Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(9), 6616-6620
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.119700

一类三阶微分算子的耗散性研究

曹文华，高云兰*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2022年8月19日；录用日期：2022年9月15日；发布日期：2022年9月22日

摘 要

相比于特殊的三阶微分算式，本文研究了一类具有一般性的三阶微分算式，同时给出一组耦合型边界条件，在此基础上定义了一个新的算子L，进而证明了当边界条件的系数满足一定的条件时，算子L是耗散算子，且该算子没有实的特征值。

关键词

微分算式，边界条件，耗散算子，特征值

Study on Dissipation of a Class of General Third-Order Differential Operators

Wenhua Cao, Yunlan Gao*

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia

Received: Aug. 19th, 2022; accepted: Sep. 15th, 2022; published: Sep. 22nd, 2022

Abstract

Compared with the special third-order differential equation, in this paper, a class of general third-order differential equations are studied, and a set of coupled boundary conditions are given. On this basis, a new operator is defined. It is proved that when the coefficients of the boundary conditions satisfy certain conditions, the operator is a dissipative operator, and the operator has no real eigenvalue.

Keywords

Differential Equation, Boundary Conditions, Dissipative Operator, Eigenvalue

*通讯作者。

文章引用: 曹文华, 高云兰. 一类三阶微分算子的耗散性研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(9): 6616-6620.
DOI: 10.12677/aam.2022.119700

1. 引言

耗散算子是算子理论中非常重要的一类非自共轭算子，有着极强的应用背景。例如偏微分方程中的电报员方程可以转化为耗散微分算子的研究。通过查阅文献，了解了对于偶数阶(主要是二阶及四阶)耗散微分算子的研究已经有了很多重要结果，但是发现对于奇数阶耗散微分算子的相关研究还很少见，这是由于奇数阶问题存在特殊性与不对称性，而这些特性与偶数阶问题有着本质的区别，那么对于奇数阶问题的研究就显得尤为重要。基于数学理论本身的发展需要，同时可以为其它科技领域的发展提供理论基础，越来越多的人们开始关注并研究这类问题。

边界条件的非自共轭性是导致算子耗散的重要原因之一。国内外众多学者针对这一原因进行了大量的研究并取得了相应的成果：

2011 年，Bairamov 和 Ugurlu 研究了由具有分离边界条件及转移条件的二阶对称微分算式生成的微分算子，并证明该算子是耗散 $S-L$ 算子[1]。

2012 年，Wang 和 Wu 研究了具有非自共轭边界条件的二阶 $S-L$ 算子，给出了可以生成耗散算子的所有非自共轭边界条件，并且说明这些边界条件既有耦合型的，又有分离型的[2]。

同年，Hao，Sun 和 Zettl 给出了四阶微分算子自伴边界条件的标准型，包括正则情形[3]和奇异情形[4]。

2018 年，李昆将[1]的结果进行了推广，得到了更一般的情形，他将转移条件换成耦合意义下的，并证明生成的算子是耗散 $S-L$ 算子[5]。

2019 年，牛天在其硕士论文中通过对自伴边界条件的分类，得到了三阶微分算子自伴边界条件标准型，与偶数阶不同，三阶情况不存在严格分离型自伴边界条件[6]。

2020 年，Wang 和 Ao 在[3]和[4]的基础上，利用边界条件对四阶耗散微分算子进行分类。确定了产生四阶微分算子耗散的非自伴边界条件，并证明了这些耗散算子没有实本征值[7]。

相比于特殊的三阶微分算式，本文研究了一类更具有一般性的三阶微分算式，定义了一个新的算子 L，并证明了算子 L 是耗散的且没有实的特征值。

2. 算子的耗散性

在 $J=[a,b],-\infty<a<b<\infty$ 上考虑如下三阶微分方程：

$$l(y):=\left[-i\left(p\left(py'\right)'-b_0y\right)-a_1y'\right]'+ib_0y'+a_0y=\lambda wy, \tag{1}$$

