**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2022, 11(7), 4933-4941**
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117517

Hans汉斯

# 带阻尼的三维热带气候模型的适定性研究

**陈　贤**

浙江师范大学，浙江 金华

收稿日期：2022年6月25日；录用日期：2022年7月20日；发布日期：2022年7月27日

## 摘　要

本文考虑了带阻尼的三维热带气候模型。利用能量估计的方法，证明了带阻尼的三维热带气候模型对于$1\le\alpha\le\frac{5}{2}$，如果$\beta$，$\gamma$，$\delta$满足$\beta\ge 4$，$\gamma\ge\frac{\alpha+3}{\alpha}$，$\delta\ge 1$时，那么带阻尼的三维热带气候模型强解是存在的，且是唯一的。

## 关键词

热带气候模型，适定性，阻尼性，强解

# Well-Posed Study of a Three-Dimensional Tropical Climate Model with Damping

**Xian Chen**

Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jun. 25th, 2022; accepted: Jul. 20th, 2022; published: Jul. 27th, 2022

## Abstract

**This paper considers a three-dimensional tropical climate model with damping. Using the method of energy estimation, a damped three-dimensional tropical climate model is demonstrated. For $1\le\alpha\le\frac{5}{2}$, if $\beta$, $\gamma$, $\delta$ satisfies $\beta\ge 4$, $\gamma\ge\frac{\alpha+3}{\alpha}$, $\delta\ge 1$, then the existence and uniqueness of a damped 3-D tropical climate model is strong.**

## Keywords

**Tropical Climate Model, Well-Posedness, Damping, Strong Solution**

文章引用: 陈贤. 带阻尼的三维热带气候模型的适定性研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4933-4941.
DOI: 10.12677/aam.2022.117517

## 1. 引言

在本文中，我们考虑以下带阻尼的三维热带气候模型：

$$\begin{cases} u_t + \Lambda^{2\alpha} u + (u\cdot\nabla)u + |u|^{\beta-1}u + \nabla\pi + div(v\otimes v) = 0, \\ v_t - \Delta v + (u\cdot\nabla)v + |v|^{\gamma-1}v + \nabla\psi + (v\cdot\nabla)u = 0, \\ \psi_t - \Delta\psi + (u\cdot\nabla)\psi + |\psi|^{\delta-1}\psi + div\ v = 0, \\ div\ u = 0, \\ (u,v,\psi)(x,0) = (u_0,v_0,\psi_0) \end{cases}$$

其中向量场 $\mathrm{u} = \mathrm{u}(x,t) \in R^3$ 和 $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x,t) \in R^3$ 分别表示速度的正压模式和第一斜压模式。$\pi = \pi(x,t)$ 和 $\psi = \psi(x,t)$ 分别表示压强和温度。分数拉普拉斯算子 $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$，$\alpha > 0$ 和 $\beta,\gamma,\delta \ge 0$ 为实参数。

需要指出的是，当 $\psi = 0$，$\alpha = 1$ 和 $div\ v = 0$ 时，系统(1.1)可简化为带有阻尼的三维磁流体动力学(MHD)型方程。对于阻尼磁流体系统，Ye [1]首先得到了全局强解的存在性和唯一性。然后，在[2] [3]中，证明了含阻尼的三维磁流体方程的全局适定性和衰减。当 $v = 0$ 时，带阻尼的 mhd 型方程简化为带阻尼的 Navier-Stokes 方程。Cai 和 Jiu [4]首先证明了带阻尼的 Navier-Stokes 方程在任何 $\beta \ge \frac{7}{2}$ 情况下，强解是唯一的，在 $\frac{7}{2} \le \beta \le 5$ 的情况下带阻尼的 Navier-Stokes 方程具有全局强解。Zhou [5]改进了这一结果，证明了 $\beta \ge 3$ 时全局存在强解。随后，有许多结果致力于三维 Navier-Stokes 方程的阻尼(例如，[6] [7] [8] [9])。

让我们简单回顾一下关于三维热带气候模式的一些成果。当系统(1.1)没有任何阻尼项时，Wang *et al.* [10]在初始数据很小的情况下考虑了正则性准则和全局存在性。在[11] [12]中，作者建立了分阶耗散的三维热带气候模式的全局正则性。我们可以看到[13]-[19]关于二维热带气候模式的全局正则性问题的一些结果。本文利用阻尼项证明了系统(1.1)具有唯一的全局强解。值得一提的是，由于缺乏 $v$ 的自由发散条件，热带气候模式的结果与三维 MHD 方程的结果存在差异。

