Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(8), 5405-5421**
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118569

k-映射的指数定律

顾钰晗

南京工业大学数理科学学院，江苏 南京

收稿日期：2022年7月8日；录用日期：2022年8月2日；发布日期：2022年8月10日

摘　要

本文介绍了指数定律和k-空间即紧生成空间相关的研究历史，并给出了k-映射的指数定律的一个证明。本文用赋予终拓扑的方法定义了拓扑空间的k化，接下来依次引入k-空间、k-映射、k-映射空间的定义。本文利用一系列定理说明k化了的k-映射空间中可以存在指数定律，证明了指数定律还是某种k-空间之间的同胚。在k-空间的基础上，本文介绍了弱Hausdorff的性质以及它对k-空间性质的影响，并利用对角集对弱Hausdorff的紧生成空间进行判定。最后，本文以数学分析中的含参积分为例说明弱Hausdorff的紧生成空间以及对角集在 $\mathbb{R}^n$ 中的应用。为此本文还介绍了滤子基，展示了对角集在一致连续定义中的作用，并证明了如何通过滤子基将极限的换序推广到一般情形。本文的主要结果是给出k-映射的指数定律的一个证明，并举出了一个k-空间的具体例子，展示了对角集在k-空间判定和含参积分中的应用。

关键词

k-空间，k-映射，指数定律，弱Hausdorff

Exponential Law of k-Mapping

Yuhan Gu

School of Physical and Mathematical Sciences, Nanjing Tech University, Nanjing Jiangsu

Received: Jul. 8th, 2022; accepted: Aug. 2nd, 2022; published: Aug. 10th, 2022

Abstract

This paper introduces the research history of exponential law and k-space, which is also called compactly generated space, and gives a proof of exponential law of k-mapping. In this paper, the k-ficaton of topological space is defined by giving the final topology, and then the definitions of k-space, k-mapping and k-mapping space are introduced in turn. In this paper, a series of theorems are used to illustrate that there can be an exponential law in k-mapping spaces with k-ficaton, and it is proved that the exponential law is also a homeomorphism between some k-spaces. On the basis of k-space, this paper introduces the properties of weakly Hausdorff and its influence on the properties of k-space, and uses diagonal set to determine whether a compactly

文章引用: 顾钰晗. k-映射的指数定律[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5405-5421.
DOI: 10.12677/aam.2022.118569

generated space is weakly Hausdorff. Finally, this paper takes the parametric integral in mathematical analysis as an example to illustrate the application of compactly generated weakly Hausdorff spaces and diagonal set in $\mathbb{R}^n$. Therefore, this paper also introduces the filter base, explaining the role of diagonal set in the definition of uniform continuity, and proves how to extend the order change of limit to the general case through filter base. The main results of this paper are giving a proof of the exponential law of k-mapping, and giving a specific example of k-spaces, showing the application of diagonal set in k-space determination and parametric integral.

Keywords

k-Space, k-Mapping, Exponential Law, Weakly Hausdorff

1. 引言

函数族的收敛性在数学和工程中扮演着非常重要的角色。

例如，用多项式逼近光滑函数(Taylor 级数与幂级数)，用三角函数逼近分段连续函数(Fourier 级数)等，都是通过函数空间的正交基对函数进行逼近。

机器学习等领域的实践表明，映射的复合可能会带来更多的结构。

本文介绍的指数定律给出了多元映射与复合映射之间的某种同构关系：两个变量的函数可以被视为一个变量的变量函数。

在集合论、高等代数和数学分析中，指数定律的例子包括：

例 1.1. 对集合 X,Y,Z，指数定律是指双射

$$E : X^{Z\times Y} \to \left(X^Y\right)^Z$$
$$\left(\left(f\right)\left(z,y\right)\right) \mapsto \left(\hat{f}\right)\left(y\right)\left(z\right).$$

例 1.2. 对于有限维线性空间 X,Y,Z 和它们之间的线性映射，有线性同构

$$\mathcal{L}\left(X\otimes Y,Z\right)\cong\mathcal{L}\left(X,\mathcal{L}\left(Y,Z\right)\right).$$

证明由 $\dim\mathcal{L}\left(X\otimes Y,Z\right)=\dim\mathcal{L}\left(X,\mathcal{L}\left(Y,Z\right)\right)$ 得到线性空间的同构。

例 1.3. 在欧氏空间 X,Y 中考虑 m 阶连续可微函数 $f\in C^m\left(X,Y\right)$，则对任意的 $k\le m-1$，有

$$\partial^k f\in C^1\left(X,\mathcal{L}^k\left(X,Y\right)\right).$$

又由多线性性质，有

$$\begin{aligned}
&\partial^k f\left(\boldsymbol{x}\right)\left[\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_k\right]\\
&=\partial\left(\cdots\left(\partial\left(\partial f\left(\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{h}_1\right)\boldsymbol{h}_2\right)\cdots\boldsymbol{h}_k\right)\\
&=\sum_{j_k=1}^{n}\sum_{j_{k-1}=1}^{n}\cdots\sum_{j_1=1}^{n}\partial_{j_k}\cdots\partial_{j_2}\partial_{j_1}f\left(\boldsymbol{x}\right)h_1^{j_1}h_2^{j_2}\cdots h_k^{j_k},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{h}_i\in X\left(i=1,2,\cdots,n\right)$。

特别地，对 $[\boldsymbol{h}]^k$，由多项式定理，有

$$\begin{aligned}\partial^k f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}]^k &= \left(\sum_{i=1}^{n} h^i \partial_i\right)^k f(\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{h}^\alpha,\end{aligned}$$

其中 α 为 n 重指标。由此可以得到 Taylor 定理的多元多项式表示。

上面三个例子中的映射或是不附带任何结构，或是线性映射，或与线性映射只相差 $o(\|\boldsymbol{h}\|)(\boldsymbol{h}\to 0)$。因此应当考虑更广的一类函数，这类函数具有某种结构(如连续性)，并研究这类映射的性质与映射族的收敛性。为此需要引入映射空间的拓扑结构。

数学分析中主要考虑紧集上的连续函数空间。例如，有界闭区间上的连续函数列若一致收敛，则其极限函数也是连续的。这意味着有界闭区间上的连续函数全体作为某个拓扑空间中的集合是闭的。因此自然地考虑定义一致收敛度量。

一般地，需要考虑任意的拓扑空间。参考文献[1]中介绍了拓扑学中的基本内容。

对给定的拓扑空间可以进行大量操作，例如取乘积、商、推出等。但拓扑空间全体未必有足够好的性质，因此常只考虑某些具有特定性质的拓扑空间，例如紧致性、Hausdorff 性质等。

函数空间拓扑的概念可以追溯到度量

$$d(f,g) = \sup_{c\in C}\left\{d_X\left(f(c), g(c)\right)\right\},$$

其中 C 是紧致空间，(X, d_X) 是度量空间。

为了考虑 C 仅局部紧的情形，R. H. Fox 在连续函数集 $C(Y,X)$ 上引入了紧 - 开拓扑，其中 Y 和 X 是拓扑空间。对于 Y 中的紧集 C 和 X 中的开集 U，紧 - 开拓扑有一个子基 $\mathcal{W}(C,U)$，其中的元素是一些连续函数 $f: Y\to X$，它们满足 $f(C)\subseteq U$。Fox 还开始研究这与“指数定律”的关系。

