Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(10), 4153-4165
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210407

一类特殊链环的Kauffman多项式

徐芷微

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年9月6日；录用日期：2023年10月1日；发布日期：2023年10月10日

摘 要

Kauffman多项式在纽结理论中占据一定地位，是纽结和链环中最有用的双变量Laurent多项式不变量之一，其已经成为量子拓扑的基本构建块。本文主要研究一类特殊不定向链环——复叠链环，研究了这类链环的Kauffman多项式以及Kauffman多项式对应的生成函数。借助直线型链环的Kauffman多项式对复叠链环的Kauffman多项式进行计算，这为研究定向复叠链环的Kauffman多项式以及BLM/Ho多项式奠定基础。

关键词

Kauffman多项式，递归关系式，生成函数

The Kauffman Polynomials of a Special Class of Links

Zhiwei Xu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 6th, 2023; accepted: Oct. 1st, 2023; published: Oct. 10th, 2023

Abstract

The Kauffman polynomial is probably the most useful two-variable polynomial invariants of knots and links. It generalizes the Jones polynomial, and it has become basic building blocks of quantum topology. In this paper, we mainly study a special type of links—the covering links, and we study the Kauffman polynomials of the link and the corresponding generating functions. The Kauffman polynomials of the covering links is calculated by using the Kauffman polynomials of linear links, which lays a foundation for the study of Kauffman polynomials and BLM/Ho polynomials of the oriented covering links.

文章引用: 徐芷微. 一类特殊链环的 Kauffman 多项式[J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4153-4165.
DOI: 10.12677/aam.2023.1210407

Keywords

Kauffman Polynomial, Recurrence Relation, Generating Function

1. 引言

纽结(链环)多项式是一个纽结不变量，且是以系数符合给定纽结(链环)性质的多项式。其中重要的纽结多项式有：Alexander，Alexander-Conway，Jones 多项式等，其均为定向纽结和链环的单变量 Laurent 多项式不变量。HOMFLY 多项式是定向纽结和链环的双变量 Laurent 多项式不变量。Kauffman 多项式 F 是纽结和链环的双变量的半定向多项式不变量，他可以更好地区分纽结(链环)和他的镜像。根据纽结或链环的 Kauffman 多项式 F 可以得出该纽结或链环的 Jones 多项式和 BLM/Ho 多项式等。Kauffman 多项式 F 的原始版本是不定向纽结和链环图的正则合痕不变量，用 L 表示。

2014 年，Berceanu B，Nizami A R 利用简单递归关系，给出计算闭辫子 Jones 多项式的新方法，得出 Jones 多项式的一般展开式和有理生成函数[1]。2015 年，Duzhin S，Shkolnikov M 给出有理链环(纽结) HOMFLY 多项式的详细公式[2]。Taşköprü K，Altıntaş İ 研究了作为广义 Fibonacci 多项式的 $(2,n)$ 环面链环的 HOMFLY 多项式，给出 $(2,n)$ 环面链环的 HOMFLY 多项式和广义的 Fibonacci 多项式之间的矩阵表示[3]。2018 年，Ismet Altintas，Kemal Taşköprü，Merve Beyaztaş 证明环面链环的尖括号多项式的递归关系式与 Fibonacci 多项式相似，给出其一些基本性质[4]。2019 年，Altıntaş İ，Taşköprü K 研究了可以作为 Fibonacci 类型多项式的 $(2,n)$ 环面链环的 Kauffman 多项式和 BLM\Ho 多项式，借助 BLM\Ho 多项式来解释 Kauffman 多项式[5]。在此基础上，本文研究了一类 n 分支不定向直线型链环和复叠链环，并计算其 Kauffman 多项式。为实现此类链环 Kauffman 多项式的计算，第一部分介绍了纽结理论相关的基础知识和基本概念；第二部分计算 n 分支直线型链环的 Kauffman 多项式；第三部分借助 n 分支直线型链环的 Kauffman 多项式计算 n 分支复叠链环的 Kauffman 多项式。

2. 预备知识

2.1. 纽结与链环

[6]纽结：设 K 为 S^3 中的一个简单闭曲线，且 $K \cong S^3$，则称 K 为一个纽结，如果给定 K 一个定向，则称 K 为一个定向纽结。图 1 为平凡结。

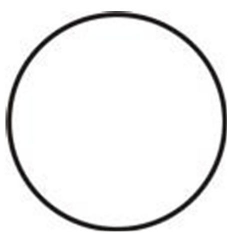


Figure 1. Trivial knot
图 1. 平凡结

[7]链环：将若干个互不相交的圆 $S_i^1(1\le i\le n, n>1)$ 嵌入到三维欧氏空间 R^3 中，这些圆形成的空间图称为链环，记 $L=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_n$，每个纽结 $K_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为链环 L 的一个分支，在此之中 n 为链环 L 的分支数。如果给每个链环的每一个分支一个固定的方向，则称这个链环为一个定向链环。

[6]**注 1：**纽结为分支数为 1 的链环。

[6]**注 2：**若链环 L 所有的分支 K_i 都是平凡结，则称链环 L 为平凡链环。如图 2 所示。

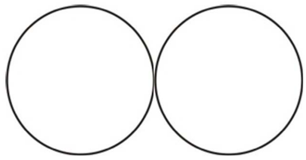


Figure 2. Trivial link
图 2. 平凡链环

2.2. [8]纽结(链环)的投影图

对于一个纽结(链环)，选取一个合适的平面，选择一个合适的方向对其进行投影，把三维空间中的纽结(链环)正则投影到这个平面上，得到的投影图中只有有限多个交叉点；每个交叉点都是二重点，在上下线处的投影都是互相穿越交叉的。则称其为纽结(链环)投影图。