其中 $p^{-1},b_0p^{-1},b_1p^{-1},a_1p^{-2}a_0\in L(J,\mathbb{R})$，且 p,w 在 J 上几乎处处大于零。

我们利用文献[8]中的方法来定义 y 的拟导数，

$$\begin{aligned}
y^{[0]}&=y,\\
y^{[1]}&=py',\\
y^{[2]}&=ip\left(y^{[1]}\right)'+a_1y'-ib_0y,\\
y^{[3]}&=\left(y^{[2]}\right)'-ib_0y'-a_0y.
\end{aligned} \tag{2}$$

$L_w^2(I)$ 表示由所有满足 $\int_a^b |y|^2 w\mathrm{d}x < \infty$ 的函数 y 所构成的 Hilbert 空间，它的内积是

$$(y,v) = \int_a^b y\overline{v}w\mathrm{d}x, \tag{3}$$

令

$$\Omega = \left\{ y \in L_\omega^2(I) : y, y^{[1]}, y^{[2]} \in AC_{loc}(I), L(y) \in L_\omega^2(I) \right\}.$$

对任意的 $y, v \in \Omega$，有

$$[y,v] := y\overline{v^{[2]}} - y^{[2]}\overline{v} + iy^{[1]}\overline{v^{[1]}}. \tag{4}$$

考虑如下边值问题：

$$\left[-i\left(p\left(py' \right)' - b_0 y \right) - a_1 y' \right]' + ib_0 y' + a_0 y = \lambda wy, \tag{5}$$

$$l_1(y) = y(a) - \gamma_3 y^{[2]}(a) + ry^{[1]}(b), \tag{6}$$

$$l_2(y) = y^{[1]}(a) - i\mathrm{e}^{-i\varphi} y^{[2]}(a) - r\overline{\gamma_2}\mathrm{e}^{-i\varphi} y(b) - r\mathrm{e}^{-i\varphi} y^{[1]}(b), \tag{7}$$

$$l_3(y) = -r\overline{\gamma_2} y^{[2]}(a) - \gamma_1 y(b) + i\gamma_2 y^{[1]}(b) + y^{[2]}(b), \tag{8}$$

其中 λ 是一个复值参数， $r \in \mathbb{R}$ 且 $|r| \le 1, \varphi \in (0, \pi], \gamma_j \in \mathbb{C}, j = 1,2,3$ 且满足 $-2\Im\gamma_3 \ge 1, -2\Im\gamma_1 \ge |\gamma_2|^2$ 。

在 $L_w^2(I)$ 中，我们定义算子 L，其定义域记为 $D(L)$，其中

$$D(L) = \left\{ y \in \Omega : l_j(y) = 0, j = 1,2,3 \right\},$$

定理 1 由方程(5)和边值条件(6)~(8)构成的线性算子 L 在空间 $L_w^2(I)$ 上是耗散的。

证明 对于 $y \in D(L)$，有

$$2i\Im(Ly,y) = (Ly,y) - (y,Ly) = [y,y](b) - [y,y](a), \tag{9}$$

运用(4)式，则有

$$\begin{aligned} 2i\Im(Ly,y) &= y(b)\overline{y^{[2]}(b)} - y^{[2]}(b)\overline{y(b)} + iy^{[1]}(b)\overline{y^{[1]}(b)} \\ &\quad - \left(y(a)\overline{y^{[2]}(a)} - y^{[2]}(a)\overline{y(a)} + iy^{[1]}(a)\overline{y^{[1]}(a)} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

