) + \gamma s_1 g^T(e(t))Na_\lambda^T Na_\lambda g(e(t)) \\ & + \gamma s_1^{-1} e^T(t)W Ma_\lambda Ma_\lambda^T We(t) + \gamma s_2 g^T(e(t-\tau(t)))Nb_\lambda^T Nb_\lambda g(e(t-\tau(t))) \\ & + \gamma s_2^{-1} e^T(t)W Mb_\lambda M_{b\lambda}^T W^T e(t) + s_3 g^T(e(t))Na_\lambda^T Na_\lambda g(e(t)) + s_3^{-1} \dot{e}^T(t)W Ma_\lambda Ma_\lambda^T W\dot{e}(t) \\ & + s_4 g^T(e(t-\tau(t)))Nb_\lambda^T Nb_\lambda g(e(t-\tau(t))) + s_4^{-1} \dot{e}^T(t)W M_b M_b^T W^T \dot{e}(t). \end{aligned} \tag{34}$$

根据(34)式, 有

$$\begin{aligned} 0 \leq & \xi^T(t) \left( \text{Sym} \{ -\gamma I_1^T W I_6 - \gamma I_1^T W C_i I_1 + \gamma I_1^T W A_i^+ I_{11} + \gamma I_1^T W B_i^+ I_{12} - \gamma I_1^T L I_4 \} \right. \\ & + \text{Sym} \{ -I_6^T W I_6 - I_6^T W C_i I_1 + I_6^T W A_i^+ I_{11} + I_6^T W B_i^+ I_{12} - I_6^T L I_4 \} \\ & + I_{11}^T (\gamma * s_1 + s_3) Na_i^T Na_i I_{11} + I_{12}^T (\gamma * s_2 + s_4) Nb_i^T Nb_i I_{12} \Big) \xi(t) \\ & + \gamma s_1^{-1} I_1^T W Ma_\lambda Ma_\lambda^T W^T I_1 + \gamma s_2^{-1} I_1^T W Mb_\lambda M_{b\lambda}^T W^T I_1 \\ & + s_3^{-1} I_6^T W Ma_\lambda Ma_\lambda^T W^T I_6 + s_4^{-1} I_6^T W M_b M_b^T W^T I_6. \end{aligned} \tag{35}$$

将(27)式和(35)式加到  $\mathcal{L}V(e(t), r(t), t)$  中, 对于任意的  $i \in N$ , 并对(12)式运用引理 3, 可得到

$$\mathcal{L}V(e(t), r(t), t) \leq \xi^T(t) \Pi_i \xi(t) \tag{36}$$

由定理 3.1 的条件可知, 必存在常数  $c > 0$ , 使得

$$\mathcal{L}V(e(t), r(t), t) \leq -c \|e(t)\|^2 \tag{37}$$

然后, 使用 Dynkin 公式, 对于所有的  $t > 0$ , 都有

$$\varepsilon \left\{ V(e(t), r(t), t) \right\} - \varepsilon \left\{ V(\psi(t), r(0), t_0) \right\} < -c\varepsilon \left\{ \int_0^t \|e(s)\|^2 ds \right\} \tag{38}$$

得

$$\left\{ \int_0^t \|e(s)\|^2 ds \right\} \leq c^{-1} \varepsilon \left\{ V(\psi(t), r(0), t_0) \right\} \tag{39}$$

因此, (10)式成立。根据定义 1, 可得主系统(1)和从系统(5)是随机同步的; 证明完成。

注 2: 因为网络的通讯资源有限, 所以减少具有时滞的忆阻神经网络的信息传输量是十分关键的。而采样控制器仅将系统在采样点的信息传输到控制器中, 所以能有效的节约网络通讯资源。因此, 本文设计了采样控制器来研究具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络, 该采样控制器有效的减少了系统的信息传输量。

注 3: 当处理  $-h \int_{t-h}^t e^T(s) R_2 \dot{e}(s) ds$  时, 利用引理 4 和文献[23]中的互凸技术, 能够充分利用采样区间上的信息。