阻尼项在一定程度上是好项，可以增加正则性，我们为了提高三维热带气候模型的正则性，为此我们增加阻尼项，研究带阻尼的三维热带气候模式的适定性。我们的主要结果可以陈述如下：

**定理 1.1.** 让 $(\mathrm{u}_0(x),\mathrm{v}_0(x),\psi_0(x)) \in H^1(R^3)$ 满足 $\nabla\cdot u = 0$。对于 $1 \le \alpha \le \frac{5}{2}$，如果 $\beta,\gamma,\delta$ 满足

$$\beta \ge 4, \gamma \ge \frac{\alpha+3}{\alpha}, \delta \ge 1.$$

那么系统(1.1)有一个唯一的全局强解 $u$ 满足，对于任意 $T > 0$，

$$u \in L^\infty(0,T;H^1(R^3)) \cap L^2(0,T;H^{\alpha+1}(R^3)) \cap L^{\beta+1}(0,T;H^{\beta+1}(R^3))$$
$$v \in L^\infty(0,T;H^1(R^3)) \cap L^2(0,T;H^2(R^3)) \cap L^{\gamma+1}(0,T;H^{\gamma+1}(R^3))$$
$$\psi \in L^\infty(0,T;H^1(R^3)) \cap L^2(0,T;H^2(R^3)) \cap L^{\delta+1}(0,T;H^{\delta+1}(R^3))$$

本文的结构如下：第一部分我们给出关于三维热带气候模型的相关进展和研究现状，并且给出主要结果；第二部分，我们给出主要结果的证明步骤。

## 2. 定理 1.1 的证明

在这一节中，我们证明定理 1.1。首先，我们对系统(1.1)给出了一个先验 $L^2$ 估计。将(1.1)分别乘以 $(\mathrm{u},\mathrm{v},\psi)$，经过分部积分，并使用 $\nabla\cdot u=0$，得到以下能量估计

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^2}^2+\|v(t)\|_{L^2}^2+\|\psi(t)\|_{L^2}^2+2\int_0^T\Big(\|\Lambda^{\alpha}u(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\psi(t)\|_{L^2}^2\\
&+\|u\|_{L^{\beta+1}}^{\beta+1}+\|v\|_{L^{\gamma+1}}^{\gamma+1}+\|\psi\|_{L^{\delta+1}}^{\delta+1}\Big)\mathrm{d}s=\|u_0\|_{L^2}^2+\|v_0\|_{L^2}^2+\|\psi_0\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

我们在哪里使用了下面的事实

$$
\begin{aligned}
&\int_{R^3}\nabla\psi\cdot v\mathrm{d}x+\int_{R^3}(\nabla\cdot v)\psi\mathrm{d}x=0,\\
&\int_{R^3}div(v\otimes v)\cdot u\mathrm{d}x+\int_{R^3}(v\cdot\nabla)u\cdot v\mathrm{d}x=0
\end{aligned}
$$

将(1.1)分别乘以 $-\Delta u$ 、 $-\Delta v$ 和 $-\Delta\psi$ ，在 $R^3$ 中积分后相加，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla\psi\|_{L^2}^2\Big)+\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2+\|\Delta v\|_{L^2}^2+\|\Delta\psi\|_{L^2}^2\\
&+\Big\||u|^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla u\Big\|_{L^2}^2+\Big\||v|^{\frac{\gamma-1}{2}}\nabla v\Big\|_{L^2}^2+\Big\||\psi|^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla\psi\Big\|_{L^2}^2+\frac{4(\beta-1)}{(\beta+1)^2}\Big\|\nabla|u|^{\frac{\beta+1}{2}}\Big\|_{L^2}^2\\
&+\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\Big\|\nabla|v|^{\frac{\gamma+1}{2}}\Big\|_{L^2}^2+\frac{4(\delta-1)}{(\delta+1)^2}\Big\|\nabla|\psi|^{\frac{\delta+1}{2}}\Big\|_{L^2}^2\\
&=\int_{R^3}(u\cdot\nabla)u\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\int_{R^3}div(v\otimes v)\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\int_{R^3}(u\cdot\nabla)v\cdot\Delta v\mathrm{d}x\\
&+\int_{R^3}(v\cdot\nabla)u\cdot\Delta v\mathrm{d}x+\int_{R^3}\nabla\psi\cdot\Delta v\mathrm{d}x+\int_{R^3}(u\cdot\nabla)\psi\cdot\Delta\psi\mathrm{d}x+\int_{R^3}(\nabla\cdot v)\cdot\Delta\psi\mathrm{d}x\\
&=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7,
\end{aligned}
$$