Fox 给出了与指数定律类似的结果，即将例 1.1 中的 X^Y 替换为 $C(X,Y)$。这要为连续函数空间赋予拓扑。遗憾的是，人们发现这只适用于 Y 是局部紧的情形，即具有紧集构成的邻域基，并且需要的拓扑是紧 - 开拓扑。

关于指数定律，R. Arens 和 J. Dugundji 给出了 $C(X,Y)$ 中拓扑的详细分析。

指数定律的有效性对局部紧空间的限制对于拓扑学来说是困难的。E. Spanier 在参考文献[2]中提出，这种情况可以通过使用“准拓扑空间(quasi-topological spaces)”来改善，该空间由从紧 Hausdorff 空间 C 上的一族映射 $f: C\to X$ 确定了 X，还满足特定的公理。在这之后，参考文献[3]也对其进行了讨论。

Hausdorff 紧生成空间最初称为 k-空间，来源于德语单词 kompakt。Hurewicz 对 k-空间进行了研究。其他数学家如 Kelley、Dugundji、Félix、Halperin 和 Thomas 也发现了它们。

20 世纪 60 年代，他们进行深入研究的动机来自于常见拓扑空间类别的众所周知的缺陷：这不是笛卡儿闭范畴，通常笛卡儿积的识别映射并不总是识别映射。有两种方法可以改善这种情况。一是限制在 Hausdorff 紧生成的 Hausdorff 空间的全子范畴内，这实际上是笛卡尔闭的。另一种是考虑通常的 Hausdorff 空间，但使用紧致子集上的连续函数。

R. Brown 在参考文献[4]中发现，在具有 Hausdorff 性质的 k-空间和连续映射的范畴中，指数定律是满足的。参考文献[5]指出，这一类别“可能对拓扑的所有目的都是充分和方便的”。而参考文献[6]中的论述提出了 Hausdorff 空间和

$$C(Z\times_S Y, X)\cong C\left(Z, C(Y,X)\right)$$

的定律，解释了指数定律不能在所有空间中存在。

可以通过将紧生成表示为“具有关于紧 Hausdorff 空间到空间的所有映射的最终拓扑”将 Hausdorff 条件移除。在参考文献[7]中，这被推广到紧 Hausdorff 空间的特定集族 $\mathcal{A}$ 的情况，考虑拓扑空间之间的 $\mathcal{A}$-连续映射 $\mathcal{A}(X,Y)$，其上赋予了以

$$\mathcal{W}(t,U)=\{f\in\mathcal{A}(X,Y): f\circ t(A)\subseteq U\}$$

为子基的拓扑，其中 U 是 Y 中的开集，而 $t:A\to X$ 是“测试”映射。

这些观点可以推广到非 Hausdorff 情形，例如紧生成的空间。这是因为 Hausdorff 空间的标识空间不必是 Hausdorff。

在现代代数拓扑中，该性质通常与弱 Hausdorff 性质结合。弱 Hausdorff 性质这一概念是由 M. C. Cord 引入的，以弥补使用 Hausdorff 空间范畴带来的不便。其讨论在参考文献[8]中。

本文用了对角映射和对角集证明弱 Hausdorff 的性质，而对角集的作用在其他地方也有体现，为此本文还介绍了滤子基。

序列足以描述度量空间中的拓扑性质，或者更一般地，描述拓扑具有可数基的拓扑空间中的拓扑性质。然而，在更抽象的空间中需要滤子基或网。

滤子的研究是描述一般拓扑空间收敛性的一种非常自然的方法。滤子于 1937 年由 Cartan 引入。在 Kowalsky 的文献中可以看见拓扑的发展对滤子的影响。滤子也是泛函分析中描述非拓扑收敛概念的重要工具。此外，Preuss 在他关于分类拓扑的书中应用了滤子。

在拓扑空间中，滤子可以用于刻画连续性、紧性等重要概念。本文将采用滤子基说明对角集的应用。

此外，关于滤子和滤子基的许多性质可以在参考文献[9]中找到。

本文中对拓扑空间的一个重要操作是 k 化。而本文中定义的 k 化是给空间赋予某个终拓扑，这是基于如下一系列事实：

终拓扑是拓扑空间上使所有测试函数连续的最细拓扑。商空间上的商拓扑是关于单个满射函数的终拓扑，即商映射。不相交并拓扑是关于包含映射的终拓扑。终拓扑也是拓扑空间范畴中每个直接极限所赋予的拓扑。拓扑与一些子空间集合是一致当且仅当拓扑是由自然包含诱导的终拓扑。

关于终拓扑的详细讨论和例子见参考文献[10] [11] [12]。

本文由 k 化入手定义 k-空间，其中 k 化是给空间赋予终拓扑，接下来本文依次定义了 k-映射，并对 k-映射全体赋予了测试 - 开拓扑，使之成为 k-映射空间。

在上述定义下，本文证明了指数定律。

接下来本文还介绍弱 Hausdorff 性质。在 k-空间和弱 Hausdorff 性质的判定中，都出现了对角集。从滤子基的角度可以看到对角集在定义度量空间中函数的一致连续时起到的作用。

在本文的最后，将把含参积分作为 k-空间中的例子讨论其性质。为了一般化，本文利用滤子基直接将定义域推广到 $\mathbb{R}^n$。在证明含参积分对参数的连续性时，通过一致连续的滤子基定义再次用到了对角集。

本文的主要结果是给出 k-映射的指数定律的一个证明，并举出了一个 k-空间的具体例子，展示了对角集在 k-空间判定和含参积分中的应用。

2. 相关理论基础和模型

2.1. 积空间与映射空间

首先叙述积空间与映射空间的概念和性质。

定义 2.1. 设 $\{X_j\}_{j\in J}$ 是一族集合。对 J-元组

$$\left(x_j\right)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j,$$

定义投影映射

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : \prod_{j\in J} X_j &\to X_\alpha \\ \left(x_j\right)_{j\in J} &\mapsto x_\alpha .\end{aligned}$$

定义 2.2. 设$\left(X_j,\tau_j\right)_{j\in J}$是一族拓扑空间，对每个$j\in J$定义$X_j$的子集族

$$\mathcal{S}_j=\left\{\pi_j^{-1}\left(U_j\right):U_j\in\tau_j\right\},$$

则$\bigcup_{j\in J}\mathcal{S}_j$导出的拓扑$\tau$称为积拓扑。称

$$\left(\prod_{j\in J} X_j,\tau\right)$$

为积空间，其中每个$\left(X_j,\tau_j\right)$称为坐标空间。

推论 2.1. 积空间到坐标空间的投影映射是连续映射。

定义 2.3. 对从J到Y的映射全体

$$Y^J=\prod_{j\in J} Y_j,$$

称其中的元素$\left(y_j\right)_{j\in J}$为选择函数。

假设(选择公理)。设$\left(y_j\right)_{j\in J}$为某一集合的子集族。若$J\neq\varnothing$，且$\forall j\in J,\left(Y_j\neq\varnothing\right)$，则

$$\prod_{j\in J} Y_j\neq\varnothing,$$

即选择函数存在。

积空间有以下三个性质，证明见点集拓扑教科书，例如参考文献[1]。

引理 2.1. 映射$f:X\to\prod_{j\in J}Y_j$连续当且仅当对任意$j\in J$，有$\pi_j\circ f$连续。

引理 2.2. 积空间保持连通性和 Hausdorff 性。

引理 2.3 (Tychonoff)。积空间保持紧致性。

定义 2.4. 设X是集合，$\left(Y,\tau_Y\right)$是拓扑空间，则称

$$\left\{U^E:E\in\mathcal{E}\subseteq P\left(X\right),U\in\tau_Y\right\}$$

导出的拓扑为$\mathcal{E}$-开拓扑。

定义 2.5. 称映射

$$\begin{aligned}e:Y^X\times X&\to Y\\ \left(f,x\right)&\mapsto f\left(x\right)\end{aligned}$$