注：投影图会因为选取平面的不同而不同。

2.3. [9] [10] Reidemeister Move (R 变换)

R 变换是纽结理论中最基本的变换，它可以概括三维空间中纽结所有的拓扑情形。R 变换是改变纽结的正则投影图的三种方式，其中每一种方式都会改变交叉点之间的关系。Reidemeister 变换有三种变换方式，分别为 R1 变换、R2 变换、R3 变换。如图 3 所示。

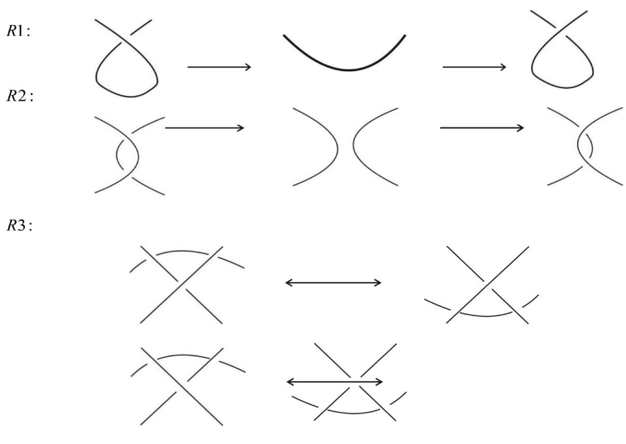


Figure 3. Reidemeister moves
图 3. Reidemeister 变换

2.4. [11]纽结的分离并

在链环 L 的补空间 R^3-L 中，存在一个二维球面 S，将其嵌入可以将链环 L 分为不同的连通分支，并且这两个分支分布在球面 S 的两侧，则称链环 L 为可分离的。如果将所得的这两个不同的连通分支记为 $A_i, i=1,2$，则此时 $L_i=L\cap A_i, i=1,2$，称 L 为 L_1 和 L_2 的分离并，记作 $L=L_1\cup L_2$。

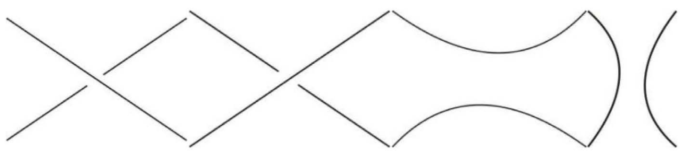
2.5. [5] Kauffman 多项式 $L(a,x)$ 定义

Kauffman 多项式 $L(a,x)$ 是不定向链环投影图 K 的一个双变量的 Laurent 多项式，Kauffman 多项式 $L(a,x)$ 是链环 K 的合痕不变量。并且 Kauffman 多项式 $L(a,x)$ 的特殊化是链环的尖括号多项式，其也是 BLM/Ho 多项式的双变量推广。

2.6. [5] Kauffman 多项式 $L(a,x)$ 的计算满足如下几个规则

1) $L_{K_+}(a,x)+L_{K_-}(a,x)=x\left(L_{K_0}(a,x)+L_{K_\infty}(a,x)\right)$

其中 K_+、K_-、K_0、K_∞ 是如图 4 所示的不定向图。



K_+ K_- K_0 K_∞

Figure 4. K_+、K_-、K_0 and K_∞

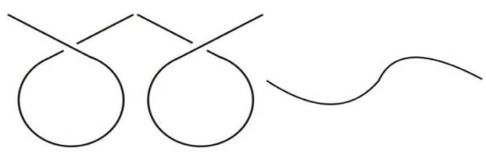
图 4. K_+、K_-、K_0 和 K_∞

2) $L_O(a,x)=1$，其中 O 为平凡结。

3) $L_{D_+}(a,x)=aL_{D_0}(a,x)$。

4) $L_{D_-}(a,x)=a^{-1}L_{D_0}(a,x)$

其中 D_+、D_-、D_0 是如图 5 所示的不定向图。



D_+ D_- D_0

Figure 5. D_+、D_- and D_0

图 5. D_+、D_- 和 D_0

2.7. [5] Kauffman 多项式 $L(a,x)$ 的性质

1) $L_{OO}(a,x)=\left(a+a^{-1}\right)x^{-1}-1$ 或 $\delta=\left(a+a^{-1}\right)x^{-1}-1$，$\delta=L_{OO}(a,x)$，其中 OO 为 2 分支的平凡链环。

2) O_m 是一个平凡的 m 分支链环，$L_{O_m}(a,x)==\delta^{m-1}=\left(\left(a+a^{-1}\right)x^{-1}-1\right)^{m-1}$。

3) $L_{K_*}(a,x)=L_K\left(a^{-1},x\right)$，其中 K^* 表示链环 K 的镜像。

4) $L_{K_1\#K_2}(a,x)=L_{K_1}(a,x)L_{K_2}(a,x)$，其中 $K_1\#K_2$ 为链环 K_1 和 K_2 的组合。

5) $L_{K_1\cup K_2}(a,x)=\delta L_{K_1}(a,x)L_{K_2}(a,x)$，其中 $K_1\cup K_2$ 为链环 K_1 和 K_2 的不相交并。