适当整理边界条件(6)~(8)，可得

$$y(a) = \gamma_3 y^{[2]}(a) - ry^{[1]}(b), \tag{11}$$

$$y^{[1]}(a) = i\mathrm{e}^{-i\varphi} y^{[2]}(a) + r\overline{\gamma_2}\mathrm{e}^{-i\varphi} y(b) + r\mathrm{e}^{-i\varphi} y^{[1]}(b), \tag{12}$$

$$y^{[2]}(b) = r\overline{\gamma_2} y^{[2]}(a) + \gamma_1 y(b) - i\gamma_2 y^{[1]}(b), \tag{13}$$

将边界条件(11)~(13)代入(10)并适当整理，可得

$$\begin{aligned} 2i\Im(Ly,y) &= (Ly,y) - (y,Ly) \\ &= (r\gamma_2 - r\gamma_2)\overline{y^{[2]}(a)}y(b) + \left(\overline{\gamma_1} - \gamma_1 - ir^2\gamma_2\overline{\gamma_2} \right) y(b)\overline{y(b)} \\ &\quad + \left(i\overline{\gamma_2} - ir^2\overline{\gamma_2} \right) y(b)\overline{y^{[1]}(b)} + \left(-r\overline{\gamma_2} + r\overline{\gamma_2} \right)\overline{y(b)}y^{[2]}(a) \\ &\quad + \left(i\gamma_2 - ir^2\gamma_2 \right) y^{[1]}(b)\overline{y(b)} + \left(i - ir^2 \right) y^{[1]}(b)\overline{y^{[1]}(b)} \\ &\quad + \left(-\gamma_3 + \overline{\gamma_3} - i \right)\overline{y^{[2]}(a)}y^{[2]}(a) + (r - r)y^{[1]}(b)\overline{y^{[2]}(a)} \\ &\quad + (r - r)\overline{y^{[1]}(b)}y^{[2]}(a). \end{aligned} \tag{14}$$

将上述等式写成矩阵形式，即有

$$\begin{aligned}2i\Im(Ly,y)&=(Ly,y)-(y,Ly)\\&=\left(\overline{y^{[2]}(a)},\overline{y(b)},\overline{y^{[1]}(b)}\right)\begin{pmatrix}-\gamma_3-\overline{\gamma_3}-i & 0 & 0\\ 0 & \overline{\gamma_1}-\gamma_1-ir^2\gamma_2\overline{\gamma_2} & i\gamma_2\left(1-r^2\right)\\ 0 & i\overline{\gamma_2}\left(1-r^2\right) & i\left(1-r^2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^{[2]}(a)\\ y(b)\\ y^{[1]}(b)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{15}$$

则

$$2\Im(Ly,y)=\left(\overline{y^{[2]}(a)},\overline{y(b)},\overline{y^{[1]}(b)}\right)\begin{pmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & c & f\\ 0 & \overline{f} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^{[2]}(a)\\ y(b)\\ y^{[1]}(b)\end{pmatrix},\tag{16}$$

其中

$$s=-1-2\Im\gamma_3,\quad c=-2\Im\gamma_1-r^2\left|\gamma_2\right|^2,\quad f=\gamma_2\left(1-r^2\right),\quad d=\left(1-r^2\right).\tag{17}$$

注意到(15)中的 3×3 矩阵是 Hermitian 矩阵，它的三个特征值分别是

$$s,\quad \frac{c+d\pm\sqrt{(c-d)^2+4|f|^2}}{2}$$

它们非负的充要条件是

$$s\ge0,\quad c+d\ge0,\quad cd\ge|f|^2.$$

由于

$$|r|\le1,\quad -2\Im\gamma_3\ge1,\quad -2\Im\gamma_1\ge\left|\gamma_2\right|^2$$

综上可知

$$\Im(Ly,y)\ge0,\forall y\in D(L).$$

故线性算子 L 是 $L_w^2(I)$ 中的耗散算子。

定理 2 如果 $|r|<1,-2\Im\gamma_3>1$ 且 $-2\Im\gamma_1>\left|\gamma_2\right|^2$，那么算子 L 没有实的特征值。