首先，应用 Young 不等式、Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式， $I_1$ 可以估计如下。

$$
\begin{aligned}
I_1&=\int_{R^3}(u\cdot\nabla)u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}\Lambda^{1-\alpha}(u\cdot\nabla u)\cdot\Lambda^{\alpha+1}u\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}\Lambda^{2-\alpha}(u\otimes u)\cdot\Lambda^{\alpha+1}u\mathrm{d}x\\
&\le\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}\|\Lambda^{2-\alpha}(u\otimes u)\|_{L^2}\\
&\le\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}\|\Lambda^{2-\alpha}u\|_{L^{\frac{2(\beta+1)}{\beta-1}}}\|u\|_{L^{\beta+1}}\\
&\le\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{1+\theta}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\theta}\|u\|_{L^{\beta+1}}\\
&\le\frac{1}{2}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2+C\|u\|_{L^{\beta+1}}^{\frac{2}{1-\theta}}\|\nabla u\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

这里我们使用了以下的 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\left\|\Lambda^{2-\alpha}u\right\|_{L^{\frac{2(\beta+1)}{\beta-1}}}\le C\left\|\Lambda^{\alpha+1}u\right\|_{L^2}^{\theta}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^{1-\theta}$$

在这里

$$\frac{\beta-1}{2(\beta+1)}=\frac{1-\alpha}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)\theta+\frac{1-\theta}{2}$$

通过直接计算，得到

$$\theta=\frac{(5-2\alpha)(\beta+1)-3(\beta-1)}{2\alpha(\beta+1)}$$

如果下列限制成立

$$\frac{2}{1-\theta}\le\beta+1$$

然后我们得到 $\beta\ge\dfrac{4}{2\alpha-1}$

通过 Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式，$I_2$、$I_3$ 和 $I_4$ 的项可以估计如下：

$$\begin{aligned}
&I_2+I_3+I_4\\
&=\int_{R^3}\nabla\cdot(v\otimes v)\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\int_{R^3}(u\cdot\nabla)v\cdot\Delta v\mathrm{d}x+\int_{R^3}(v\cdot\nabla)u\cdot\Delta v\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}\left(v_j\partial_i v_i+v_i\partial_i v_j\right)\partial_k\partial_k u_j\mathrm{d}x+\int_{R^3}u_i\partial_i v_j\partial_k\partial_k v_j\mathrm{d}x+\int_{R^3}v_i\partial_i u_j\partial_k\partial_k v_j\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}\left(v_j\partial_i v_i+v_i\partial_i v_j\right)\partial_k\partial_k u_j\mathrm{d}x+\int_{R^3}\left(\partial_k\partial_k u_i\partial_i v_j+\partial_k u_i\partial_k\partial_i v_j\right)\mathrm{d}x+\int_{R^3}v_i\partial_i u_j\partial_k\partial_k v_j\mathrm{d}x\\
&\le\int_{R^3}|v||\nabla v|\left|\nabla^2 u\right|\mathrm{d}x+\int_{R^3}|v||\nabla u|\left|\nabla^2 v\right|\mathrm{d}x\\
&=J_1+J_2
\end{aligned}$$

接下来，我们将估计 $J_1$ 和 $J_2$。

$$\begin{aligned}
J_1&=\int_{R^3}|v||\nabla v|\left|\nabla^2 u\right|\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}|v|^{\frac{\gamma-1}{2}}|\nabla v||v|^{\frac{3-\gamma}{2}}|\Delta u|\mathrm{d}x\\
&\le\left\||v|^{\frac{\gamma-1}{2}}\nabla v\right\|_{L^2}\|v\|_{L^{\gamma+1}}^{\frac{3-\gamma}{2}}\|\Delta u\|_{L^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}\\
&\le\left\||v|^{\frac{\gamma-1}{2}}\nabla v\right\|_{L^2}\|v\|_{L^{\gamma+1}}^{\frac{3-\gamma}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\lambda_1}\left\|\Lambda^{1+\alpha}u\right\|_{L^2}^{\lambda_1}\\
&\le\frac{1}{2}\left\||v|^{\frac{\gamma-1}{2}}\nabla v\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\Lambda^{1+\alpha}u\right\|_{L^2}^2+C\|v\|_{L^{\gamma+1}}^{\frac{3-\gamma}{1-\lambda_1}}\|\nabla u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