为赋值映射。

2.2. 度量空间

实际应用中，常考虑度量空间。这里列出本文将用到的度量空间中的性质，许多点集拓扑学的教科书中都有它们的证明，例如参考文献[1]。

引理 2.4. 给定集合 X 上的度量 d，定义标准有界度量 $\bar{d} := \min\{d(x,y),1\}$，则 d 与 $\bar{d}$ 诱导相同的拓扑。

度量空间中可以定义收敛和一致收敛。而从点集拓扑学中知道，与一致收敛对应的还有等度连续。

定义 2.6. 设 (Y,d) 为度量空间，$\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x_0 \in X$ 的邻域 U，对任意 $x \in U$ 和任意 $f \in \mathcal{F}$，有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$，则称 $\mathcal{F}$ 在 x_0 等度连续。又若 $\mathcal{F}$ 在 x 处等度连续对任意的 $x \in X$ 成立，则称 $\mathcal{F}$ 等度连续。

完备度量空间具有更好的性质，并且给定度量空间时，完备化是唯一的。

定义 2.7. 设 X 是度量空间， X^* 是完备度量空间，若 X 与 X^* 的一个稠密子集 $\tilde{X}$ 等距同构，则称 X^* 是 X 的一个完备化。

引理 2.5. 等距同构意义下，每个度量空间的完备化是唯一的。

这一引理在泛函分析或点集拓扑学中都会用到，参考文献有[1] [12]。特别地，在映射的陪域是度量空间的情形下，还能为映射空间赋予度量。

定义 2.8. 设 X 为拓扑空间，(Y,d) 为度量空间，任意给定映射 $f \in Y^X$，X 的紧致子集 C 和 $\varepsilon > 0$，称

$$\left\{g : \sup_{x\in C}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\right\}$$

生成的拓扑为紧收敛拓扑。

例 2.1. 设 X 为拓扑空间，(Y,d) 为度量空间， Y^X，赋予紧收敛拓扑，则有： $f_n \to f\ (n \to \infty)$ 等价于对 X 的任意紧致子集 C，有 $f_n \upharpoonright C$ 一致收敛于 $f \upharpoonright C$，其中 $\upharpoonright$ 表示限制。

2.3. 滤子基上的收敛

绪论中已经简要介绍了滤子基，数学分析中的相关定理也可以用滤子基的语言证明。参考文献[13] [14]中给出了许多对许多在数学分析中实用的滤子基，并对滤子基的各项性质进行了证明。下面举出在本文的例子中会用到的滤子基。

定义 2.9. 若集合族 $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ 满足：$\varnothing \notin \mathcal{B}$，且有

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B \in \mathcal{B}, (B \subseteq B_1 \cap B_2),$$

则称 $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个滤子基。

定义 2.10. 设 X 是集合， $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 是滤子基。若满足

$$\forall B \in \mathcal{B}_1, \exists B_2 \in \mathcal{B}_2, (B_2 \subseteq B_1),$$

则称 $\mathcal{B}_2$ 比 $\mathcal{B}_1$ 细。

例 2.2.在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑 x_0 的邻域和去心邻域，可以得到两个滤子基

$$\mathcal{B}_{x_0} := \{B(x_0,\delta) : \delta > 0\}$$
$$\mathcal{B}_{x_0}^{\circ} := \{B^{\circ}(x_0,\delta) : \delta > 0\}.$$

例 2.3. 设

$$\Omega := \{(\mathcal{P};\xi) : a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 < \cdots \le x_{n-1} < \xi_n \le x_n = b\}$$

为带标记的有限分划的集合，则

$$\mathcal{B} := \{B_\delta := \{(\mathcal{P};\xi) : \lambda(\mathcal{P}) < \delta\} : \delta > 0\}$$

是 Ω 上的滤子基。

例 2.4. 设 X 为拓扑空间，$\mathcal{B}_{x_0}$ 是 $x_0 \in X$ 的邻域基，则 $\mathcal{B}_{x_0}$ 也构成 X 上的一个滤子基。

反之，给定滤子基，将其作为邻域基也可生成一个拓扑。

定义 2.11. 设 Y 是拓扑空间，$f: X \to Y$，$\mathcal{B}$ 是 X 上的滤子基，若对 $y \in Y$ 的任一邻域 V，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $f(B) \subseteq V$，则称 y 为 f 在 $\mathcal{B}$ 上的极限，记为

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = y.$$

特别地，本文的例子中考虑 $Y = \mathbb{R}^n$ 的情形，此时滤子基上的极限具有唯一性，局部有界性和保序性，且保持四则运算。

定理 2.1 (Cauchy 准则)。设 (Y, d) 是完备度量空间，则 f 在 $\mathcal{B}$ 上极限存在当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall x_1, x_2 \in B, \left(d\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \varepsilon\right).$$

下面可以用滤子基的语言刻画连续性。

引理 2.6. 对任意函数 $\delta: X \to \mathbb{R}_{>0}$，定义

$$B_{\delta(\cdot)} = \left\{(x, x_0) \in X \times X : x \in B_X\left(x_0, \delta(x_0)\right), x_0 \in X\right\},$$

则集族

$$\mathcal{B}_{\mathrm{pw}} := \left\{B_{\delta(\cdot)}\right\}$$

构成滤子基。

定理 2.2. 设 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 是度量空间，则 $f: X \to Y$ 连续当且仅当

$$\lim_{\mathcal{B}_{\mathrm{pw}}} d_Y\left(f(x_1), f(x_2)\right) = 0.$$

为了描述一致连续性，需要引入更多度量。

定义 2.12. 在 $X \times X$ 上定义度量

$$d_\infty\left((x_1, x_2), (x_3, x_4)\right) := \max\left\{d_X(x_1, x_3), d_X(x_2, x_4)\right\}.$$

对 $E \subseteq X$，定义

$$d_\infty\left((x_1, x_2), E\right) := \inf\left\{d_\infty\left((x_1, x_2), (x_3, x_4)\right) : (x_3, x_4) \in E\right\}.$$

定义 2.13. 称

$$\begin{aligned} \Delta: X &\to X \times X \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

为对角映射。称 $\Delta X := \Delta(X)$ 为对角集。

对角映射和对角集的作用在后面将会多次看到。

引理 2.7. 对任意 $\delta > 0$，定义

$$B_\delta := \left\{(x_1, x_2) : d_\infty\left((x_1, x_2), \Delta X\right) < \delta\right\},$$