3. 一类特殊链环的 Kauffman 多项式 L

n 分支直线型链环 L_n 的 Kauffman 多项式 $L(L_n)$

[11]**定义 3.1** n 分支直线型链环 L_n：由 n 个分支所构成，且是由 n 个平凡结按照特定方式并在一起，

如图 6 所示。

注 1：最简单的非平凡的直线型链环为 2 个分支的直线型链环，即 Hopf 链环。

注 2：规定 1 分支的直线型链环为平凡结。

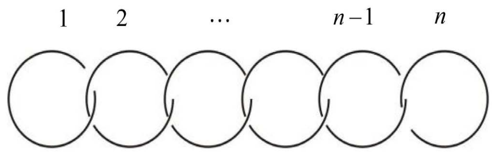


Figure 6. Linear links L_n

图 6. 直线型链环 L_n

[12]**定义 3.2** n 分支复叠链环 K_n：由 n 个分支构成，是由 n 个平凡结两两相扣所得。如图 7 所示。

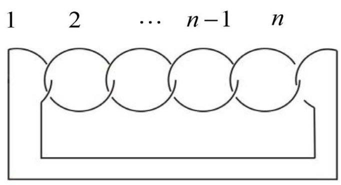


Figure 7. The covering links of n components link K_n

图 7. n 分支复叠链环 K_n

定理 3.1 n 分支直线型链环 L_n，其 Kauffman 多项式 $L(L_n)$ 表达式为

$$L(L_n)=\left(\left(x-x^{-1}\right)\left(a+a^{-1}\right)+1\right)^{n-1}.$$

证明 对于 n 分支直线型链环 L_n，对其左下角交叉点应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令其生成链环分别为 L_{n1},L_{n2},L_{n3}，如图 8 所示。

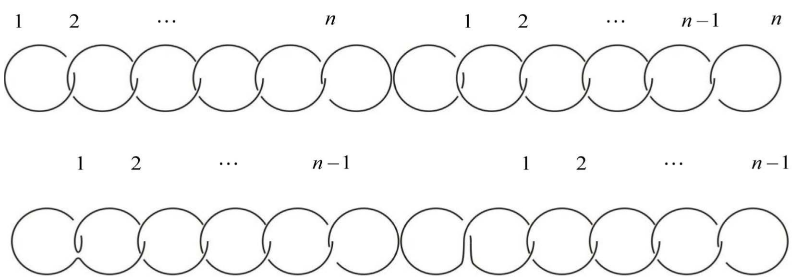


Figure 8. The skein relation of L_n

图 8. L_n 的拆接关系式

即拆接关系式为

$$L(L_n)+L(L_{n1})=x\left(L(L_{n2})+L(L_{n3})\right),$$

其中链环 L_{n1} 为平凡结与 $n-1$ 分支直线型链环 L_{n-1} 的并；对 L_{n2},L_{n3} 应用一系列 R1 变换得到链环 L_{n-1}。可以得到如下关系式

DOI: 10.12677/aam.2023.1210407

$$L(L_{n1}) = \delta L(L_{n-1}),$$

$$L(L_{n2}) = a^{-1} L(L_{n-1}),$$

$$L(L_{n3}) = a L(L_{n-1}).$$

即拆接关系式等价于

$$L(L_n) + \delta L(L_{n-1}) = x\left(a L(L_{n-1}) + a^{-1} L(L_{n-1})\right)，其中 \delta = \left(a + a^{-1}\right) x^{-1} - 1$$

对其进行整理，得到 $L(L_n)$ 的递归关系式

$$L(L_n) = \left(xa + xa^{-1} - \delta\right) L(L_{n-1}) = \left(\left(x - x^{-1}\right)\left(a + a^{-1}\right) + 1\right) L(L_{n-1}),$$

则有

$$L(L_{n-1}) = \left(\left(x - x^{-1}\right)\left(a + a^{-1}\right) + 1\right) L(L_{n-2}),$$

$$L(L_{n-2}) = \left(\left(x - x^{-1}\right)\left(a + a^{-1}\right) + 1\right) L(L_{n-3}),$$

$$\cdots$$

$$L(L_2) = \left(\left(x - x^{-1}\right)\left(a + a^{-1}\right) + 1\right) L(L_1)$$

由于 L_1 为 1 分支的直线型链环，为平凡结，则 $L(L_1) = 1$。

对上述等式进行合并整理，有

$$L(L_n) = \left(\left(x - x^{-1}\right)\left(a + a^{-1}\right) + 1\right)^{n-1}.$$

定理得证。

定理 3.2 n 分支复叠链环 K_n 的 Kauffman 多项式 $L(K_n)$ 的递归关系式为

$$\begin{aligned} L(K_n) = {} & \left(x^2 + 2a^{-1}x + k\right) L(K_{n-1}) - \left(k\left(x^2 + 2a^{-1}x\right) + a^{-1}x\left(x^2 + a^{-1}x\right) + x^2\right) L(K_{n-2}) \\ & + k\left(a^{-1}x\left(a^{-1}x + x^2\right) + x^2\right) K_{n-3} \end{aligned}$$

初值为 $L(K_0) = \delta$， $L(K_1) = a^{-2}$， $L(K_2) = xa^{-3} + x^2\left(a^{-2} + k\right) - ax - k$，其中 $k = \left(a + a^{-1}\right)\left(x - x^{-1}\right) + 1$。

