Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(1), 29-36
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121005

度和与边数条件下过线性森林圈的一些研究

邵雅欣，杨卫华*

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2022年12月12日；录用日期：2023年1月5日；发布日期：2023年1月13日

摘　要

2009年，Faudree提出在给定的$\sigma_2(G)$条件下，图G过(k,t)-线性森林的$(k,t,2t+k)$-泛圈问题。本文证明了在该$\sigma_2(G)$条件下，对任意$r\in[\max\{4,k+2t\},n]$，G中存在长为r或$r+1$的圈过(k,t)-线性森林。此外，本文还给出了图G是(k,t)-哈密顿的一个边数条件。

关键词

线性森林，哈密顿圈，泛圈

Researches on the Cycles through Linear Forest under the Conditions of Degree Sum and Edge Number

Yaxin Shao, Weihua Yang*

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Dec. 12th, 2022; accepted: Jan. 5th, 2023; published: Jan. 13th, 2023

Abstract

In 2009, Faudree proposed the $(k,t,2t+k)$-pancyclic problem of graph G passing through (k,t)-linear forest under given $\sigma_2(G)$ condition. In this paper, we prove that under the $\sigma_2(G)$ condition, for any $r\in[\max\{4,k+2t\},n]$, there exists a cycle passing through (k,t)-linear forest of length r or $r+1$ in the graph G. In addition, an edge number condition that graph G is (k,t)-Hamiltonian

*通讯作者。

文章引用: 邵雅欣, 杨卫华. 度和与边数条件下过线性森林圈的一些研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 29-36.
DOI: 10.12677/aam.2023.121005

is given.

Keywords

Linear Forest, Hamiltonian Cycle, Pancyclic

1. 引言

本文只考虑无自环和重边的简单图。下面先给出一些基本的定义和符号，$V(G)$，$E(G)$和$\delta(G)$分别表示图G的点集、边集和最小度；图G的点数$|V(G)|$记为n，边数$|E(G)|$记为m，$d_G(u)$表示图G中点u的度数。对于一个非完全图G，定义$\sigma_2(G)=\min\{d_G(u_1)+d_G(u_2)\}$，其中$u_1$、$u_2$是任意两个不相邻点对。图$G$中包含了所有点的圈称为哈密顿圈，一个存在哈密顿圈的图称为哈密顿图。一个(k,t,s)-线性森林是一个由k条边、t条路构成的线性森林，且t条路中有s条单点路。当一个线性森林F中单点路的数量未知时，简称F为(k,t)-线性森林。如果对于G中的任意(k,t)-线性森林F，G中都存在一个哈密顿圈包含F，那么称G是(k,t)-哈密顿的。给定整数m和n（$k+t\le m\le n$），如果对于任意的(k,t)-线性森林及任意的整数$r(m\le r\le n)$，G中都存在长度为r的圈包含这个线性森林，那么称G是(k,t,m)-泛圈的。本文未定义的术语可参考文献[1]。

1952年，Dirac [2]给出：设G是一个阶数$n\ge 3$的图，如果最小度$\delta(G)\ge n/2$，那么G是哈密顿的。1960年，Ore [3]把上述结论推广到不相邻两点度和条件下哈密顿圈存在的结果：设G是一个阶数$n\ge 3$的图，如果$\sigma_2(G)\ge n$，那么G是哈密顿的。在此基础上，Kronk [4]研究了过k-路的圈，并分别给出了不相邻两点度和条件和边数条件下的结论：设G是一个n阶图且满足$\sigma_2(G)\ge n+k$或满足边数$m\ge (n-1)(n-2)/2+k+2$，那么G是k-路哈密顿的。Faudree [5]等人把过k-路的圈推广到过(k,t)-线性森林的情况。

定理1 [5] 令G是一个n阶图，k，t和n是正整数且满足$2\le k+t\le n$，F是一个(k,t)-线性森林。如果

(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，当$F=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$时，

(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，其他情况，

那么G是(k,t)-哈密顿的，其中$2|(n-k)$时$\varepsilon(n,k)=1$，否则$\varepsilon(n,k)=0$。此外，$\sigma_2(G)$的条件是紧的。

除了研究哈密顿圈外，[5]还研究了泛圈性的结果，并提出一个改进度和条件下的问题。

定理2 [5] 令G是一个n阶图，k，t和n是正整数且满足$2\le k+t\le n$，F是一个(k,t)-线性森林。如果$\sigma_2(G)\ge n+k$，那么G是$(k,t,2t+k)$-泛圈的。