则 $\mathcal{B}_\Delta := \left\{B_\delta : \delta > 0\right\}$ 构成滤子基。

定理 2.3. f 在 X 上一致连续当且仅当

$$\lim_{\mathcal{B}_\Delta} d\left(f(x_1), f(x_2)\right) = 0.$$

推论 2.2. $\mathcal{B}_{\mathrm{pw}}$ 比 $\mathcal{B}_\Delta$ 细，即按点连续是一致连续的必要条件。

定理 2.4. 设 $\mathcal{B}_X$ 与 $\mathcal{B}_Y$ 是滤子基，则 $\mathcal{B}_{X\times Y} := \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ 是滤子基。

这一性质意味着相对于网，滤子基可以更方便地处理多变量情形。

参考文献[9] [13] [14]中介绍了更深入的内容和许多例子。

2.4. 极限的换序

数学分析中常会遇到极限换序的问题，例如函数列的连续性、含参积分的连续性等。一致收敛给出了极限换序的充分条件。

定义 2.14. 设 X,Y 为集合，$\mathcal{B}_Y$ 为 Y 上的滤子基，(Z,d) 为完备度量空间，$\Phi: X\times Y \to Z$。若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $B_Y \in \mathcal{B}_Y$，对任意 $x\in X$ 和 $y \in B_Y$，都有 $d\left(\Phi(x,y),\Phi_Y(x)\right)<\varepsilon$，则称 Φ 在 X 上沿 $\mathcal{B}_Y$ 对 x 一致地收敛到 Φ_Y，记为

$$\Phi(x,y) \rightrightarrows_{\mathcal{B}_Y} \Phi_Y(x), x\in X.$$

定理 2.5. (一致收敛的 Cauchy 准则)。

$$\begin{aligned}&f(x,y) \rightrightarrows_{\mathcal{B}_Y} f_Y(x), x\in X\\&\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists B\in\mathcal{B}_Y, \forall x\in X, \forall y_1,y_2\in B, \left(d\left(f(x,y_1),f(x,y_2)\right)<\varepsilon\right).\end{aligned}$$

定理 2.6. 设 X,Y 为集合，(Z,d) 为完备度量空间，$\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y,\mathcal{B}_Z$ 分别为 X,Y,Z 上的滤子基。若 $f_Y(x)=\lim_{\mathcal{B}_Y} f(x,y)$ 和 $f_X(y)=\lim_{\mathcal{B}_X} f(x,y)$ 都存在，且其中至少一个是一致的，则 $f(x,y)$ 的两个累次极限和重极限均存在且相等。

证明 不妨设 $f(x,y)\rightrightarrows_{\mathcal{B}_X} f_X(y)$，则由一致收敛的定义，存在 $B_X\in\mathcal{B}_X$，当 $x\in B_X$，对任意的 $y\in Y$，有 $d_Z\left(f_X(y),f(x,y)\right)<\varepsilon$。

由于 $f(x,y)\to_{\mathcal{B}_Y} f_Y(x)$，取定 x_0，则由 Cauchy 准则，存在 $B_Y\in\mathcal{B}_Y$，有

$$\forall y_1,y_2\in B_Y, \left(d_Z\left(f(x_0,y_1),f(x_0,y_2)\right)\le\varepsilon\right).$$

下一步是证明 $\lim_{\mathcal{B}_Y} f_X(y)$ 存在：取 $B\subseteq B_X\times B_Y, x_0\in B_X, y_1,y_2\in B_Y$，则有

$$\begin{aligned}&d_Z\left(f_X(y_1),f_X(y_2)\right)\\&\le d_Z\left(f_X(y_1),f(x_0,y_1)\right)+d_Z\left(f(x_0,y_1),f(x_0,y_2)\right)+d_Z\left(f(x_0,y_2),f_X(y_2)\right)\\&<3\varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知 $\lim_{\mathcal{B}_Y} f_X(y)$ 存在，记为 A。

接着证明 $\lim_{\mathcal{B}_{X\times Y}} f(x,y)$ 存在且等于 A：由 $f(x,y)\rightrightarrows_{\mathcal{B}_X} f_X(y)$ 的定义，注意到

$$d\left(f(x,y),A\right)\le d\left(f(x,y),f_X(y)\right)+d\left(f_X(y),A\right)$$

即得证。

最后可以证明 $\lim_{\mathcal{B}_X} f_Y(x)$ 存在且等于 A：由 $\lim_{\mathcal{B}_{X\times Y}} f(x,y)$ 存在和 $\lim_{\mathcal{B}_Y} f_X(y)$ 存在，命题得证。

由此可以看到一致收敛和等度连续在滤子基的视角下是完全对称的。

3. k-映射的指数定律

3.1. k-映射和 k-映射空间

本文将通过 k 化定义 k-空间，而 k 化是给空间赋予终拓扑。

定理 3.1. 给定一族拓扑空间 $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$，一个集合 Y 和 X 上一族映射 $\{f_i: X_i\to Y\}_{i\in I}$，则 Y 上存在一

个拓扑 τ_{fin}，使得对任意拓扑空间 Z，及映射 $g:Y\to Z$，有 g 连续当且仅当对任意的 $i\in I$，有 $g\circ f_i:X_i\to Z$ 连续，并且 τ_{fin} 还是满足这一条件的最细的拓扑。称 τ_{fin} 为 Y 关于 $(f_i)_{i\in I}$ 的终拓扑。

证明 考虑集族

$$\tau_Y=\left\{U\subseteq Y:\forall_{i\in I}f_i^{-1}(U)\subseteq\tau_i\right\},$$

显然 $\varnothing,Y\in\tau_Y$。设 $U_k\in\tau_Y$。由原像的性质，对任意的 k 有

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_k U_k\right)=\bigcup_k f_i^{-1}(U_k)\in\tau_i,$$

对有限的 k 有

$$f_i^{-1}\left(\bigcap_k U_k\right)=\bigcap_k f_i^{-1}(U_k)\in\tau_i,$$

因此 τ_Y 是一个拓扑。

由连续映射的定义，τ_Y 是满足终拓扑条件最细的拓扑，因此 $\tau_Y=\tau_{\text{fin}}$ 即为所求。

推论 3.1. 若为 Y 赋予关于 $(f_i)_{i\in I}$ 的终拓扑，则 $(f_i)_{i\in I}$ 均是连续的。

证明 由连续映射的定义即得。

定义 3.1. 对拓扑空间 X 和任意紧 Hausdorff 空间 C，为 X 赋予关于连续映射 $t:C\to X$ 的终拓扑，记为 kX，称为 k 化。若 $\mathrm{k}X=X$，则称 X 为 k-空间或紧生成空间，记为 CG。称 C 为测试空间，其上的映射 t 称为测试映射。

显然 kX (未必严格地)细于 X，并且有：

推论 3.2. $\mathrm{k}^2X=\mathrm{k}X$。

证明 k-空间具有终拓扑，它是最细的，因此 k-空间的 k 化不会给拓扑增加更多开集。

直接根据定义判定一个空间是否是 k-空间很不方便，引入 k-闭这一概念后，就可以利用起具有更多性质的测试空间。

定义 3.2. 设 X 是拓扑空间，$A\in X$，如果对任意紧 Hausdorff 空间 K 以及任意连续映射 $f:K\to X$，有 $f^{-1}(A)$ 在 K 中闭，则称 A 在 X 中 k-闭。