证明 下面对一类不定向 n 分支复叠链环 K_n 的 Kauffman 多项式进行研究，首先对链环 K_n 左上角的交叉点应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令其生成的三个链环分别为 $K_{n,1}, K_{n,2}, K_{n,3}$，拆接关系式如图 9 所示。

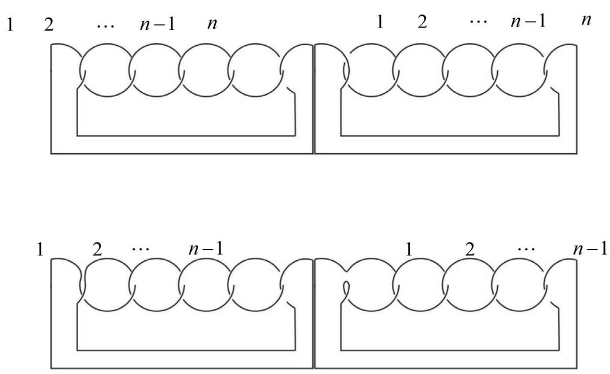


Figure 9. The skein relation of K_n
图 9. K_n 的拆接关系式

即拆接关系式为

$$L\left(K_n\right)+L\left(K_{n,1}\right)=x\left(L\left(K_{n,2}\right)+L\left(K_{n,3}\right)\right) \tag{3.1}$$

而对链环 K_{n1} 应用一系列 R2 变换，其可看作 n 分支直线型链环 L_n；对链环 K_{n3} 应用一系列 R1 变换，其可看作 $n-1$ 分支复叠链环 K_{n-1}。

则 3.1 式等价于

$$L\left(K_n\right)+L\left(L_n\right)=x\left(L\left(K_{n2}\right)+a^{-1}L\left(K_{n-1}\right)\right). \tag{3.2}$$

观察发现，K_{n2} 为 $n-1$ 分支链环，令其为 H_{n-1}。接着对链环 H_{n-1} 左上角的交叉点 A 应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令其所生成的链环分别为 $H_{n-1,1},H_{n-1,2},H_{n-1,3}$，拆接关系如图 10 所示。

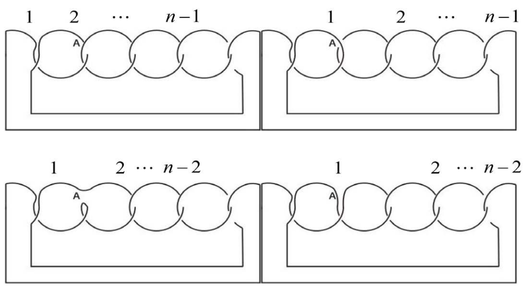


Figure 10. The skein relation of H_{n-1}
图 10. H_{n-1} 的拆接关系式

即拆接关系式为

$$L\left(H_{n-1}\right)+L\left(H_{n-1,1}\right)=x\left(L\left(H_{n-1,2}\right)+L\left(H_{n-1,3}\right)\right), \tag{3.3}$$

而对链环 $H_{n-1,1}$ 应用一系列 R1、R2 变换，其可看作 $n-1$ 分支直线型链环 L_{n-1}；对链环 $H_{n-1,2}$ 应用一系列 R1 变换，其可看作 $n-2$ 分支链环 H_{n-2}；链环 $H_{n-1,3}$ 为 $n-2$ 分支链环，令其为 J_{n-2}。

则 3.3 式等价于

$$L\left(H_{n-1}\right)+aL\left(L_{n-1}\right)=x\left(L\left(J_{n-2}\right)+a^{-1}L\left(H_{n-2}\right)\right). \tag{3.4}$$

下面对 $n-2$ 分支的链环 J_{n-2} 的 Kauffman 多项式进行研究，对链环 J_{n-2} 的交叉点 B 应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令其生成的链环分别为 $J_{n-2,1},J_{n-2,2},J_{n-2,3}$，如图 11 所示。

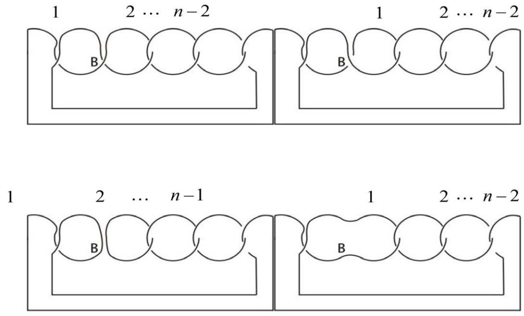


Figure 11. The skein relation of J_{n-2}
图 11. J_{n-2} 的拆接关系式

即拆接关系式为

$$L\left(J_{n-2}\right)+L\left(J_{n-2,1}\right)=x\left(L\left(J_{n-2,2}\right)+L\left(J_{n-2,3}\right)\right), \tag{3.5}$$

而对链环 $J_{n-2,1}$ 应用一系列 R2 变换，其可看作 $n-2$ 分支复叠链环 K_{n-2}；对链环 $J_{n-2,2}$ 应用一系列 R1 变换，其可看作 $n-1$ 分支直线型链环 L_{n-1}；链环 $J_{n-2,3}$ 为 $n-2$ 分支链环 H_{n-2}。