这里我们使用了 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\|\Delta u\|_{L^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}\le C\left\|\Lambda^{\alpha+1}u\right\|_{L^2}^{\lambda_1}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\lambda_1}$$

在这里

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)\lambda_1+\frac{1-\lambda_1}{2},\lambda_1\in\left[\frac{1}{\alpha},1\right]$$

从(2.12)我们可以直接计算出 $\lambda_1 = \dfrac{11-\gamma}{2\alpha(\gamma+1)}$， $\gamma \ge \dfrac{11-2\alpha}{2\alpha+1}$ 和 $\alpha \ge 1$。

如果下列限制成立

$$\frac{3-\gamma}{1-\lambda_1} \le \gamma+1$$

然后，我们可以得到 $\gamma \ge \dfrac{4\alpha+11}{4\alpha+1}$。

同理， $J_2$ 可以估算如下：

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{R^3} |v||\nabla u||\nabla^2 v| \mathrm{d}x \\
&\le \|v\|_{L^{\gamma+1}} \|\nabla u\|_{L^{\frac{2\gamma+1}{\gamma-1}}} \|\Delta v\|_{L^2} \\
&\le C\|v\|_{L^{\gamma+1}}^2 \|\nabla u\|_{L^{\frac{2\gamma+1}{\gamma-1}}}^2 + \frac{1}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2 \\
&\le C\|v\|_{L^{\gamma+1}}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^{2(1-\lambda_2)} \left\|\Lambda^{1+\alpha} u\right\|_{L^2}^{2\lambda_2} + \frac{1}{4}\|\Delta v\|_{L^2}^2 \\
&\le C\|v\|_{L^{\gamma+1}}^{\frac{2}{1-\lambda_2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\left\|\Lambda^{1+\alpha} u\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\Delta v\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

这里我们使用了 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\|\nabla u\|_{L^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma-1}}} \le C\left\|\Lambda^{\alpha+1} u\right\|_{L^2}^{\lambda_2} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-\lambda_2}.$$

通过直接计算，我们有 $\lambda_2 = \dfrac{3}{\alpha(\gamma+1)}$。如果下列限制成立

$$\frac{2}{1-\lambda_2} \le \gamma+1$$

然后，我们可以得到 $\gamma \ge \dfrac{\alpha+3}{\alpha}$。对于 $I_5$ 和 $I_7$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
I_5 + I_7 &= \int_{R^3} \nabla\psi \cdot \Delta v \mathrm{d}x + \int_{R^3} (\nabla \cdot v)\Delta\psi \mathrm{d}x \\
&\le \int_{R^3} |\nabla\psi||\Delta v| \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta v\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\psi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

应用 soblove 不等式， $I_6$ 可以估计如下

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{R^3} (u\cdot\nabla)\psi\Delta\psi \mathrm{d}x \\
&\le \|u\|_{L^{\beta+1}} \|\nabla\psi\|_{L^{\frac{2\beta+1}{\beta-1}}} \|\Delta\psi\|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{4}\|\Delta\psi\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^{\beta+1}}^{\frac{2(\beta+1)}{\beta-2}} \|\nabla\psi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

收集以上的估计(2.5)~(2.18)并将它们应用到(2.4)中，有下列结果成立

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla \psi\|_{L^2}^2\right)+\left\|\Lambda^{\alpha+1}u\right\|_{L^2}^2+\|\Delta v\|_{L^2}^2+\|\Delta \psi\|_{L^2}^2\\
&+\left\||u|^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\||v|^{\frac{\gamma-1}{2}}\nabla v\right\|_{L^2}^2+\left\||\psi|^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \psi\right\|_{L^2}^2+\frac{4(\beta-1)}{(\beta+1)^2}\left\|\nabla|u|^{\frac{\beta+1}{2}}\right\|_{L^2}^2\\
&+\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\left\|\nabla|v|^{\frac{\gamma+1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\frac{4(\delta-1)}{(\delta+1)^2}\left\|\nabla|\psi|^{\frac{\delta+1}{2}}\right\|_{L^2}^2\\
&\le C\left(1+\|u\|_{L^{\beta+1}}^{\beta+1}+\|v\|_{L^{\gamma+1}}^{\gamma+1}\right)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla \psi\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}
$$