定理 3.2. X 是 k-空间等价于 X 中的 k-闭子空间是闭的。

证明对任意测试空间 C，集合 $U\subseteq X$ 及连续映射 $t:C\to X$，X 具有关于 t 的终拓扑等价于

$$U\in\tau_X\Leftrightarrow t^{-1}(U)\in\tau_C.$$

当 $X\setminus U$ 取 X 的 k-闭子空间时就得到了结论。

有了上面这一定理，就可以利用原像在测试空间中的性质更方便地判定 k-空间。

定理 3.3. 局部紧 Hausdorff 空间是 k-空间。

证明设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，K 是 X 的 k-闭子空间。下证 K 是闭的。

设 $x\in\bar{K}$，由于已知 X 是局部紧 Hausdorff 空间，存在 x 的邻域 U 使得 $\bar{U}$ 是紧 Hausdorff 的，因此 $x\in\overline{\bar{U}\cap K}$。又由于 K 是 k-闭的，考虑包含映射 $i:\bar{U}\to K$ 知 $\bar{U}\cap K$ 在 $\bar{U}$ 中闭，得到 $x\in K$。

定理 3.4. 设 X 是 k-空间，Y 是任意拓扑空间，则 $f:X\to Y$ 连续当且仅当 $f:X\to\mathrm{k}Y$ 连续。

证明 由连续映射的定义得到充分性。

反之，设 K 为 Y 的 k-闭子空间，$t:C\to X$ 是测试映射。$f\circ t$ 也是测试映射，有

$$(f\circ t)^{-1}(K)=t^{-1}\left(f^{-1}(K)\right)$$

在 C 中闭。故 $f^{-1}(K)$ 在 X 中 k-闭，因此闭，由连续映射的定义得到 $f: X \to \mathrm{k}Y$ 连续。

定义 3.3. 对任意拓扑空间 Y, Z，定义

$$\mathcal{K}(Y,Z) := Z^{\mathrm{k}Y},$$

其中的元素称为从 Y 到 Z 的 k-映射。

这一定义表明，$\mathcal{K}(Y,Z)$ 中的元素实际上取自 Z^Y 中那些在复合了测试映射 $t: C \to Y$ 后就能成为 $C(C,Z)$ 中元素的映射。

例 3.1. 恒等映射 $\mathrm{id}: Y \to \mathrm{k}Y$ 是 k-映射，但未必是连续映射。

例 3.2. 若 $f: Y \to Z$ 是 k-映射，则 $f: \mathrm{k}Y \to \mathrm{k}Z$ 是连续映射。

对于拓扑空间之间的 k-映射，可以定义其映射空间中的拓扑。

定义 3.4. 对拓扑空间 Y，拓扑空间 (Z, τ_Z)，测试空间 C 和测试映射 $t: C \to Y$，定义

$$\mathcal{W}(t,U) := \{ f \in \mathcal{K}(Y,Z) : f \circ t(C) \subseteq U \in \tau_Z \},$$

其导出的拓扑称为 k-映射空间 $\mathcal{K}(Y,Z)$ 上的测试－开拓扑。

接下来假设每个 k-映射空间 $\mathcal{K}$ 中的拓扑都是测试－开拓扑 $\tau_{\mathcal{K}}$。

至此写出指数定律所需要的各个定义都已经给出。

例 3.3. 若 Y 为 Hausdorff 空间，则依此定义得到 $\mathcal{K}(Y,Z)$ 上的紧－开拓扑。

3.2. 指数定律

在集合的指数定律中，只需考虑元素的对应，因此指数映射的定义是自然的。然而，尝试在 k-映射空间中定义“指数映射”时需要处理三个问题：

第一，将 k-映射经过“指数映射”之后，是否还能得到 k-映射？

第二，“指数映射”涉及多个 k-映射空间，对它们 k 化时，不同的 k 化次数是否不会影响积空间的拓扑？

第三，“指数映射”是否保持了拓扑性质，即“指数映射”是不是同胚？

下面将看到，在 k-映射空间中，这些问题都有肯定的答案。

首先证明将 k-映射经过“指数映射”之后，得到的仍然是 k-映射。

定理 3.5. 设 X, Y 和 Z 为拓扑空间，$x \in X, f \in \mathcal{K}(X \times Y, Z)$，则 $f(x,\cdot) \in \mathcal{K}(Y,Z)$。

证明 设 $t: C \to Y$ 是测试映射，则 $\mathrm{id}_x \times t: \{x\} \times C \to X \times Y$ 也是测试映射。因此 $f(\mathrm{id}_x \times t)$ 连续，$f(x,\cdot) \circ t$ 连续，由 k-映射的定义得到 $f(x,\cdot) \in \mathcal{K}(Y,Z)$。

引理 3.1. 对任意 $f \in \mathcal{K}(X \times Y, Z)$，定义

$$\begin{aligned} \hat{f}: X &\to \mathcal{K}(Y,Z) \\ x &\mapsto f(x,\cdot) \end{aligned}$$

则有 $\hat{f} \in \mathcal{K}(X, \mathcal{K}(Y,Z))$。

证明 只要证明对任意测试映射 $t: C \to X$，有 $\hat{f} \circ t$ 连续。

设 $c \in C, s: B \to Y$ 是测试映射，$\mathcal{W}(s,U)$ 是 $\hat{f} \circ t(c) = f(t(c),\cdot)$ 在 $\mathcal{K}(Y,Z)$ 中的邻域。由于 $t \times s: C \times B \to X \times Y$ 也是测试映射，$g := f \circ (t \times s)$ 连续。而 $g(\{c\} \times B) \subseteq U$，即 $\{c\} \times B \in g^{-1}(U)$，$c$ 有开邻域 V 使得 $V \times B \subseteq g^{-1}(U)$。因此 $\hat{f} \circ t(V) \subseteq \mathcal{W}(s,U)$，即 $\hat{f} \circ t$ 连续。

引理 3.2. 设 $g \in \mathcal{K}(X, \mathcal{K}(Y,Z))$，定义

$$\overline{g}: X\times Y\to Z$$
$$(x,y)\mapsto (g(x))(y),$$

则 $\overline{g}\in\mathcal{K}(X\times Y,Z)$。

证明 设 B,C 是测试空间，$s:B\to X,t:C\to Y$ 是测试映射。考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
B\times C \arrow[r, "s\times t"] \arrow[d, "s\times id"] & X\times Y \arrow[r, "\overline{g}"] & Z \\
X\times C \arrow[rr, "g\times id"] & & \mathcal{K}(Y,Z)\times C \arrow[u, "e\circ(id\times t)"]
\end{tikzcd}$$

由于 $s\times t, g\circ s, e\circ(\mathrm{id}\times t)$ 都连续，$\overline{g}\circ(s\times t)$ 也连续。因此 $\overline{g}\in\mathcal{K}(X\times Y,Z)$。