则 3.5 式等价于

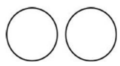
$$L\left(J_{n-2}\right)+L\left(K_{n-2}\right)=x\left(aL\left(L_{n-1}\right)+L\left(H_{n-2}\right)\right). \tag{3.6}$$

对 3.2、3.4、3.6 式进行合并、整理，可得 $n\geq 3$ 时，K_n 的 Kauffman 多项式 $L\left(K_n\right)$ 的递归关系式为：

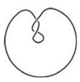
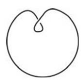
$$\begin{aligned} L\left(K_n\right)=&\left(x^2+2a^{-1}x+k\right)L\left(K_{n-1}\right)-\left(k\left(x^2+2a^{-1}x\right)+a^{-1}x\left(x^2+a^{-1}x\right)+x^2\right)L\left(K_{n-2}\right)\\ &+k\left(a^{-1}x\left(a^{-1}x+x^2\right)+x^2\right)K_{n-3} \end{aligned} \tag{3.7}$$

初值 $L\left(K_0\right),L\left(K_1\right),L\left(K_2\right)$ 的计算分别如下：

1) $L\left(K_0\right)$

$L\left(K_0\right)=L($  $)=\delta$.

2) $L\left(K_1\right)$

$L\left(K_1\right)=L($  $)=a^{-1}L($  $)=a^{-2}$.

3) $L\left(K_2\right)$

对链环 K_2 的左上方的交叉点应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令生成的链环分别为 $K_{2,1},K_{2,2},K_{2,3}$，如图 12 所示。

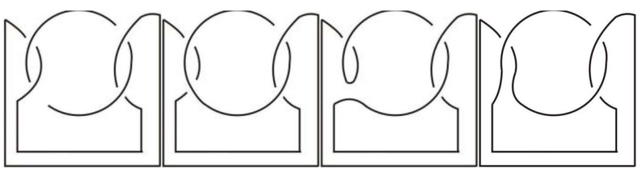


Figure 12. The skein relation of K_2
图 12. K_2 的拆接关系式

则有如下表达式

$$L\left(K_2\right)+L\left(K_{2,1}\right)=x\left(L\left(K_{2,2}\right)+L\left(K_{2,3}\right)\right)$$

而对链环 $K_{2,1}$ 应用一系列 R2 变换，其可看作 2 分支直线型链环 L_2；对链环 $K_{2,2}$ 应用一系列 R1 变换，其可看作 1 分支链环 L_1。

即

$$L\left(K_2\right)+L\left(L_2\right)=x\left(a^{-3}L\left(L_1\right)+L\left(K_{2,3}\right)\right) \tag{3.8}$$

接着对链环 $K_{2,3}$ 的右上方的交叉点应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令其生成的三个链环分别为 K_{2a},K_{2b},K_{2c}，拆接关系式如图 13 所示。

则有

$$L\left(K_{2,3}\right)+L\left(K_{2a}\right)=x\left(L\left(K_{2b}\right)+L\left(K_{2c}\right)\right)$$

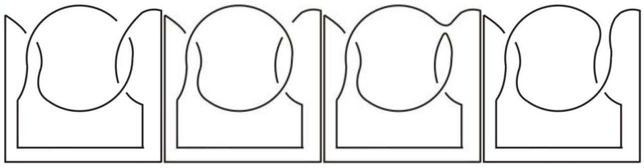


Figure 13. The skein relation of $K_{2,3}$

图 13. $K_{2,3}$ 的拆接关系式

而对链环 K_{2a} 应用一系列 R1、R2 变换，其可看作平凡结；对链环 K_{2b} 应用一系列 R1 变换，其可看作平凡结。即

$$L(K_{2,3})+a=x\left(a^{-2}+L(K_{2c})\right) \tag{3.9}$$

接着对链环 K_{2c} 的左侧的交叉点应用 Kauffman 多项式的拆接关系式，令其生成的链环分别为 K_{2d},K_{2e},K_{2f}。如图 14 所示。

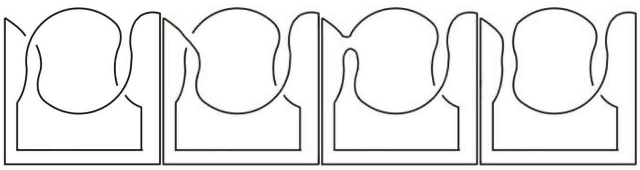


Figure 14. The skein relation of K_{2c}

图 14. K_{2c} 的拆接关系式

则有如下表达式

$$L(K_{2c})+L(K_{2d})=x\left(L(K_{2e})+L(K_{2f})\right)$$

而对链环 K_{2d} 应用一系列 R2 变换，其可看作两个平凡结的并；对链环 K_{2e},K_{2f} 应用一系列 R1 变换，其可看作平凡结。即

$$L(K_{2c})+\delta=x\left(a^{-1}+a\right) \tag{3.10}$$

对 3.8~3.10 式进行合并整理，得到链环 $L(K_2)$ 的表达式为：

$$L(K_2)=xa^{-3}+x^2\left(a^{-2}+k\right)-ax-k$$

其中 $k=\left(x-x^{-1}\right)\left(a+a^{-1}\right)+1$。

综上所述，定理得证。

注： 全文 k 均为 $\left(x-x^{-1}\right)\left(a+a^{-1}\right)+1$。

定理 3.3 n 分支复叠链环 K_n 的 Kauffman 多项式 $L(K_n)$ 所对应特征多项式的特征根为

$$\lambda_1=k,\lambda_2=\frac{2a^{-1}x+x^2+x\sqrt{x^2-4}}{2},\lambda_3=\frac{2a^{-1}x+x^2-x\sqrt{x^2-4}}{2}$$

