Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(9), 6687-6693
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.119708

# 线面积分的奇偶对称性研究

**文生兰[*]，贾瑞玲，韩艺兵**

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年8月21日；录用日期：2022年9月19日；发布日期：2022年9月26日

## 摘 要

本文主要讨论第二类线面积分的奇偶对称性，给出了详细的理论证明，并结合实际解释加深理解。最后应用第二类线面积分的对称性较简便的解决了具体例题。

## 关键词

曲线积分，曲面积分，对称性，偶倍奇零，奇倍偶零

# Study on Odd-Even Symmetry of Curvilinear Integral and Surface Integral

**Shenglan Wen[*], Ruiling Jia, Yibing Han**

The Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Aug. 21st, 2022; accepted: Sep. 19th, 2022; published: Sep. 26th, 2022

## Abstract

**This paper mainly discusses the parity symmetry of the second kind of line and surface integrals, gives a detailed theoretical proof, and combines the substantive interpretation to deepen the understanding, and finally uses the symmetry of the second kind of line and surface integrals to solve the specific example more easily.**

## Keywords

**Curvilinear Integral, Surface Integral, Symmetry, Even Function Times Odd Function Zero, Odd Function Times Even Function Zero**

[*]通讯作者。

文章引用: 文生兰, 贾瑞玲, 韩艺兵. 线面积分的奇偶对称性研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(9): 6687-6693.
DOI: 10.12677/aam.2022.119708

## 1. 引言

目前，关于重积分和第一类线、面积分对称性的研究比较多，如文献[1] [2] [3] [4]。但对于第二类线、面积分对称性的研究较少，郭洪之[5]、赵艳辉[6]中有部分阐述，但结果不够全面且缺少理论证明和实际解释。本文详细的讨论了第二类线面积分的奇偶对称性，给出了理论证明、实际解释，并利用第二类线面积分的对称性解决了某些具体问题。

第一类线面积分的奇偶对称性比较容易理解，它与定积分和重积分的奇偶对称性一致，我们简述为如下引理 1、引理 2。

**引理 1** 设函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 $L$ 上连续，对第一类曲线积分 $I_1=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，以下结论成立：

1) 若 $L$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数是关于 $y$ 的奇函数( $f(x,-y)=-f(x,y)$ )，则 $I_1=0$；

2) 若 $L$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数是关于 $y$ 的偶函数( $f(x,-y)=f(x,y)$ )，则 $I_1=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 $L_1$ 是 $L$ 位于 $x$ 轴上方的弧段；

3) 若 $L$ 关于 $y$ 轴对称，被积函数是关于 $x$ 的奇函数( $f(-x,y)=-f(x,y)$ )，则 $I_1=0$；

4) 若 $L$ 关于 $y$ 轴对称，被积函数是关于 $x$ 的偶函数( $f(-x,y)=f(x,y)$ )，则 $I_1=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 $L_1$ 是 $L$ 位于 $y$ 轴右方的弧段。

**引理 2** 设函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 $\Sigma$ 上连续，对第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，以下结论成立：

1) 若 $\Sigma$ 关于 $xOy$ 面对称，被积函数是关于 $z$ 的奇函数，即 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$，则 $I_2=0$；

2) 若 $\Sigma$ 关于 $xOy$ 面对称，被积函数是关于 $z$ 的偶函数，即 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，则 $I_2=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 位于 $xOy$ 面上方的曲面；

3) 若 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面对称，被积函数是关于 $x$ 的奇函数，即 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$，则 $I_2=0$；

4) 若 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面对称，被积函数是关于 $x$ 的偶函数，即 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$，则 $I_2=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 位于 $yOz$ 面前侧的曲面；

5) 若 $\Sigma$ 关于 $xOz$ 面对称，被积函数是关于 $y$ 的奇函数，即 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$，则 $I_2=0$；

6) 若 $\Sigma$ 关于 $xOz$ 面对称，被积函数是关于 $y$ 的偶函数，即 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$，则 $I_2=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 位于 $xOz$ 面右侧的曲面。

## 2. 第二类曲线积分的对称性

**定理 1** 设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在曲线弧 $L$ 上连续，对第二类曲线积分 $I_3=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，$I_4=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，以下结论成立：