有了以上两个引理，才可以放心地定义指数映射：

定理 3.6. 对任意拓扑空间 X,Y 和 Z，有良定双射

$$E:\mathcal{K}(X\times Y,Z)\to\mathcal{K}(X,\mathcal{K}(Y,Z)).$$

证明 $E(f)=\hat{f}, E^{-1}(g)=\overline{g}$ 即为所求。

此时的指数映射只是集合意义上的映射，其对拓扑的影响仍然未知。

接下来处理第二个问题。

定理 3.7. 设 Y 和 Z 为拓扑空间，$t:C\to Y$ 为测试映射，则

$$\delta:=e\circ(\mathrm{id}\times t):\mathcal{K}(Y,Z)\times C\to Z$$

是连续映射。

证明 设 $f\in\mathcal{K}(Y,Z)$，$c\in C$，V 为 $z=\delta(f,c)$ 的一个开邻域。

由于 $f\circ t$ 连续，存在 c 的开邻域 U 使得 $f\circ t(U)\subseteq V$。由于测试空间 C 是局部紧的，存在 c 的紧致邻域 B 满足 $B\subseteq U$。

定义 $s:=t\restriction B$，则 s 是测试映射，且 $\delta(\mathcal{W}(s,V)\times B)\subseteq V$，因此 δ 连续。

推论 3.3. 若 Y 是局部紧 Hausdorff 空间，则赋值映射 $e:\mathcal{K}(Y,Z)\times Y\to Z$ 是连续映射。

定理 3.8. 设 $f:X\times Y\to Z$，则 $f\in\mathcal{K}(X\times Y,Z)$ 当且仅当对任意测试映射 $s:B\to X$ 和 $t:C\to Y$，有

$$f\circ(s\times t):B\times C\to Z$$

连续。

证明 充分性：设 D 为测试空间，$u:D\to X\times Y$ 是测试映射，下证 $f\circ u$ 连续。

设 $s=\pi_X\circ u, t=\pi_Y\circ u$。则

$$f\circ u=f\circ(s\times t)\circ\Delta,$$

其中 $\Delta:D\to D\times D$ 为对角映射。由于 $f\circ(s\times t)$ 和 Δ 都连续，得到 $f\circ u$ 连续。

必要性：若 s,t 都为测试映射，则 $s\times t$ 也为测试映射，命题得证。

作为推论，至此第二个问题也可以得到肯定的回答。

推论 3.4. 设 X,Y 为拓扑空间，则有 $\mathrm{k}(\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y)=\mathrm{k}(X\times Y)$。

证明 由于 $\mathrm{id}_{\mathrm{k}X}:\mathrm{k}X\to X$ 和 $\mathrm{id}_{\mathrm{k}Y}:\mathrm{k}Y\to Y$ 都连续，得到

$$\mathrm{id}_{\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y}:\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y\to X\times Y$$

连续。因此

$$\mathrm{id}_{\mathrm{k}(\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y)}:\mathrm{k}(\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y)\to\mathrm{k}(X\times Y)$$

连续。

设 $s:B\to X,t:C\to Y$ 是测试映射，则

$$s\times t:B\times C\to\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y,$$
$$s\times t:B\times C\to\mathrm{k}(\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y)$$

都是测试映射。因此

$$\mathrm{id}_{\mathrm{k}(X\times Y)}:\mathrm{k}(X\times Y)\to\mathrm{k}(\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y)$$

连续。

综上，$\mathrm{k}(\mathrm{k}X\times\mathrm{k}Y)=\mathrm{k}(X\times Y)$。

由以上推论知，先 k 化，做笛卡尔积后再次 k 化得到的拓扑与直接笛卡尔积后再 k 化得到的拓扑是相同的，因此可以定义 k-空间的乘积：

定义 3.5. 对 k-空间 Y 和 Z，定义

$$Y\times_{\mathrm{k}}Z:=\mathrm{k}(Y\times Z).$$

定义 3.6. 对任意拓扑空间 Y 和 Z，定义

$$\mathrm{K}(Y,Z):=\mathrm{k}(\mathcal{K}(Y,Z)).$$

有了前面的铺垫，最终可以证明 E 就是本文想要得到的“指数映射”，它不仅是集合意义上的映射，还是同胚，保持了拓扑性质。

定理 3.9 (指数定律)。对任意 k-空间 X,Y 和 Z，映射空间赋予测试－开拓扑，则有如下同胚：

$$\mathrm{K}(X\times_{\mathrm{k}}Y,Z)\cong\mathrm{K}(X,\mathrm{K}(Y,Z))$$

证明 定义映射

$$E:\mathrm{K}(X\times_{\mathrm{k}}Y,Z)\to\mathrm{K}(X,\mathrm{K}(Y,Z))$$
$$f\mapsto\hat{f},$$

其中 $\hat{f}(x)=f(x,\cdot)$。E 是良定的双射。

考虑映射

$$e_1:\mathrm{K}(X\times_{\mathrm{k}}Y,Z)\times_{\mathrm{k}}X\to\mathrm{K}(Y,Z)$$

和赋值映射

$$e_2:\mathrm{K}(X\times_{\mathrm{k}}Y,Z)\times_{\mathrm{k}}X\times_{\mathrm{k}}Y\to Z,$$

有 $e_1=\hat{e}_2,E=\hat{e}_1$，因此 E 连续。

考虑

$$d:\mathrm{K}(X,\mathrm{K}(Y,Z))\times_{\mathrm{k}}X\times_{\mathrm{k}}Y\to Z,$$

有

$$d=e_Y\circ(e_X\times_{\mathrm{k}}\mathrm{id}_Y)$$

是连续映射。由于 $E^{-1}=\hat{d}$，E^{-1} 连续。

综上，E 是同胚映射。

4. 具有弱 Hausdorff 性质的 k-空间

4.1. 弱 Hausdorff 性质

一些参考文献，例如[11] [15]中，k-空间会与弱 Hausdorff 性质一起出现。在此先给出它的定义。

定义 4.1. 若对任意紧 Hausdorff 空间 K 以及任意连续映射 $f: K \to X$，有 $f(K)$ 闭，则称 X 是弱 Hausdorff 空间，记为 WH。记弱 Hausdorff 的紧生成空间为 CGWH (即弱 Hausdorff 的紧生成空间，compactly generated weakly Hausdorff spaces)。

弱 Hausdorff 性质介于 T_1 和 Hausdorff 性质之间。有下面两个定理：

定理 4.1. 弱 Hausdorff 空间是 T_1 空间。

证明 只要证弱 Hausdorff 空间中的单点集是闭集。取定义中的紧 Hausdorff 空间 K 为单点集就得到了证明。

定理 4.2. Hausdorff 空间是弱 Hausdorff 空间。

证明 设 X 是 Hausdorff 空间，K, f 同弱 Hausdorff 空间的定义，则由定义知 $f(K)$ 是 X 的紧子集，因此闭。

下面这个例子说明弱 Hausdorff 空间未必是 Hausdorff 空间。

例 4.1. $\mathbb{Q}$ 的单点紧化是弱 Hausdorff 空间，但不是 Hausdorff 空间。

与关注原像性质的 k-闭相反，弱 Hausdorff 空间中，像的性质被保留。

定理 4.3. 若 X 是 WH，则对任意紧 Hausdorff 空间 K 以及连续映射 $f: K \to X$，有 $f(K)$ 紧致且 Hausdorff。