其中 $k=\left(x-x^{-1}\right)\left(a+a^{-1}\right)+1$

证明 由定理 3.2 可知，链环 K_n 的 Kauffman 多项式的递归关系式为

$$L(K_n)=\left(x^2+2a^{-1}x+k\right)L(K_{n-1})-\left(k\left(x^2+2a^{-1}x\right)+a^{-1}x\left(x^2+a^{-1}x\right)+x^2\right)L(K_{n-2})$$
$$+k\left(a^{-1}x\left(a^{-1}x+x^2\right)+x^2\right)K_{n-3}$$

则其对应的特征多项式为

$$\lambda^3-\left(x^2+2a^{-1}x+k\right)\lambda^2+\left(k\left(x^2+2a^{-1}x\right)+a^{-1}x\left(x^2+a^{-1}x\right)+x^2\right)\lambda-k\left(a^{-1}x\left(x^2+a^{-1}x\right)+x^2\right)=0$$

即

$$(\lambda-k)\left(\lambda^2-\left(2a^{-1}x+x^2\right)\lambda+a^{-1}x\left(a^{-1}x+x^2\right)+x^2\right)=0$$

则该特征多项式的三个特征根分别为

$$\lambda_1=k,\lambda_2=\frac{2a^{-1}x+x^2+x\sqrt{x^2-4}}{2},\lambda_3=\frac{2a^{-1}x+x^2-x\sqrt{x^2-4}}{2}.$$

定理得证。

推论 3.4 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=k+2a^{-1}x+x^2$

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_3\lambda_2=\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_3\lambda_2=k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+a^{-1}x\left(a^{-1}x+x^2\right)+x^2$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=k\left(a^{-1}x\left(a^{-1}x+x^2\right)+x^2\right)$$

其中 $k=\left(x-x^{-1}\right)\left(a+a^{-1}\right)+1$

证明 将 λ_1、λ_2、λ_3 的值带入即可得到。

性质 3.5 序列 $L(K_n)$ 对应的生成函数为

$$g_{L(K_n)}(\lambda)=\frac{\delta+\left[a^{-2}-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\delta\right]\lambda+\left[k\left(1+a^{-2}-a^{-1}x+ax\right)+\delta\left(x^2+a^{-2}x^2+a^{-1}x^3\right)-a^{-3}x-ax\right]\lambda^2}{1-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\lambda+\left[k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+x^2+a^{-2}x^2+a^{-1}x^3\right]\lambda^2-k\left(a^{-1}x^3+a^{-2}x^2+x^2\right)\lambda^3}$$

其中 $k=\left(a+a^{-1}\right)\left(x-x^{-1}\right)+1$。

证明 $L(K_n)$ 的生成函数的形式如下：

$$g_{L(K_n)}(\lambda)=L(K_0)+L(K_1)\lambda+L(K_2)\lambda^2+\cdots$$

分别对 $g_{L(K_n)}(\lambda)$ 乘以

$$\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\lambda,\left[k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\right]\lambda^2,k\left(a^{-1}x^3+x^2+a^{-2}x^2\right)\lambda^3$$

则有

$$\left(1-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\lambda+\left(k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\right)\lambda^2-k\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\lambda^3\right)g_{L(K_n)}(\lambda)$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\left(L(K_n)-kL(K_{n-1})-\left(2a^{-1}x+x^2\right)\left(L(K_{n-1})-kL(K_{n-2})\right)+\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\left(L(K_{n-2})-kL(K_{n-3})\right)\right)\lambda^n$$
$$+\left(L(K_2)-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)L(K_1)+\left(k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+\left(a^{-2}x^2+a^{-1}x^3+x^2\right)\right)L(K_0)\right)\lambda^2+L(K_0)$$
$$+\left(L(K_1)-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)L(K_0)\right)\lambda$$

由序列 $L(K_n)$ 的递归关系式可知

$$L(K_n)-kL(K_{n-1})-\left(2a^{-1}x+x^2\right)\left(L(K_{n-1})-kL(K_{n-2})\right)+\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\left(L(K_{n-2})-kL(K_{n-3})\right)=0,$$

则

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(L\left(K_n\right)-kL\left(K_{n-1}\right)-\left(2a^{-1}x+x^2\right)\left(L\left(K_{n-1}\right)-kL\left(K_{n-2}\right)\right)+\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\left(L\left(K_{n-2}\right)-kL\left(K_{n-3}\right)\right)\right)\lambda^n=0$$

则原式等价于

$$\begin{aligned}&\left(1-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\lambda+\left(k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\right)\lambda^2-k\left(a^{-2}x^2+x^2+a^{-1}x^3\right)\lambda^3\right)g_{L(K_n)}(\lambda)\\&=\left(L\left(K_2\right)-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)L\left(K_1\right)+\left(k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+\left(a^{-2}x^2+a^{-1}x^3+x^2\right)\right)L\left(K_0\right)\right)\lambda^2+L\left(K_0\right)\\&\quad+\left(L\left(K_1\right)-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)L\left(K_0\right)\right)\lambda\end{aligned}$$