1) a) 若 $L$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，即 $P(x,-y)=-P(x,y)$，则 $I_3=2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x$，其中 $L_1$ 是 $L$ 位于 $x$ 轴上方的弧段；

b) 若 $L$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，即 $P(x,-y)=P(x,y)$，则 $I_3=0$；

c) 若 $L$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数 $Q(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，即 $Q(x,-y)=-Q(x,y)$，则 $I_4=0$；

d) 若 $L$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数 $Q(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，即 $Q(x,-y)=Q(x,y)$，则 $I_4=2\int_{L_1}Q(x,y)\mathrm{d}y$，其中 $L_1$ 是 $L$ 位于 $x$ 轴上方的弧段。

2) a) 若 $L$ 关于 $y$ 轴对称，被积函数 $P(x,y)$ 关于 $x$ 是奇函数，即 $P(-x,y)=-P(x,y)$，则 $I_3=0$；

b) 若 $L$ 关于 $y$ 轴对称，被积函数 $P(x,y)$ 关于 $x$ 是偶函数，即 $P(x,-y)=P(x,y)$，则 $I_3=2\int_{L_1}P(x,y)\mathrm{d}x$，其中 $L_1$ 是 $L$ 位于 $y$ 轴右方的弧段；

c) 若 $L$ 关于 $y$ 轴对称，被积函数 $Q(x,y)$ 关于 $x$ 是奇函数，即 $Q(x,-y)=-Q(x,y)$，则 $I_4=2\int_{L_1}Q(x,y)\mathrm{d}y$，其中 $L_1$ 是 $L$ 位于 $y$ 轴右方的弧段；

d) 若 $L$ 关于 $y$ 轴对称，被积函数 $Q(x,y)$ 关于 $x$ 是偶函数，即 $Q(x,-y)=Q(x,y)$，则 $I_4=0$。

**证明** 1) 设曲线 $L$ 关于 $x$ 轴对称，如下图，其方程为 $x=\psi(y)$，对应 $y$ 从 $-c$ 到 $c$ 的一段，且有 $\psi(-y)=\psi(y)$，则

$$I_3=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-c}^{0}P(\psi(y),y)\psi'(y)\mathrm{d}y+\int_0^c P(\psi(y),y)\psi'(y)\mathrm{d}y$$

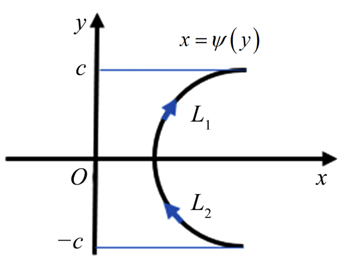
对于 $\tilde{I}_3=\int_{-c}^{0}P(\psi(y),y)\psi'(y)\mathrm{d}y$，令 $y=-t$，积分可转化为

$$\tilde{I}_3=\int_c^0 P(\psi(-t),-t)\psi'(-t)(-\mathrm{d}t)。$$

按照导数的定义，有

$$\psi'(-t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(-t+\Delta t)-\psi(-t)}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t-\Delta t)-\psi(t)}{-\Delta t}=-\psi'(t)$$

所以 $\tilde{I}_3=-\int_0^c P(\psi(t),-t)\psi'(t)\mathrm{d}t$。




a) 如果 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，那么 $P(\psi(t),-t)=-P(\psi(t),t)$，于是

$$\tilde{I}_3=\int_0^c P(\psi(t),t)\psi'(t)\mathrm{d}t$$

因此 $I_3=2\int_0^c P(\psi(y),y)\psi'(y)\mathrm{d}y=2\int_{L_1}P(x,y)\mathrm{d}x$。

b) 如果 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，那么 $P(\psi(t),-t)=P(\psi(t),t)$，于是

$$\tilde{I}_3=-\int_0^c P(\psi(t),t)\psi'(t)\mathrm{d}t$$

因此 $I_3=0$。

对于积分 $I_4$，可类似的讨论如下：

$$I_4=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-c}^{0}Q(\psi(y),y)\mathrm{d}y+\int_0^c Q(\psi(y),y)\mathrm{d}y$$