证明 连续映射保持紧致性，因此 $f(K)$ 紧。

设 $x_1, x_2 \in f(K)$，则 $f^{-1}(x_i)(i=1,2)$ 是不相交的闭集。因此有不交的开集 $U_1, U_2 \subseteq K$ 使得

$$f^{-1}(x_i) \in U_i (i=1,2),$$

则 $f(K) \setminus f(K \setminus U_i)(i=1,2)$ 给出了 $x_i(i=1,2)$ 的不交的开邻域。

推论 4.1. 若 X 是 WH，则：$A \subseteq X$ 是 k-闭的当且仅当 A 与 X 的任意紧子空间的交是闭的。

定理 4.4. 设 X 是 CGWH，$f: X \to Y$ 是映射，且对任意紧子空间 $K \subseteq X$，有 $f \restriction K$ 连续，则 f 连续。

证明 设 $V \in \tau_Y$，由于

$$f^{-1}(V) \cap K = (f \restriction K)^{-1}(V) \in \tau_K,$$

得 $f^{-1}(V) \in \tau_K$，因此 f 连续。

定理 4.5. 若 X 是 k-空间，则 X 是 WH 当且仅当对角集 $\Delta X = \{(x,x) \in X \times X\}$ 在 $X \times_{\mathrm{k}} X$ 中是闭的。

证明 设 K 是紧 Hausdorff 空间。

必要性：设 $f_1, f_2: K \to X$ 是两个测试映射，记

$$f = (f_1, f_2): K \to X \times_{\mathrm{k}} X,$$

$$L = f_1(K) \cap f_2(K).$$

f 也是测试映射。L 紧致且 Hausdorff，因此 ΔL 是 $X \times_{\mathrm{k}} X$ 的紧 Hausdorff 子空间，在 $X \times_{\mathrm{k}} X$ 中是闭的。$f^{-1}(\Delta L)$ 在 K 中闭，因此

$$\Delta X = f\left(f^{-1}(\Delta L)\right)$$

在 $X \times_{\mathrm{k}} X$ 中闭。

充分性：设f是测试映射。只要证$f(K)$在X中k-闭。设$t:C\to X$是测试映射，则

$$f\times t:K\times_{\mathrm{k}}C\to X\times_{\mathrm{k}}X$$

也是测试映射。因此

$$(f\times t)^{-1}(\Delta X)$$

在$K\times_{\mathrm{k}}C$中闭，故紧致。进一步有

$$t^{-1}f(K)=\pi_C\left((f\times t)^{-1}(\Delta X)\right)$$

在C中紧致，故闭。即$f(K)$在X中k-闭。

在这一定理的证明中，对角集再次起到了作用。对角集可以被用来判定 Hausdorff 性质，例如参考文献[16]。这也体现了弱 Hausdorff 性质与 Hausdorff 性质的相似之处。

例 4.2. 若X是 CGWH，(Y,d)是度量空间，则$C(X,Y)$在紧收敛拓扑下是Y^X中的闭集。

参考文献[1]中有关于这一例子的详细讨论。

4.2. 例子：含参积分

数学分析中主要考虑$\mathbb{R}^n$的情形，而$\mathbb{R}^n$是局部紧 Hausdorff 空间，因此也是 k-空间。

下面以$\mathbb{R}^n$中的含参黎曼积分作为 k-映射空间中的具体例子。

定义 4.2. 设$D\subseteq\mathbb{R}^n$为若尔当可测闭区域，T为集合，$f:T\times D\to\mathbb{R}$满足对任意$t\in T$，有$f(t,\cdot)$是D上的黎曼可积函数，则可定义含参积分

$$F(t)=\int_D f(t,x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.6. 设$D\subseteq\mathbb{R}^n$为若尔当可测闭区域，$T\subseteq\mathbb{R}^m$为开集，$f\in C(T\times D,\mathbb{R})$，则$F\in C(T,\mathbb{R})$。

证明 对任意$t_0\in T$，取t_0的紧致邻域T'，则f在$T'\times D$上一致连续。因此对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0,t,s\in T,x,y\in D$，使得当$\|(t,x)-(s,y)\|<\delta$时有$|f(t,x)-f(s,y)|<\varepsilon$。取$s=t_0,y=x$，有

$$\begin{aligned}\left|F(t)-F(t_0)\right|&=\left|\int_D f(t,x)\mathrm{d}x-\int_D f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_D\left|f(t,x)-f(t_0,x)\right|\mathrm{d}x\\&\le\mu(D)\varepsilon,\end{aligned}$$

其中$\mu(D)$表示D的若尔当测度，是常数。

此定理的证明完全采用数学分析的语言，但从一致连续性的滤子基定义中可以看到，这一证明实际上用到了对角映射。

5. 总结与展望

本文首先以数学分析和高等代数中的直观例子引入了指数定律。接着介绍了相关理论基础和模型，并通过终拓扑定义的 k 化定义了 k-映射。而为了使 k-映射全体构成拓扑空间，本文定义了测试－开拓扑。

为了证明 k-映射的指数定律，给出了多元映射与复合映射之间的关系。对 k-映射而言，经过 k 化后的多元映射空间与多重映射空间是同胚的，且有着具体的对应方式。

此外，由于 k-映射常与弱 Hausdorff 性质共同起作用，本位还介绍了弱 Hausdorff 性质。而在弱 Hausdorff 性质中，对角集在判定时起到了重要作用。

由于度量空间是 k-空间，其上的连续映射空间在紧收敛拓扑下构成了闭集。对角集可以应用于一致连续的一般定义。在 CGWH 的判定中还通过对角集体现了弱 Hausdorff 性质与 Hausdorff 性质的相似之处。

本文最后用证明了数学分析中含参积分对参数的连续性，给出了 k-空间的一个例子。用滤子基的语言可以更清晰地看到，对角集在一致连续中起到的作用。

指数律结果的一个重要推广涉及闭子集上的部分映射空间。与此相关的一个有用的技巧是此类部分映射的可表示性，这一思想来自以下结果：

具有闭域的部分映射集 $C(Y,X)$ 与 $C(Y,\hat{X})$ 是双射的，其中 $\hat{X}=X\cup\{\omega\},\omega\notin X$，且 C 在 $\hat{X}$ 中闭当且仅当 C 在 X 中闭或 $\omega\in C$，即 $\{\omega\}$ 在 $\hat{X}$ 中开但不闭。

在参考文献[17]中给出了更多相关的讨论。

还有基于其他类型的 $\mathcal{E}$-开拓扑和基于图拓扑的方法，以此类应用为目的的结果可以在参考文献[18] [19]中找到。

参考文献[20] [21]中有关于 k-空间的更多讨论。k-映射和 k-空间还可以用于处理微分方程对参数的依赖性，参考文献[22]中给出了一系列定理和例子。

指数定律还有其它形式，例如参考文献[23]。

关于拓扑空间中滤子的作用，参考文献[24]对其作了介绍。

进一步，用范畴的语言还可以揭示 CGWH 空间全体具有的泛性质。参考文献[25]-[32]等对范畴语言下的 CGWH 进行了讨论。

相对于 Hausdorff 性质，具有弱 Hausdorff 性质的紧生成空间全体在范畴论中具有更好的性质。

记紧生成弱 Hausdorff 拓扑空间的范畴为 CGWH，记紧生成 Hausdorff 拓扑空间为 CGH。两者都是拓扑空间的实用范畴(convenient category)，这一概念见参考文献[32]。