在这里，我们使用了 $\beta\ge 4$，$\gamma\ge\frac{\alpha+3}{\alpha}$ 去确保 $\frac{2(\beta+1)}{\beta-2}\le\beta+1$、(2.8)、(2.13)及(2.16)。根据 Gronwall 不等式和(2.1)，我们

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla \psi\|_{L^2}^2+\int_0^t\left(\left\|\Lambda^{\alpha+1}u\right\|_{L^2}^2+\|\Delta v\|_{L^2}^2+\|\Delta \psi\|_{L^2}^2+\left\||u|^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\||v|^{\frac{\gamma-1}{2}}\nabla v\right\|_{L^2}^2+\left\||\psi|^{\frac{\delta-1}{2}}\nabla \psi\right\|_{L^2}^2\right)\\
&\le C\left(t,\|u_0\|_{H^1},\|v_0\|_{H^1},\|\psi_0\|_{H^1}\right)
\end{aligned}
$$

这样我们就完成了强解存在的证明。

接下来，我们将证明定理 1.1 中构造的强解的唯一性。假设 $(\mathrm{u}_1,\mathrm{v}_1,\psi_1)$ 和 $(\mathrm{u}_2,\mathrm{v}_2,\psi_2)$ 是方程组(1.1)的两个解，它们的解 $(\mathrm{u}_0,\mathrm{v}_0,\psi_0)$ 相同。我们定义 $(\bar{\mathrm{u}},\bar{\mathrm{v}},\bar{\psi})=(u_1-u_2,v_1-v_2,\psi_1-\psi_2)$。然后我们可以得到

$$
\begin{cases}
\partial_t\bar{u}-\Lambda^{2\alpha}\bar{u}+|u_1|^{\alpha-1}u_1-|u_2|^{\alpha-1}u_2+\nabla\bar{\pi}=-\left[(u_2\cdot\nabla\bar{u}+\bar{u}\cdot\nabla u_1)+\nabla\cdot(v_2\otimes\bar{v})+\nabla\cdot(\bar{v}\otimes v_1)\right],\\
\partial_t\bar{v}=-\Delta\bar{v}+|v_1|^{\beta-1}v_1-|v_2|^{\beta-1}v_2=-(u_2\cdot\nabla\bar{v}+\bar{u}\cdot\nabla v_1)-\nabla\bar{\psi}-(v_2\cdot\nabla\bar{u}+\bar{v}\cdot\nabla u_1),\\
\partial_t\tilde{\psi}-\Delta\bar{\psi}+|\psi_1|^{\gamma-1}\psi_1-|\psi_2|^{\gamma-1}\psi_2=-(u_2\cdot\nabla\bar{\psi}+\bar{u}\cdot\nabla\psi_1)-\nabla\cdot\bar{v},\\
\nabla\cdot\bar{u}=0.
\end{cases}
$$

将(2.21)式分别与 $(\bar{\mathrm{u}},\bar{\mathrm{v}},\bar{\psi})$ 做 $L^2$ 内积，将结果相加，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(\bar{u},\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2+\left\|\Lambda^{\alpha}\bar{u}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2+\int_{R^3}\left(|u_1|^{\alpha-1}u_1-|u_2|^{\alpha-1}u_2\right)\cdot\bar{u}\mathrm{d}x\\
&+\int_{R^3}\left(|v_1|^{\beta-1}v_1-|v_2|^{\beta-1}v_2\right)\cdot\bar{\mathrm{v}}\mathrm{d}x+\int_{R^3}\left(|\psi_1|^{\gamma-1}\psi_1-|\psi_2|^{\gamma-1}\psi_2\right)\cdot\bar{\psi}\mathrm{d}x\\
&\le\int_{R^3}|\bar{u}|^2|\nabla u_1|\mathrm{d}x+\int_{R^3}|\Delta\bar{u}|(v_1,v_2)|\tilde{v}|\mathrm{d}x+\int_{R^3}|\nabla v_1||\bar{u}||\bar{v}|\mathrm{d}x+\int_{R^3}|\bar{v}|^2|\nabla v_1|\mathrm{d}x+\int_{R^3}|\nabla\psi_1||\bar{u}||\bar{\psi}|\mathrm{d}x\\
&=K_1+K_2+\cdots+K_5.
\end{aligned}
$$