将三个初值 $L\left(K_0\right)$、$L\left(K_1\right)$、$L\left(K_2\right)$ 的值依次代入上述等式，即可得到序列 $L\left(K_n\right)$ 所对应的生成函数为

$$g_{L(K_n)}(\lambda)=\frac{\delta+\left[a^{-2}-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\delta\right]\lambda+\left[k\left(1+a^{-2}-a^{-1}x+ax\right)+\delta\left(x^2+a^{-2}x^2+a^{-1}x^3\right)-a^{-3}x-ax\right]\lambda^2}{1-\left(2a^{-1}x+x^2+k\right)\lambda+\left[k\left(2a^{-1}x+x^2\right)+x^2+a^{-2}x^2+a^{-1}x^3\right]\lambda^2-k\left(a^{-1}x^3+a^{-2}x^2+x^2\right)\lambda^3}$$

命题得证。

定理 3.6 序列 $L\left(K_n\right)$ 的通解为 $L_n=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n, n\geq 0$，其中 $\alpha=\lambda_1$，$\beta=\lambda_2$，$\gamma=\lambda_3$

其中

$$A=\frac{8a^{-1}x-4a^{-1}x^3+4k\left(x^2-1\right)}{\left(2k-2a^{-1}x-x^2\right)^2-x^2\left(x^2-4\right)}$$

$$\begin{aligned}C=&\frac{4\left(2a^{-1}x+x^2\right)\left(\delta k-a^{-2}\right)}{x^2\left(x^2-4\right)-\left(2k-2a^{-1}x-x^2\right)^2}-\frac{\left(2a^{-1}x+x^2-x\sqrt{x^2-4}+2k\right)\left(\delta\left(2a^{-1}x+x^2+x\sqrt{x^2-4}\right)-2a^{-2}\right)}{2x\sqrt{x^2-4}\left(2a^{-1}x+x^2+x\sqrt{x^2-4}-2k\right)}\\&+\frac{4\left(xa^{-3}+x^2\left(a^{-2}+k\right)-ax-k\right)-\delta\left(2a^{-1}x+x^2-x\sqrt{x^2-4}\right)^2}{2x\sqrt{x^2-4}\left(2k-2a^{-1}x-x^2+x\sqrt{x^2-4}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B=&\frac{4\left(2a^{-1}x+x^2\right)\left(\delta k-a^{-2}\right)}{x^2\left(x^2-4\right)-\left(2k-2a^{-1}x-x^2\right)^2}+\frac{\left(2a^{-1}x+x^2+x\sqrt{x^2-4}+2k\right)\left(\delta\left(2a^{-1}x+x^2-x\sqrt{x^2-4}\right)-2a^{-2}\right)}{2x\sqrt{x^2-4}\left(2a^{-1}x+x^2-x\sqrt{x^2-4}-2k\right)}\\&-\frac{4\left(xa^{-3}+x^2\left(a^{-2}+k\right)-ax-k\right)-\delta\left(2a^{-1}x+x^2+x\sqrt{x^2-4}\right)^2}{2x\sqrt{x^2-4}\left(2k-2a^{-1}x-x^2-x\sqrt{x^2-4}\right)}\end{aligned}$$

其中 $k=\left(x-x^{-1}\right)\left(a+a^{-1}\right)+1$

证明 序列 $L\left(K_n\right)$ 的通项公式为

$$L\left(K_n\right)=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n, n\geq 0$$

则分别令 $n=0,1,2$，有

$$L_0=A+B+C=\delta \tag{1}$$

$$L_1=A\alpha+B\beta+C\gamma=a^{-2} \tag{2}$$

$$L_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k \text{，其中 } k = \left(x - x^{-1}\right)\left(a + a^{-1}\right) + 1 . \tag{3}$$

解系数 A,B,C 分别如下：

首先对系数 C 进行求解。对(1)式分别左右乘以 α 、 β 、 γ 有(4)式，对(1)式分别左右乘以 α^2 、 β^2 、 γ^2 有(5)式。

则有如下等式

$$\begin{cases} A\alpha + B\alpha + C\alpha = \delta\alpha \\ A\beta + B\beta + C\beta = \delta\beta \\ A\gamma + B\gamma + C\gamma = \delta\gamma \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} A\alpha^2 + B\alpha^2 + C\alpha^2 = \delta\alpha^2 \\ A\beta^2 + B\beta^2 + C\beta^2 = \delta\beta^2 \\ A\gamma^2 + B\gamma^2 + C\gamma^2 = \delta\gamma^2 \end{cases} \tag{5}$$

则将上述(4)、(5)两式分别与(2)、(3)式作差，有(6)式和(7)式：

$$\begin{cases} B(\alpha-\beta) + C(\alpha-\gamma) = \delta\alpha - a^{-2} \\ A(\beta-\alpha) + C(\beta-\gamma) = \delta\beta - a^{-2} \\ A(\gamma-\alpha) + B(\gamma-\beta) = \delta\gamma - a^{-2} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} B\left(\beta^2-\alpha^2\right) + C\left(\gamma^2-\alpha^2\right) = xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k - \delta\alpha^2 \\ A\left(\alpha^2-\beta^2\right) + C\left(\gamma^2-\beta^2\right) = xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k - \delta\beta^2 \\ A\left(\alpha^2-\gamma^2\right) + B\left(\beta^2-\gamma^2\right) = xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k - \delta\gamma^2 \end{cases} \tag{7}$$