问题[5]令G是一个n阶图，k，t和n是正整数且满足$2\le k+t\le n$，F是一个(k,t)-线性森林。如果

(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，当$P_{k+1}\subseteq F$时，

(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，其他情况，

那么G是$(k,t,2t+k)$-泛圈的吗？

何剑在[6]中尝试解决上述问题，给出了在$(k,t,0)$-线性森林的情况下一个结果。本文基于 Faudree 等人提出的上述问题猜想，将[6]中的结论推广到(k,t)-线性森林的情况，即线性森林中可以有单点路。此外，本文还给出了图 G 是(k,t)-哈密顿的一个边数条件。

2. 主要结果

本文证明了以下结果：

定理 3 设 k，t 和 n 是正整数，满足 $2\le k+t\le n$，G 是 n 阶图，F 是(k,t)-线性森林，如果

(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，当 $F=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$，

(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，其他情况，

则对任意 $r\in[\max\{4,k+2t\},n]$，G 中存在长为 r 或 $r+1$ 的圈过 F。

定理 4 设 k，t 和 n 是正整数，满足 $2\le k+t\le n$，G 是 n 阶图，F 是(k,t)-线性森林，如果边数

(i) $m\ge(n-1)(n-2)/2+k+2$，当 $F=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$ 时，

(ii) $m\ge(n-1)(n-2)/2+k+2-\varepsilon(n,k)$，其他情况，

那么 G 是(k,t)-哈密顿的，其中 $2\mid(n-k)$ 时 $\varepsilon(n,k)=1$，否则 $\varepsilon(n,k)=0$。

3. 证明

首先给出证明过程中需要用到的两个引理。

引理 6 [6] 设 $k=t=1$，G 是阶 $n\ge k+t$ 的图，F 是 G 中$(k,t,t-k)$-线性森林。如果 $\sigma_2(G)\ge n+k$，则 G 中存在过 F 的长度不大于 4 的圈。

引理 7 [6] 设 G 是阶 $n\ge k+t$ 的图，其中 k，t 为满足 $k\le t$ 的正整数。设 F 是 G 中$(k,t,t-k)$-线性森林。如果

(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，$k=1$ 时，

(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，$k\ge 2$ 时，

则当 $t\ge 2$ 时，G 存在过 F 的圈 C，使得 $C-V(F)$ 为孤立点图或空图。

在证明定理 3 前还需要给出两个定理来辅助证明。

定理 8 设 G 是阶 $n\ge k+t$ 的图，其中 k，t 为满足 $k\le t$ 的正整数。设 F 是 G 中$(k,t,t-k)$-线性森林。如果 G 中存在长度为 $r\le n-1$ 的过 F 的圈，并且

(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，$k=1$ 时，

(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，$k\ge 2$ 时，

则 G 中存在长为 $r+1$ 或 $r+2$ 的圈过 F。

证明 假设图 G 中不存在过 F 的长度为 $r+1$ 或 $r+2$ 的圈。已知 G 中存在长为 $r\le n-1$ 的过 F 的圈，记为 $C_0=v_1v_2\cdots v_rv_1$，那么有 $H_0=G-C_0\ne\varnothing$。因为 $\sigma_2(G)\ge n+k-1$，所以 G 是 $k+1$-连通图，不妨设 v_1z 是连接 C_0 和 H_0 的边，且有 $v_1v_2\notin E(F)$。那么 $v_2z\notin E(G)$，且 $N(v_2)\cap N(z)\subseteq V(C_0)$，否则 G 中就存在过 F 的长度为 $r+1$ 或 $r+2$ 的圈。故而 $P_0=v_2v_3\cdots v_rv_1z$ 是 G 中过 F 的且长度为 r 的路。