应用 Hölder 不等式，当 $\beta\ge 1$ 时，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{R^3}\left(|u_1|^{\beta-1}u_1-|u_2|^{\beta-1}u_2\right)\cdot\bar{u}\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}\left(|u_1|^{\beta-1}u_1-|u_2|^{\beta-1}u_2\right)\cdot(u_1-u_2)\mathrm{d}x\\
&=\int_{R^3}|u_1|^{\beta+1}\mathrm{d}x-\int_{R^3}|u_1|^{\beta-1}u_1u_2\mathrm{d}x-\int_{R^3}|u_2|^{\beta-1}u_2u_1\mathrm{d}x+\int_{R^3}|u_2|^{\beta+1}\mathrm{d}x\\
&\ge\|u_1\|_{L^{\beta+1}}^{\beta+1}-\|u_1\|_{L^{\beta+1}}^{\beta}\|u_2\|_{L^{\beta+1}}-\|u_2\|_{L^{\beta+1}}^{\beta}\|u_1\|_{L^{\beta+1}}+\|u_2\|_{L^{\beta+1}}^{\beta+1}\\
&=\left(\|u_1\|_{L^{\beta+1}}^{\beta}-\|u_2\|_{L^{\beta+1}}^{\beta}\right)\left(\|u_1\|_{L^{\beta+1}}-\|u_2\|_{L^{\beta+1}}\right)\ge 0.
\end{aligned}
$$

同样，对于$\gamma,\delta \ge 1$，我们有

$$\int\limits_{R^3}\left(|v_1|^{\beta-1}v_1-|v_2|^{\beta-1}v_2\right)\overline{v}\mathrm{d}x \ge 0,$$
$$\int\limits_{R^3}\left(|\psi_1|^{\beta-1}\psi_1-|\psi_2|^{\beta-1}\psi_2\right)\overline{\psi}\mathrm{d}x \ge 0.$$

应用 Hölder, Gagliardo-Nirenberg 和 Young 不等式， $K_1$ 和 $K_4$ 可以估计如下

$$\begin{aligned}K_1 &= \int\limits_{R^3}|\overline{u}|^2|\nabla u_1|\mathrm{d}x\\ &\le C\|\overline{u}\|_{L^4}^2\|\nabla u_1\|_{L^2}\\ &\le C\|\overline{u}\|_{L^2}^{2\left(1-\frac{3}{4\alpha}\right)}\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^{\frac{3}{2\alpha}}\|\nabla u_1\|_{L^2}\\ &\le \frac14\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^2+C\|\overline{u}\|_{L^2}^2\|\nabla u_1\|_{L^2}^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}}\\ &\le \frac14\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^2+C\|\overline{u}\|_{L^2}^2\|\nabla u_1\|_{L^2}^4\end{aligned}$$

我们使用了 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\|\overline{u}\|_{L^4}\le C\|\overline{u}\|_{L^2}^{1-\frac{3}{4\alpha}}\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^{\frac{3}{4\alpha}}$$

同样的， $K_4$ 也可以这样估计

$$\begin{aligned}K_4 &= \int\limits_{R^3}|\overline{v}|^2|\nabla u_1|\mathrm{d}x\\ &\le C\|\overline{v}\|_{L^4}^2\|\nabla u_1\|_{L^2}\\ &\le C\|\overline{v}\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla\overline{v}\|_{L^2}^{\frac32}\|\nabla u_1\|_{L^2}^4\\ &\le \frac14\|\nabla\overline{v}\|_{L^2}^2+C\|\overline{v}\|_{L^2}^2\|\nabla u_1\|_{L^2}^4\end{aligned}$$