证明 反证法：假设 λ_0 是算子 L 的一个实特征值，令 $\phi_0(x)=\phi(x,\lambda_0)\ne0$ 是其对应的特征函数，则有

$$\Im(L\phi_0,\phi_0)=\Im\left(\lambda_0\left\|\phi_0\right\|^2\right)=0,$$

由(16)式可得

$$\Im(L\phi_0,\phi_0)=\frac{1}{2}\left(\overline{\phi_0^{[2]}(a)},\overline{\phi_0(b)},\overline{\phi_0^{[1]}(b)}\right)\begin{pmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & c & f\\ 0 & \overline{f} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0^{[2]}(a)\\ \phi_0(b)\\ \phi_0^{[1]}(b)\end{pmatrix}=0,$$

因为 $|r|<1,-2\Im\gamma_3>1,-2\Im\gamma_1>\left|\gamma_2\right|^2$，所以矩阵

$$\begin{pmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & c & f\\ 0 & \overline{f} & d\end{pmatrix},$$

的全部特征值均大于零，因此矩阵是正定的，则可知 $\phi_0^{[2]}(a)=0,\phi_0(b)=0,\phi_0^{[1]}(b)=0$，再由边界条件(6)~(8)可知 $\phi_0^{[2]}(b)=0,\phi_0(a)=0,\phi_0^{[1]}(a)=0$。

令 $\phi_0(x)=\phi(x,\lambda_0),\tau_0(x)=\tau(x,\lambda_0)$ 和 $\sigma_0(x)=\sigma(x,\lambda_0)$ 是方程 $l(y)=\lambda_0 y$ 的 3 个线性无关的解。由 Wronskian 矩阵可得

$$\begin{vmatrix} \phi_0(a) & \tau_0(a) & \sigma_0(a) \\ \phi_0^{[1]}(a) & \tau_0^{[1]}(a) & \sigma_0^{[1]}(a) \\ \phi_0^{[2]}(a) & \tau_0^{[2]}(a) & \sigma_0^{[2]}(a) \end{vmatrix}=0, \tag{18}$$

而解 $\phi_0(x),\tau_0(x),\sigma_0(x)$ 的 Wronskian 行列式值不为零，与假设矛盾，定理得证。

基金项目

内蒙古自然科学基金(2017MS(LH)0103, 2021MS01020)。

参考文献

[1] Bairamov, E. and Uğurlu, E. (2011) The Determinants of Dissipative Sturm-Liouville Operators with Transmission Conditions. *Mathematical and Computer Modelling*, **53**, 805-813. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.10.017

[2] Wang, Z., Hao, X.L. and Wu, H. (2012) Dissipative Non-Self-Adjoint Sturm-Liouville Operators and Completeness of Their Eigenfunctions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **394**, 1-12. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.071

[3] Hao, X.L., Sun, J. and Zettl, A. (2012) Canonical Forms of Self-Adjoint Boundary Conditions for Differential Operators of Order Four. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **387**, 1176-1187. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.10.025

[4] Hao, X.L., Sun, J. and Zettl, A. (2012) Fouth Order Canonical Forms of Singular Self-Adjoint Boundary Conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 899-916. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.03.022

[5] 李昆. 几类内部具有不连续性的微分算子耗散性及特征值关于问题依赖性的研究[D]: [博士学位论文]. 内蒙古: 内蒙古大学, 2018.

[6] 牛天. 三阶微分算子自伴边界条件的标准型以及特征值对问题依赖性的研究[D]: [硕士学位论文]. 内蒙古: 内蒙古大学, 2019.

[7] Wang, T., Ao, J.J. and Yang, M.C. (2020) A Classification of Fourth-Order Dissipative Differential Operators. *Journal of Function Spaces*, **2020**, Article ID: 7510313. https://doi.org/10.1155/2020/7510313

[8] Zettl, A. (1975) Formally Self-Adjoint Quasi-Differential Operators. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **5**, 453-474. https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-3-453