对上述(6)、(7)两式进行合并整理，得到 C 的表达式为：

$$C = \frac{xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k - \gamma^2\delta}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \frac{(\beta+\gamma)\left(\delta\alpha - a^{-2}\right)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)} - \frac{(\alpha+\gamma)\left(\delta\beta - a^{-2}\right)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$$

同理可以求出 A,B

$$B = \frac{xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k - \beta^2\delta}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} - \frac{(\beta+\alpha)\left(\delta\gamma - a^{-2}\right)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{(\beta+\gamma)\left(\delta\alpha - a^{-2}\right)}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$$

$$A = \frac{xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k - \alpha^2\delta}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{(\gamma+\alpha)\left(\delta\beta - a^{-2}\right)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)} - \frac{(\beta+\alpha)\left(\delta\gamma - a^{-2}\right)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

将 α 、 β 、 γ 的值带入上述三个式子即可得到

$$A = \frac{8a^{-1}x - 4a^{-1}x^3 + 4k\left(x^2-1\right)}{\left(2k - 2a^{-1}x - x^2\right)^2 - x^2\left(x^2-4\right)}$$

$$C = \frac{4\left(2a^{-1}x + x^2\right)\left(\delta k - a^{-2}\right)}{x^2\left(x^2-4\right) - \left(2k - 2a^{-1}x - x^2\right)^2} - \frac{\left(2a^{-1}x + x^2 - x\sqrt{x^2-4} + 2k\right)\left(\delta\left(2a^{-1}x + x^2 + x\sqrt{x^2-4}\right) - 2a^{-2}\right)}{2x\sqrt{x^2-4}\left(2a^{-1}x + x^2 + x\sqrt{x^2-4} - 2k\right)}$$

$$+ \frac{4\left(xa^{-3} + x^2\left(a^{-2}+k\right) - ax - k\right) - \delta\left(2a^{-1}x + x^2 - x\sqrt{x^2-4}\right)^2}{2x\sqrt{x^2-4}\left(2k - 2a^{-1}x - x^2 + x\sqrt{x^2-4}\right)}$$

$$B=\frac{4\left(2a^{-1}x+x^{2}\right)\left(\delta k-a^{-2}\right)}{x^{2}\left(x^{2}-4\right)-\left(2k-2a^{-1}x-x^{2}\right)^{2}}-\frac{\left(2a^{-1}x+x^{2}+x\sqrt{x^{2}-4}+2k\right)\left(\delta\left(2a^{-1}x+x^{2}-x\sqrt{x^{2}-4}\right)-2a^{-2}\right)}{-2x\sqrt{x^{2}-4}\left(2a^{-1}x+x^{2}-x\sqrt{x^{2}-4}-2k\right)}$$
$$+\frac{4\left(xa^{-3}+x^{2}\left(a^{-2}+k\right)-ax-k\right)-\delta\left(2a^{-1}x+x^{2}+x\sqrt{x^{2}-4}\right)^{2}}{-2x\sqrt{x^{2}-4}\left(2k-2a^{-1}x-x^{2}-x\sqrt{x^{2}-4}\right)}$$

定理得证。

4. 结语

本文主要研究一类特殊不定向链环——复叠链环的 Kauffman 多项式。借助直线型链环的 Kauffman 多项式对复叠链环的Kauffman多项式进行研究。利用Kauffman多项式的拆接关系式推出其递归关系式，进而研究了这个递归关系式的生成函数。为研究定向复叠链环的 Kauffman 多项式以及 BLM/Ho 多项式奠定基础。

参考文献

[1] Berceanu, B. and Nizami, A.R. (2014) A Recurrence Relation for the Jones Polynomial. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **51**, 443-462. https://doi.org/10.4134/JKMS.2014.51.3.443

[2] Duzhin, S. and Shkolnikov, M. (2015) A Formula for the HOMFLY Polynomial of Rational Links. *Arnold Mathematical Journal*, **1**, 345-359. https://doi.org/10.1007/s40598-015-0013-7

[3] Taşköprü, K. and Altıntaş, İ. (2015) HOMFLY Polynomials of Torus Links as Generalized Fibonacci Polynomials. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **22**, P4.8. https://doi.org/10.37236/5324

[4] Altıntas, I., Tasköprü, K. and Beyaztas, M. (2018) Bracket Polynomials of Torus Links as Fibonacci Polynomials. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **5**, 35-43.

[5] Altintas, I. and Takprü, K. (2019) Unoriented Knot Polynomials of Torus Links as Fibonacci-Type Polynomials. *Asian-European Journal of Mathematics*, **12**, No. 4. https://doi.org/10.1142/S1793557119500530

[6] (英)M. A. Armstrong. 基础拓扑学[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010.

[7] 刘卫丽. 关于纽结的一个多项式不变量[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2014.

[8] Adams, C. (1994) The Knot Book. W.H. Freeman and Company, New York.

[9] Adams C. (2004) The Knot Book. American Mathematical Society, New York.

[10] Rolfsen, D. and Chelsea, A. (1976) Knots and Links. American Mathematical Society, New York.

[11] 颜春惺. 一些定向链环的 HOMFLY 多项式[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国石油大学, 2021.

[12] Alexander, J. W. (1928) Topological Invariants of Knots and Links. *Transactions of the American Mathematical Society*, **30**, 275-306. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1