接下来，我们将估计 $K_2$

$$\begin{aligned}K_2 &= \int\limits_{R^3}|\nabla\overline{u}|(v_1,v_2)|\overline{v}|\mathrm{d}x\\ &\le C\|\nabla\overline{u}\|_{L^{\frac{6}{5-2\alpha}}}\|(v_1,v_2)\|_{L^4}\|\overline{v}\|_{L^{\frac{12}{4\alpha-1}}}\\ &\le C\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}\|(v_1,v_2)\|_{L^4}\|\tilde{v}\|_{L^{\frac{12}{4\alpha-1}}}\\ &\le \frac14\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^2+C\|(v_1,v_2)\|_{L^4}^2\|\overline{v}\|_{L^{\frac{12}{4\alpha-1}}}^2\\ &\le \frac14\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^2+C\|(v_1,v_2)\|_{L^4}^{\frac12}\|\nabla(v_1,v_2)\|_{L^2}^{\frac32}\|\overline{v}\|_{L^2}^{2(1-\theta_1)}\|\nabla\overline{v}\|_{L^2}^{2\theta_1}\\ &\le \frac14\|\Lambda^\alpha\overline{u}\|_{L^2}^2+\frac14\|\nabla\overline{v}\|_{L^2}^2+C\|(v_1,v_2)\|_{L^2}^{\frac{1}{2(1-\theta_1)}}\|\nabla(v_1,v_2)\|_{L^2}^{\frac{3}{2(1-\theta_1)}}\|\overline{v}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

这里我们使用了 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\|\overline{v}\|_{L^{\frac{12}{4\alpha-1}}}\le C\|\overline{v}\|_{L^2}^{1-\theta_1}\|\nabla\overline{v}\|_{L^2}^{\theta_1}$$

通过直接计算，我们可以得到 $\theta_1=\frac{7-4\alpha}{4}$ 和 $\frac{1}{2(1-\theta_1)}\le 2$，$\frac{3}{2(1-\theta_1)}\le 6$。所以我们有

$$K_2\le\frac{1}{4}\left\|\Lambda^\alpha\bar{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla\bar{v}\right\|_{L^2}^2+C\left\|(v_1,v_2)\right\|_{L^2}^2\left\|\nabla(v_1,v_2)\right\|_{L^2}^6\left\|\bar{v}\right\|_{L^2}^2$$

涉及 $K_3$ 和 $K_5$ 的项可以估计如下

$$\begin{aligned}K_3+K_5&=\int_{R^3}\left|\nabla(v_1,\psi_1)\right|\left|\bar{u}\right|\left|(\bar{v},\bar{\psi})\right|\mathrm{d}x\\&\le C\left\|\nabla(v_1,\psi_1)\right\|_{L^2}\left\|\bar{u}\right\|_{L^4}\left\|(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^4}\\&\le C\left\|\nabla(v_1,\psi_1)\right\|_{L^2}\left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^{1-\theta_2}\left\|\Lambda^\alpha\bar{u}\right\|_{L^2}^{\theta_2}\left\|(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\left\|\nabla(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\\&\le\frac{1}{4}\left\|\Lambda^\alpha\bar{u}\right\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^{\frac{2}{2-\theta_2}}\left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^{\frac{2(1-\theta_2)}{2-\theta_2}}\left\|(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla(v_1,\psi_1)\right\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\\&\le\frac{1}{4}\left\|\Lambda^\alpha\bar{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2+C\left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^{\frac{8(1-\theta_2)}{5-4\theta_2}}\left\|(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^{\frac{2}{5-4\theta_2}}\left\|\nabla(v_1,\psi_1)\right\|_{L^2}^{\frac{8}{5-4\theta_2}}\end{aligned}$$

通过直接计算，我们可以得到 $\theta_2=\frac{3}{4\alpha}$ 和 $\frac{8(1-\theta_2)}{5-4\theta_2}\le 2$，$\frac{8}{5-4\theta_2}\le 4$，$\frac{2}{5-4\theta_2}\le 2$。所以我们有

$$K_3+K_5\le\frac{1}{4}\left\|\Lambda^\alpha\bar{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla(\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2+C\left\|(\bar{u},\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2\left\|\nabla(v_1,\psi_1)\right\|_{L^2}^4.$$

将(2.24)~(2.31)估计应用到(2.22)中，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(\bar{u},\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2\le C\left(\left\|(v_1,v_2)\right\|_{L^2}^2\left\|\nabla(v_1,v_2)\right\|_{L^2}^6+\left\|\nabla(u_1,v_1,\psi_1)\right\|_{L^2}^4\right)\left\|(\bar{u},\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2$$