对于 $\tilde{I}_4=\int_{-c}^{0}Q(\psi(y),y)\mathrm{d}y$，令 $y=-t$，则

$$\tilde{I}_4=\int_c^0 Q(\psi(-t),-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^c Q(\psi(t),-t)\mathrm{d}t$$

c) 如果 $Q(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，那么 $Q(\psi(t),-t)=-Q(\psi(t),t)$，于是

$$\tilde{I}_4=-\int_0^c Q(\psi(t),t)\mathrm{d}t$$

因此 $I_4=0$。

d) 如果 $Q(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，那么 $Q(\psi(t),-t)=Q(\psi(t),t)$，于是

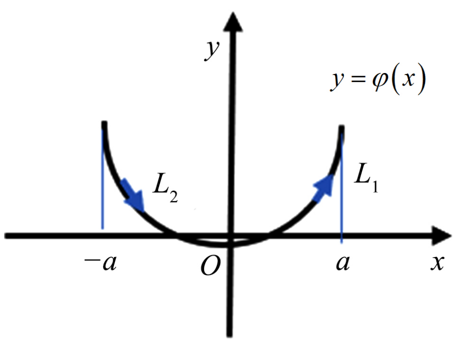
$$\tilde{I}_4=\int_0^c Q(\psi(t),t)\mathrm{d}t$$

因此 $I_4=2\int_{L_1} Q(x,y)\mathrm{d}y$。

同理可证情形 2 成立。

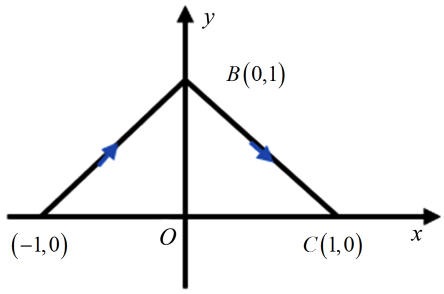
几何解释：1) 如上图，弧段 $L$ 关于 $x$ 轴对称，以 $x$ 轴为界，分为 $L_1$ 段与 $L_2$ 段，沿着弧段方向，$L_1$ 段，$\mathrm{d}x(\Delta x)$ 在增加，符号为正；$L_2$ 段，$\mathrm{d}x(\Delta x)$ 在减小，符号为负。所以对于积分 $I_3=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x$，考虑被积函数，若 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，它在 $L_1$ 与 $L_2$ 段函数值互为相反数，两段积分相等，若 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，它在 $L_1$ 与 $L_2$ 段函数值相等，两段积分互为相反数，就出现“奇倍偶零”现象。对于有向弧段 $L_1$ 与 $L_2$，沿着弧段方向，$L_1$ 段，$\mathrm{d}y(\Delta y)$ 在增加，符号为正；$L_2$ 段，$\mathrm{d}y(\Delta y)$ 也在增加，符号为正。所以对于积分 $I_4=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{L_1} Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{L_2} Q(x,y)\mathrm{d}y$，考虑被积函数，若 $Q(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，它在 $L_1$ 与 $L_2$ 段互为相反数，两段积分也互为相反数，若 $Q(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，它在 $L_1$ 与 $L_2$ 段函数值相等，两段积分值也相等，即出现“奇零偶倍”现象。

2) 如下图，弧段 $L$ 关于 $y$ 轴对称，以 $y$ 轴为界，分为 $L_1$ 段与 $L_2$ 段两部分，沿着弧段方向，$L_1$ 段，$\mathrm{d}x(\Delta x)$ 在增加，符号为正；$L_2$ 段，$\mathrm{d}x(\Delta x)$ 也在增加，符号为正。所以对于积分 $I_3=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，考虑被积函数，若 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，它在 $L_1$ 与 $L_2$ 段互为相反数，两段积分也互为相反数，若 $P(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，它在 $L_1$ 与 $L_2$ 段函数值相等，两段积分值也相等，即出现“奇零偶倍”现象。对于有向弧段 $L_1$ 与 $L_2$，$L_1$ 段，$\mathrm{d}y(\Delta y)$ 在增加，符号为正；$L_2$ 段，$\mathrm{d}y(\Delta y)$ 在减小，符号为负。所以对于积分 $I_4=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，考虑被积函数，就出现“奇倍偶零”现象。