### 4. 仿真算例

为了验证本文给出的定理 3.1 的可行性和有效性, 本节将使用一个仿真算例来进行说明。

例 4.1 考虑一个含有两个神经元的半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络(1), 所含参数如下:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a'_{11}(x_1) = \begin{cases} 1.75, & |x_1| \leq 3 \\ 2.1, & |x_1| > 3 \end{cases}, a'_{12}(x_1) = \begin{cases} -0.1, & |x_1| \leq 3 \\ -0.12, & |x_1| > 3 \end{cases},$$

$$a'_{21}(x_2) = \begin{cases} -4.7, & |x_2| \leq 3 \\ -5.1, & |x_2| > 3 \end{cases}, a'_{22}(x_2) = \begin{cases} 2.85, & |x_2| \leq 3 \\ 3.2, & |x_2| > 3 \end{cases},$$

$$b'_{11}(x_1) = \begin{cases} -1.7, & |x_1| \leq 3 \\ -1.6, & |x_1| > 3 \end{cases}, b'_{12}(x_1) = \begin{cases} -0.08, & |x_1| \leq 3 \\ -0.11, & |x_1| > 3 \end{cases},$$

$$b'_{21}(x_2) = \begin{cases} -0.3, & |x_2| \leq 3 \\ -0.2, & |x_2| > 3 \end{cases}, b'_{22}(x_2) = \begin{cases} -2.5, & |x_2| \leq 3 \\ -2.38, & |x_2| > 3 \end{cases},$$

$$a''_{11}(x_1) = \begin{cases} 1.7854, & |x_1| \leq 3 \\ 2.0472, & |x_1| > 3 \end{cases}, a''_{12}(x_1) = \begin{cases} 0.8, & |x_1| \leq 3 \\ 1.2, & |x_1| > 3 \end{cases},$$

$$a''_{21}(x_2) = \begin{cases} -0.2, & |x_2| \leq 3 \\ 0.4, & |x_2| > 3 \end{cases}, a''_{22}(x_2) = \begin{cases} 1.5236, & |x_2| \leq 3 \\ 1.6283, & |x_2| > 3 \end{cases},$$

$$b_{11}''(x_1) = \begin{cases} -2.2214, & |x_1| \leq 3 \\ -1.3329, & |x_1| > 3 \end{cases}, \quad b_{12}''(x_1) = \begin{cases} -0.1, & |x_1| \leq 3 \\ 0.3, & |x_1| > 3 \end{cases},$$

$$b_{21}''(x_2) = \begin{cases} -0.5, & |x_2| \leq 3 \\ 0.7, & |x_2| > 3 \end{cases}, \quad b_{22}''(x_2) = \begin{cases} -1.9252, & |x_2| \leq 3 \\ -1.6661, & |x_2| > 3 \end{cases},$$

根据以上参数, 计算如下:

$$Ma_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.175} & \sqrt{0.01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.2} & \sqrt{0.175} \end{pmatrix},$$

$$Na_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.175} & 0 & \sqrt{0.2} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.01} & 0 & \sqrt{0.175} \end{pmatrix}^T,$$

$$Mb_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.05} & \sqrt{0.015} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.05} & \sqrt{0.06} \end{pmatrix},$$

$$Nb_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.05} & 0 & \sqrt{0.05} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.015} & 0 & \sqrt{0.06} \end{pmatrix}^T,$$

$$Ma_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.131} & \sqrt{0.2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.3} & \sqrt{0.05235} \end{pmatrix},$$

$$Na_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.131} & 0 & \sqrt{0.3} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.2} & 0 & \sqrt{0.05235} \end{pmatrix}^T,$$

$$Mb_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.44425} & \sqrt{0.2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.6} & \sqrt{0.12955} \end{pmatrix},$$

$$Nb_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.44425} & 0 & \sqrt{0.6} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.2} & 0 & \sqrt{0.12955} \end{pmatrix}^T.$$

假设  $\tau(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$ , 则有  $\tau = 1$ ,  $\nu = 0.25$ 。激活函数为  $f(s) = 0.6 * \tanh(s)$ 。显然, 激活函数满足假设 1, 且  $\beta_1^- = \beta_2^- = -0.6$ ,  $\beta_1^+ = \beta_2^+ = 0.6$ 。  $r(t)$  是右连续的半马尔科夫过程, 转移速率矩阵取为  $\pi_{12}(\sigma) \in [2.4, 2.6]$ ,  $\pi_{21}(\sigma) \in [2.2, 2.8]$ 。根据文献[24]可知

$$\pi_{ij}(\sigma) \triangleq \sum_{k=1}^N \xi_k \pi_{ij,k}, \quad \sum_{k=1}^N \xi_k = 1, \quad \xi_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{且有 } \pi_{ij,k} = \begin{cases} \pi_{ij}^+ - (k-1) \frac{\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-}{N-1}, & i \neq j, \quad j \in N \\ \pi_{ij}^- + (k-1) \frac{\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-}{N-1}, & i = j, \quad j \in N \end{cases}.$$

所以, 当  $N = 2$  时, 可得  $\pi_{12,1} = 2.6$ ,  $\pi_{12,2} = 2.4$ ,  $\pi_{21,1} = 2.8$ ,  $\pi_{21,2} = 2.2$ 。