然而，CGWH 还有一个进一步的关键属性：推出结构在 CGWH 中的表现优于 CGH，具体地，CGWH 在推出下是闭的，而 CGH 并没有这么好的性质。参考文献[33]中提供了更多相关内容。

致　谢

本文的最初想法源自我的读书笔记，但想要将其整理成论文是远远不够的。疫情期我由于管控措施不能返校，这导致本文写作过程中曾进度缓慢。

在此郑重感谢我的指导老师——南京工业大学数理科学学院副院长马树建教授。

无论是课题的学习、研究，还是写作、格式修改等方面，马老师都给予了我宝贵的支持，尤其是在科研上的高超洞察力帮助我迅速理清了论文的思路。疫情期间，马老师根据实际情况通过线上或线下方式与我交流并对我进行指导。正因为这些交流和指导，我才能最终完成这篇论文。在学习、科研的方方面面，马老师对我的教诲我都将铭记在心。

在教科研工作的百忙之中，马老师还不时关心我的学习和生活，让我在疫情期间也能保持良好的生活态度。平时马老师散发的人格魅力也在潜移默化中让我有了更好的心态面对遇到的困难和挫折。

最后，再次向马老师致以衷心的感谢、真诚的敬意和美好的祝福！

基金项目

本研究为国家级大学生创新创业训练项目成果(项目编号：202010291082Z)。

参考文献

[1] Munkres, J.R. (2013) Topology: Pearson New International Edition. 2nd Edition, Pearson Education, New York.

[2] Spanier, E. (1963) Quasi-Topologies. *Duke Mathematical Journal*, **30**, 1-14. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-63-03001-1

[3] Min, K.C., Kim, Y.S. and Park, J.W. (1999) Fibrewise Exponential Laws in a Quasitopos. *Cahiers de Topologie et*

Géométrie Différentielle Catégoriques, **40**, 242-260.

[4] Brown, R. (1961) Some Problems of Algebraic Topology, a Study of Function Spaces, Function Complexes and FD-Complexes. Ph.D. Thesis, University of Oxford, Oxford.

[5] Brown, R. (1963) Ten Topologies for $X \times Y$. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **14**, 303-319. https://doi.org/10.1093/qmath/14.1.303

[6] Brown, R. (1964) Function Spaces and Product Topologies. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **15**, 238-250. https://doi.org/10.1093/qmath/15.1.238

[7] Booth, P.I. and Tillotson, A. (1980) Monoidal Closed, Cartesian Closed and Convenient Categories of Topological Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **88**, 35-53. https://doi.org/10.2140/pjm.1980.88.35

[8] McCord, M.C. (1969) Classifying Spaces and Infinite Symmetric Products. *Transactions of the American Mathematical Society*, **146**, 273-298. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0251719-4

[9] 陈肇姜. 点集拓扑题解与反例[M]. 南京: 南京大学出版社, 1997: 90-104.

[10] Brown, R. (2006) Topology and Groupoids. 3rd Revised, Updated and Extended Edition, BookSurge Publishing, North Charleston.

[11] Dieck, T.T. (2008) Algebraic Topology. European Mathematical Society, Switzerland.

[12] Ciarlet, P.G. (2013) Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications. New Edition, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), Philadelphia.

[13] И.阿黑波夫, B.A.萨多夫尼奇, B.H.丘巴里阔夫, 主编. 数学分析讲义[M]. 王昆扬, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006: 47-55.

[14] 郇中丹, 刘永平, 王昆扬. 简明数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009: 74-88.

[15] Peter May, J. (1999) A Concise Course in Algebraic Topology. University of Chicago Press, Chicago.

[16] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997: 11-72.

[17] Encyclopedia of Mathematics (2011) Exponential Law (in Topology). http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Exponential_law_(in_topology)&oldid=13283

[18] Brandi, P. and Ceppitelli, R. (1994) A New Graph Topology. Connections with the Compact Open Topology. *Applicable Analysis*, **53**, 185-196. https://doi.org/10.1080/00036819408840256

[19] Booth, P.I., Heath, P.R. and Piccinini, R. (1978) Fibre Preserving Maps and Functions Spaces. In: Hoffman, P., Piccinini, R.A. and Sjerve, D., Eds., *Algebraic Topology*, Springer, Berlin, Heidelberg, 158-167. https://doi.org/10.1007/BFb0064694

[20] Rezk, C. (2013) Math 527—Homotopy Theory Additional Notes. https://faculty.math.illinois.edu/~franklan/Math527_0204.pdf

[21] Uribe, B. and Lück, W. (2014) Equivariant Principal Bundles and Their Classifying Spaces. *Algebraic and Geometric Topology*, **14**, 1925-1995. https://doi.org/10.2140/agt.2014.14.1925

[22] Alzaareer, H. and Schmeding, A. (2015) Differentiable Mappings on Products with Different Degrees of Differentiability in the Two Factors. *Expositiones Mathematicae*, **33**, 184-222. https://doi.org/10.1016/j.exmath.2014.07.002

[23] Bartłomiejczyk, P., Nowak-Przygodzki, P. (2014) The Exponential Law for Partial, Local and Proper Maps and Its Application Topotopy Theory. *Communications in Contemporary Mathematics*, **16**, Article ID: 1450005. https://doi.org/10.1142/S0219199714500059

[24] Abdellatif, D. (2004) The Use of Filters in Topology. Master's Thesis, B.S. University of Central Florida, Orlando. https://stars.library.ucf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1176&context=etd

[25] Brown, R. and Abd-Allah, A.M. (1980) A Compact-Open Topology on Partial Maps with Open Domain. *Journal of the London Mathematical Society*, **s2-21**, 480-486. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-21.3.480

[26] Brown, R. (1988) Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types, and the Fundamental Groupoid. Ellis Horwood, Hemel Hempstead.

[27] di Concilio, A. and Naimpally, S.A. (2000) Proximal Set-Open Topologies on Partial Maps. *Acta Mathematica Hungarica*, **88**, 227-237. https://doi.org/10.1023/A:1006717331197

[28] Herrlich, H. (1987) Topological Improvements of Categories of Structured Sets. *Topology and Its Applications*, **27**, 145-155. https://doi.org/10.1016/0166-8641(87)90101-5

[29] Johnstone, P. (1979) On a Topological Topos. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s3-38**, 237-271. https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.2.237

[30] Kriegl, A. and Michor, P.W. (1997) The Convenient Setting of Global Analysis. Vol. 53, American Mathematical So-

ciety, Rhode Island. https://doi.org/10.1090/surv/053

[31] Strickland, N. (2009) The Category of CGWH Spaces. https://ncatlab.org/nlab/files/StricklandCGHWSpaces.pdf

[32] Steenrod, N. (1967) A Convenient Ecategory of Topological Spaces. *Michigan Mathematical Journal*, **14**, 133-152. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999711

[33] nLab Authors (2021) Weakly Hausdorff Topological Space. http://ncatlab.org/nlab/show/weakly%20Hausdorff%20topological%20space