例 1 已知曲线 $L$ 的方程为 $y=1-|x|$，$x\in[-1,1]$，起点是 $(-1,0)$，终点是 $(1,0)$，求曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$。

解 如下图，曲线 $L$ 关于 $y$ 轴对称，$P(x,y)=xy$ 是关于 $x$ 的奇函数，由定理 1 知 $\int_L xy\mathrm{d}x=0$；$Q(x,y)=x^2$ 是关于 $x$ 的偶函数，由定理 1 知 $\int_L x^2\mathrm{d}y=0$，综上 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$。




说明：例 1 可以用添加辅助线成封闭弧段，用格林公式求解，也可以直接计算，见文献[7]。比较可知，用对称性比较简便。

## 3. 第二类曲面积分的对称性

**定理 2** 设函数 $R(x,y,z)$，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 在曲面 $\Sigma$ 上连续，对第二类曲面积分 $I_5=\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_6=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$I_7=\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，以下结论成立：

1) a) 若 $\Sigma$ 关于 $xOy$ 面对称，被积函数 $R(x,y,z)$ 关于 $z$ 是奇函数，即 $R(x,y,-z)=-R(x,y,z)$，则 $I_5=2\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 位于 $xOy$ 面上方的部分曲面；

b) 若 $\Sigma$ 关于 $xOy$ 面对称，被积函数 $R(x,y,z)$ 关于 $z$ 是偶函数，即 $R(x,y,-z)=R(x,y,z)$，则 $I_5=0$；

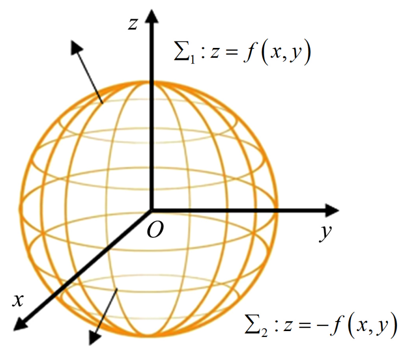
2) a) 若 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面对称，被积函数 $P(x,y,z)$ 关于 $x$ 是奇函数，即 $P(-x,y,z)=-P(x,y,z)$，则 $I_6=2\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 位于 $yOz$ 面前侧的部分曲面；

b) 若 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面对称，被积函数 $P(x,y,z)$ 关于 $x$ 是偶函数，即 $P(-x,y,z)=P(x,y,z)$，则 $I_6=0$；

3) a) 若 $\Sigma$ 关于 $xOz$ 面对称，被积函数 $Q(x,y,z)$ 关于 $y$ 是奇函数，即 $Q(x,-y,z)=-Q(x,y,z)$，则 $I_7=2\iint\limits_{\Sigma_1}Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 位于 $xOz$ 面右侧的部分曲面；

b) 若 $\Sigma$ 关于 $xOz$ 面对称，被积函数 $Q(x,y,z)$ 关于 $y$ 是偶函数，即 $Q(x,-y,z)=Q(x,y,z)$，则 $I_7=0$。

**证明** 1) 如下图，$\Sigma$ 关于 $xOy$ 面对称，设 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D$，$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上方部分记为 $\Sigma_1$ (取上侧)和下方部分记为 $\Sigma_2$ (取下侧)，如果设 $\Sigma_1$ 的方程为 $z=f(x,y)$，则 $\Sigma_2$ 的方程为 $z=-f(x,y)$。




根据积分区域的可加性

$$I_5=\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

按照“一投影、二代入、三定号”的原则，将其转化成定积分

$$I_5=\iint_D R\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D R\left(x,y,-f\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

1) 如果 $R(x,y,z)$ 关于 $z$ 是奇函数，则(3.1)式可化简为

$$2\iint_D R\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是，$I_5=2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