现在, 本文在控制器(8)下验证定理 3.1 的有效性。当初值条件为  $x(t) = [-0.5 \quad 0.3]^T$ ,  $y(t) = [0.9 \quad 0.5]^T$  时, 取  $\gamma = 2$ , 利用定理 3.1 可得主从系统实现同步的最大采样周期为  $h = 0.11$ , 并且可以得到(8)中的增益矩阵为:

$$K = \begin{bmatrix} 5.2725 & 0.0049 \\ -0.0347 & 5.1649 \end{bmatrix}.$$

图 1 表示当控制输入为 0 时, 误差系统的状态轨迹; 由图 1 可知, 两个系统均为不稳定的忆阻系统。图 2 表示由定理 3.1 获得的控制增益下, 误差系统的状态轨迹; 图 2 验证了定理 3.1 的有效性。图 3 表示控制输入的轨迹。图 4 表示具有半马尔科夫跳变的系统模态轨迹。

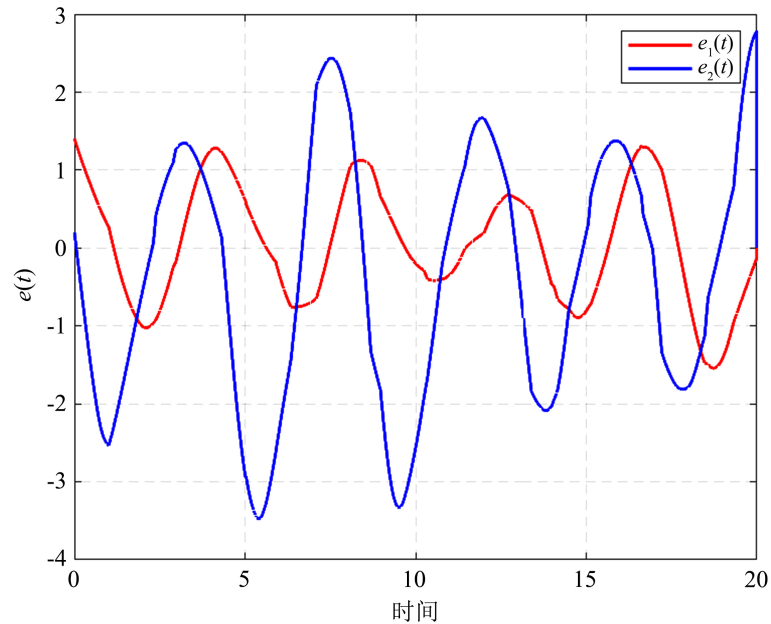


Figure 1. State trajectory of error system without control

图 1. 误差系统在没有控制下的状态轨迹

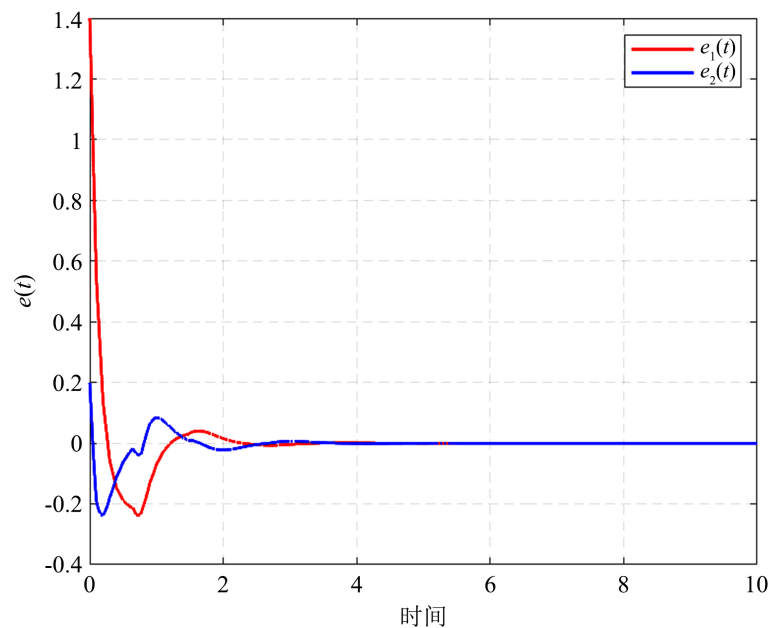