应用 Grönwall 不等式，通过 $H^1$-估计，可以得到

$$\left\|(\bar{u},\bar{v},\bar{\psi})\right\|_{L^2}^2=0$$

这样完成了定理 1.1 唯一性部分的证明。

## 参考文献


[1] Ye, Z. (2015) Regularity and Decay of 3D Incompressible MHD Equations with Nonlinear Damping Terms. *Colloquium Mathematicum*, **139**, 185-203. https://doi.org/10.4064/cm139-2-3

[2] Titi, E.S. and Trabelsi, S. (2019) Global Well-Posedness of a 3D MHD Model in Porous Media. *Journal of Geometric Mechanics*, **11**, 621-637. https://doi.org/10.3934/jgm.2019031

[3] Zhang, Z.J., Wu, C.P. and Yao, Z.A. (2018) Remarks on Global Regularity for the 3D MHD System with Damping. *Applied Mathematics and Computation*, **333**, 1-7. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.047

[4] Cai, X.J. and Jiu, Q.S. (2008) Weak and Strong Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041

[5] Zhou, Y. (2012) Regularity and Uniqueness for the 3D Imcompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1822-1825. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.02.029

[6] Jiang, Z.H. and Zhu, M.X. (2012) The Large Time Behavior of Solutions to 3D Navier-Stokes Equations with Nonlinear Damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **35**, 97-102. https://doi.org/10.1002/mma.1540

[7] Liu, H. and Gao, H.J. (2017) Decay of Solutions for the 3D Navier-Stokes Equations with Damping. *Applied Mathematics Letters*, **68**, 48-54. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.11.013

[8] Wang, W.H. and Zhou, G.P. (2015) Remarks on the Regularity Criterion of the Navier-Stokes Equations with Nonlinear Damping. *Mathematical Problems in Engineering*, **35**, 1-5. https://doi.org/10.1155/2015/310934

[9] Zhang, Z.J., Wu, X.L. and Lu, M. (2011) On the Uniqueness of Strong Solution to the Incompressible Navier-Stokes

Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 414-419. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.019

[10] Wang, Y.N., Zhang, S.Y. and Pan, N.N. (2020) Regularity and Global Existence on the 3D Tropical Climate Model. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 641-650. https://doi.org/10.1007/s40840-018-00707-3

[11] Li, J.K. and Yu, Y.H. (2019) Global Regularity for a Class of 3D Tropical Climate Model without Thermal Diffusion.

[12] Zhu, M.X. (2018) Global Regularity for the Tropical Climate Model with Fractional Diffusion on Barotropic Model. *Applied Mathematics Letters*, **81**, 99-104. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.02.003

[13] Dong, B.Q., Wang, W.J., Wu, J.H., Ye, Z. and Zhang, H. (2019) Global Regularity for a Class of 2D Generalized Tropical Climate Models. *Journal of Differential Equations*, **266**, 6346-6382. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.11.007

[14] Dong, B.Q., Wang, W.J., Wu, J.H. and Zhang, H. (2019) Global Regularity Results for the Climate Model with Fractional Dissipation. *Centered around Dynamics*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, **24**, 211-229. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018102

[15] Dong, B.Q., Wu, J.H. and Ye, Z. (2019) Global Regularity for a 2D Tropical Climate Model with Fractional Dissipation. *Journal of Nonlinear Science*, **29**, 511-550. https://doi.org/10.1007/s00332-018-9495-5

[16] Dong, B.Q., Wu, J.H. and Ye, Z. (2020) 2D Tropical Climate Model with Fractional Dissipation and Without Thermal Diffusion. *Communications in Mathematical Sciences*, **18**, 259-292. https://doi.org/10.4310/CMS.2020.v18.n1.a11

[17] Li, J.K. and Titi, E.S. (2016) Global Well-Posedness of Strong Solutions to a Tropical Climate Model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36**, 4495-4516. https://doi.org/10.3934/dcds.2016.36.4495

[18] Wan, R.H. (2016) Global Small Solutions to a Tropical Climate Model without Thermal Diffusion. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, 1-13. https://doi.org/10.1063/1.4941039

[19] Ye, X. and Zhu, M.X. (2020) Global Strong Solutions of the 2D Tropical Climate System with Temperature-Dependent Viscosity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **71**, 97-107. https://doi.org/10.1007/s00033-020-01321-9