2) 如果 $R(x,y,z)$ 关于 $z$ 是偶函数，则由(3.1)式可得，$I_5=0$。

同样的方法可证情形 2、3 的正确性。

物理解释：第二类曲面积分表示以被积函数为流速的流向曲面 $\Sigma$ 指定侧的流量。对 $I_5=\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，表示以 $\boldsymbol{v}=R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ （$\boldsymbol{k}$ 是 $z$ 轴的单位向量)为流速的流向 $\Sigma$ 外侧的流量。上侧 $\Sigma_1$ 面上流速 $\boldsymbol{v}_1=R\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\boldsymbol{k}$，下侧 $\Sigma_2$ 面流速 $\boldsymbol{v}_2=R\left(x,y,-f\left(x,y\right)\right)\boldsymbol{k}$，如果 $R(x,y,z)$ 关于 $z$ 是奇函数，即 $R\left(x,y,-f\left(x,y\right)\right)=-R\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$，说明 $\boldsymbol{v}_1=-\boldsymbol{v}_2$，而 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 的侧正好相反，因此流向 $\Sigma_1$ 上侧流量与流向 $\Sigma_2$ 下侧流量相等，总流量为流向 $\Sigma_1$ 面流量的 2 倍；如果 $R(x,y,z)$ 关于 $z$ 是偶函数，即 $R\left(x,y,-f\left(x,y\right)\right)=R\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$，说明 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$，而 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 侧的方向相反，因此如果流向 $\Sigma_1$ 上侧流量为正，则流向 $\Sigma_2$ 下侧流量为负，且二者绝对值相等。因此对第二类曲面积分对称性出现“奇倍偶零”现象。

例 2 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面 $\Sigma$ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧。

解 曲面 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面对称，被积函数 $x^2$ 关于 $x$ 是偶函数，按定理 2 知 $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$；曲面 $\Sigma$ 关于 $xOz$ 面对称，被积函数 $y^2$ 关于 $y$ 是偶函数，按定理 2 知 $\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，所以积分 $I$ 可化简为 $I=\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，按照“一投影、二代入、三定号”的步骤将其转化成二重积分。

曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面的投影是区域 $D: x^2+y^2\le R^2$

$$I=\iint_D\left(R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(R^2-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{2}。$$

说明：本题也可以添加辅助面用高斯公式，转化成三重积分。由于可导的偶函数，其导函数是奇函数，$P(x,y,z)$ 是关于 $x$ 的偶函数，则 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 是关于 $x$ 的奇函数；$Q(x,y,z)$ 是关于 $y$ 的偶函数，则 $\frac{\partial Q}{\partial y}$ 是关于 $y$ 的奇函数，曲面 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面、$xOz$ 面对称，添加 $xOy$ 面上的平面后，所围立体 $\Omega$ 也是关于 $yOz$ 面、$xOz$ 面对称的，根据三重积分的对称性知 $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}v=0$，也可以从这个角度理解第二类曲面积分的对称性。

## 4. 结束语

曲线积分和曲面积分是多元积分学的重点，它可以解决现实生活中诸如不均匀曲面的质量、变力沿曲线做功、导线圈的电动势、穿过曲面的磁通量等问题，同时它的计算又是难点，如果在计算时，能首先利用对称性化简，可使计算变得简单易行。而第二类线面积分又与曲线和曲面的方向有关，它的对称性需要综合考虑线面的方向和被积函数的奇偶性，于是得到与第一类线面积分的对称性不同的结果(定理 1、定理 2)。本文对第二类线面积分奇偶对称性的研究，不但给出了结论，还有严格的理论证明和实义解

释，便于我们深入的理解和接受，今后我们可以利用本节得到的结论较简便的处理第二类线面积分的奇偶对称性问题。

## 参考文献


[1] 刘金存. 对称性在多元函数积分学中的应用[J]. 高等数学研究, 2014, 17(2): 38-41+46.

[2] 刘艳. 对称性在多元函数积分学中的应用[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2020, 33(1): 81-82+87.

[3] 常浩. 对称性在积分学中的应用[J]. 高等数学研究, 2011, 14(2): 59-63.

[4] 黄东卫, 王雪歌. 浅谈对称性在积分计算中的应用[J]. 高等数学研究, 2020, 24(2): 19-24.

[5] 郭洪之. 对称性在计算线面积分中的应用[J]. 理工教学, 1994(2): 4-10.

[6] 赵艳辉. 用对称性求线、面积分[J]. 湖南科技学院学报, 2012, 33(4): 5-8.

[7] 张天德, 窦慧. 考研数学试题精选精解[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2017: 197-198.