Figure 2. The state trajectory of error system under sampling control

图 2. 误差系统在采样控制下的状态轨迹

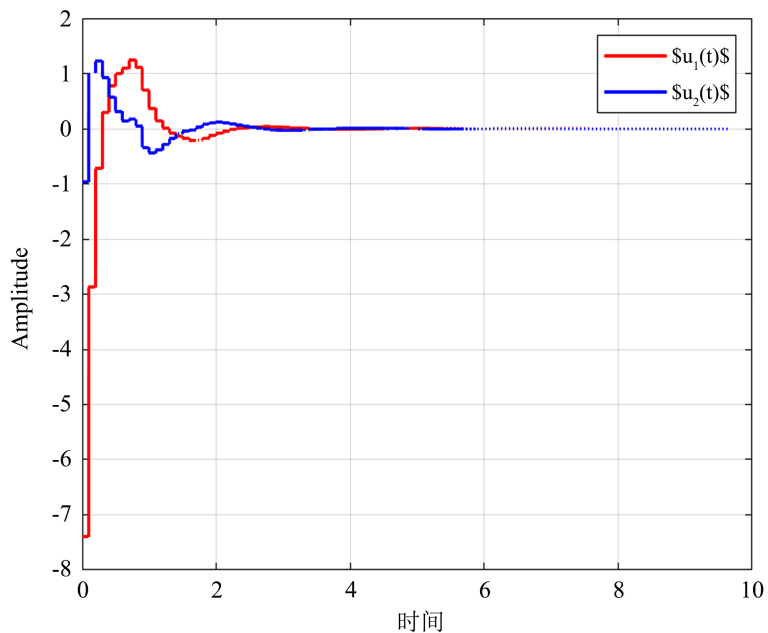


Figure 3. Sampling control input  
图 3. 采样控制输入

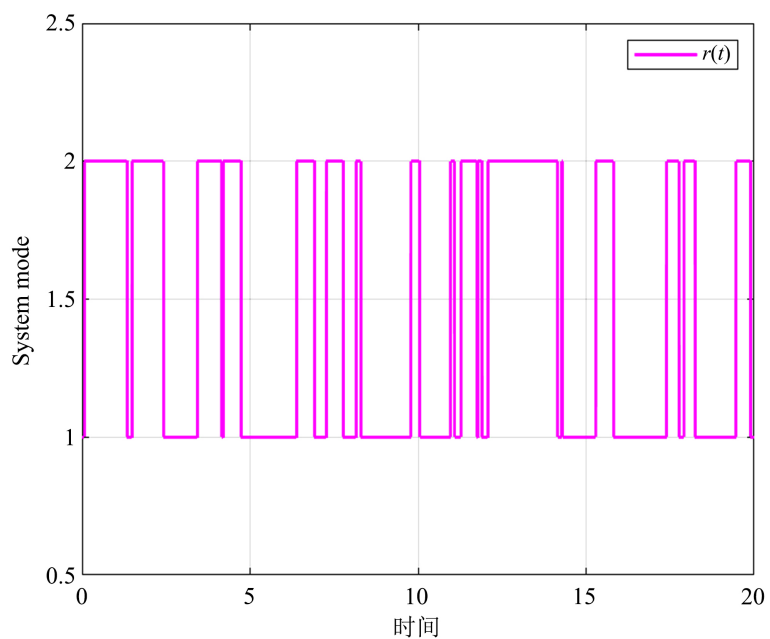


Figure 4. Semi-Markov jump process  $\{r(t)\}$   
图 4. 半马尔科夫跳变过程  $\{r(t)\}$

### 5. 结论

本文通过采样控制器, 研究了具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络的同步问题。该方法有效的减少了网络通讯资源的浪费。本文首先通过微分包含、集值映射以及鲁棒分析方法将具有半马尔科夫跳变的时滞忆阻神经网络转化为带不确定参数的传统半马尔科夫跳变神经网络。然后, 基于 Lyapunov 稳定

性理论, 构造了一个包含采样信息的 Lyapunov 泛函, 得到了保守性更低的同步判据, 从而设计出了有效的采样控制器。最后, 通过实例仿真来验证了所得理论结果的有效性。

## 参考文献

- [1] Chua, L. (1971) Memristor—The Missing Circuit Element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, **18**, 507-519. <https://doi.org/10.1109/TCT.1971.1083337>
- [2] Sah, M.P., Kim, H. and Chua, L.O. (2014) Brains Are Made of Memristors. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, **14**, 12-36. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2013.2296414>
- [3] Prezioso, M., Merrih-Bayat, F., Hoskins, B.D., et al. (2015) Training and Operation of an Integrated Neuromorphic Network Based on Metal-Oxide Memristors. *Nature*, **521**, 61-64. <https://doi.org/10.1038/nature14441>
- [4] Cao, Y., Cao, Y., Guo, Z., et al. (2020) Global Exponential Synchronization of Delayed Memristive Neural Networks with Reaction-Diffusion Terms. *Neural Networks*, **123**, 70-81. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2019.11.008>
- [5] Li, X., Zhang, W., Fang, J.A., et al. (2019) Event-Triggered Exponential Synchronization for Complex-Valued Memristive Neural Networks with Time-Varying Delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **31**, 4104-4116. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2019.2952186>
- [6] Liu, D., Zhu, S. and Sun, K. (2018) Global Anti-Synchronization of Complex-Valued Memristive Neural Networks with Time Delays. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 1735-1747. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2018.2812708>
- [7] Xiao, J., Li, M. and Wang, P. (2018) Finite-Time Anti-Synchronization of Stochastic Delayed Memristive Neural Networks. 2018 Chinese Automation Congress (CAC), Xi'an, 30 November-2 December 2018, 2721-2726. <https://doi.org/10.1109/CAC.2018.8623536>
- [8] Wang, L., Shen, Y., Yin, Q., et al. (2014) Adaptive Synchronization of Memristor-Based Neural Networks with Time-Varying Delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **26**, 2033-2042. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2014.2361776>
- [9] Han, X., Wu, H. and Fang, B. (2016) Adaptive Exponential Synchronization of Memristive Neural Networks with Mixed Time-Varying Delays. *Neurocomputing*, **201**, 40-50. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.11.103>
- [10] Li, X., Fang, J. and Li, H. (2018) Exponential Synchronization of Stochastic Memristive Recurrent Neural Networks under Alternate State Feedback Control. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **16**, 2859-2869. <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0225-4>
- [11] Yang, C., Xiong, Z. and Yang, T. (2020) Finite-Time Synchronization of Coupled Inertial Memristive Neural Networks with Mixed Delays via Nonlinear Feedback Control. *Neural Processing Letters*, **51**, 1921-1938. <https://doi.org/10.1007/s11063-019-10180-z>
- [12] Li, R. and Cao, J. (2016) Finite-Time Stability Analysis for Markovian Jump Memristive Neural Networks with Partly Unknown Transition Probabilities. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **28**, 2924-2935. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2016.2609148>
- [13] Song, X., Man, J., Song, S., et al. (2020) Finite/Fixed-Time Synchronization for Markovian Complex-Valued Memristive Neural Networks with Reaction-Diffusion Terms and Its Application. *Neurocomputing*, **414**, 131-142. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.07.024>
- [14] Li, R. and Wei, H. (2016) Synchronization of Delayed Markovian Jump Memristive Neural Networks with Reaction-Diffusion Terms via Sampled Data Control. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, **7**, 157-169. <https://doi.org/10.1007/s13042-015-0423-9>
- [15] Aubin, J.P. and Frankowska, H. (2009) Set-Valued Analysis. Springer Science & Business Media, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0>
- [16] Filippov, A.F. (2013) Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems. Springer Science & Business Media, Berlin.
- [17] Li, R., Gao, X. and Cao, J. (2019) Exponential Synchronization of Stochastic Memristive Neural Networks with Time-Varying Delays. *Neural Processing Letters*, **50**, 459-475. <https://doi.org/10.1007/s11063-019-09989-5>
- [18] Zhang, R., Park, J.H., Zeng, D., et al. (2018) A New Method for Exponential Synchronization of Memristive Recurrent Neural Networks. *Information Sciences*, **466**, 152-169. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.07.038>
- [19] Wu, Z.G., Shi, P., Su, H., et al. (2013) Stochastic Synchronization of Markovian Jump Neural Networks with Time-Varying Delay Using Sampled Data. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **43**, 1796-1806. <https://doi.org/10.1109/TSMCB.2012.2230441>
- [20] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., et al. (1994) Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for

Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970777>

- [21] Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013) Wirtinger-Based Integral Inequality: Application to Time-Delay Systems. *Automatica*, **49**, 2860-2866. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.05.030>
- [22] Huang, J. and Shi, Y. (2013) Stochastic Stability and Robust Stabilization of Semi-Markov Jump Linear Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **23**, 2028-2043. <https://doi.org/10.1002/rnc.2862>
- [23] Park, P.G., Ko, J.W. and Jeong, C. (2011) Reciprocally Convex Approach to Stability of Systems with Time-Varying Delays. *Automatica*, **47**, 235-238. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.10.014>
- [24] Wu, T., Xiong, L., Cao, J., *et al.* (2019) Stochastic Stability and Extended Dissipativity Analysis for Uncertain Neutral Systems with Semi-Markovian Jumping Parameters via Novel Free Matrix-Based Integral Inequality. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **29**, 2525-2545. <https://doi.org/10.1002/rnc.4510>