设 $P=u_1u_2\cdots u_{r+1}$ 是 G 中一条长为 r 的路，且满足

(I) $E(F)\subseteq E(P)$，$V(F)\subseteq V(P)$，$u_{r+1}\notin V(F)$，

(II) 在(I)的前提下，$\left|\{u_1u_2\}\cap E(F)\right|$ 最大。

由前边的分析知，$P_0=v_2v_3\cdots v_rv_1z$ 是 G 中满足条件(I)的路，因此假设中选择的路 P 是存在的。

如果 $u_1u_{r+1}\in E(G)$，那么 G 中存在长为 $r+1$ 的圈 $u_1u_2\cdots u_{r+1}u_1$ 过 F；如果 u_1，u_{r+1} 在 $H=G-V(P)$ 中有公共邻点 z，那么 G 中存在长为 $r+2$ 的圈 $u_1u_2\cdots u_{r+1}zu_1$ 过 F。故而假设 $u_1u_{r+1}\notin E(G)$ 且

$N_H(u_1)\cap N_H(u_{r+1})=\varnothing$。因此，$d_H(u_1)+d_H(u_{r+1})\le|H|=n-r-1$。

令 $X=\{j\,|\,1\le j\le r,u_1u_{j+1}\in E(G)\}$，$Y=\{j\,|\,1\le j\le r,u_ju_{r+1}\in E(G)\}$，则 $X\cap Y\subseteq\{j\,|\,u_ju_{j+1}\in E(F)\}$，否则 $\exists j\in X\cap Y$ 使得 $u_1u_{j+1},u_ju_{r+1}\in E(G)$，$u_ju_{j+1}\notin E(F)$，那么圈 $u_1u_2\cdots u_ju_{r+1}u_r\cdots u_{j+1}u_1$ 过 F 且长度为 $r+1$ (如图 1)。

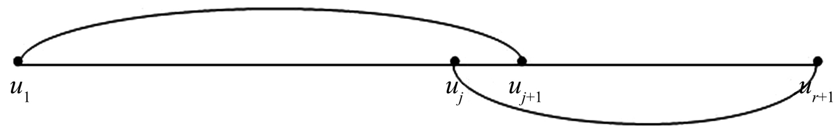

Figure 1. Schematic diagram of cycle $u_1u_2\cdots u_ju_{r+1}u_r\cdots u_{j+1}u_1$

图 1. 存在圈 $u_1u_2\cdots u_ju_{r+1}u_r\cdots u_{j+1}u_1$ 的示意图

于是，$d_P(u_1)+d_P(u_{r+1})=|X|+|Y|=|X\cup Y|+|X\cap Y|\le|[1,r]|+|E(F)|=r+k$，故得 $d_G(u_1)+d_G(u_{r+1})=d_H(u_1)+d_P(u_1)+d_H(u_{r+1})+d_P(u_{r+1})\le n+k-1$。

(i) $k=1$ 时，$\sigma_2(G)\ge n+k$，矛盾。

(ii) $k\ge2$ 时，$\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，故而 $\varepsilon(n,k)=1$，从而有 $d_G(u_1)+d_G(u_{r+1})=n+k-1$，同时 $|X\cup Y|=|[1,r]|$，$|X\cap Y|=|E(F)|$。

如果 $u_1u_2\in E(F)$，则 $1\in X\cap Y$，那么 $u_1u_{r+1}\in E(G)$，与先前的假设矛盾。也就是说对于任何满足(I)的路 $P=u_1u_2\cdots u_{r+1}$ 都有 $u_1u_2\notin E(F)$。类似地，也有 $u_ru_{r+1}\notin E(F)$。

设 u_iu_{i+1} 和 u_ju_{j+1} 是 P 上两条不被其他 F-边间隔的 F-边，u_s 是 $P(u_{i+1},u_j]$ 的第一个 F 中的孤立点且 $u_{j+2}\notin V(F)$。由 $|X\cap Y|=|E(F)|$ 有，$i,j\in X\cap Y$，从而有 $u_{i+1},u_{j+1}\in N(u_1)$，$u_i,u_j\in N(u_{r+1})$。

下面先考虑 s 的取值，首先有 $s\ne j$。若 $s=j$，那么存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_su_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 与 P 的选取矛盾(如图 2)。

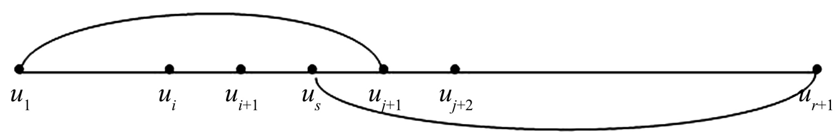

Figure 2. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_su_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$

图 2. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_su_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 的示意图

如果 $s\ne i+2$，则 $s\ge i+3$，那么 $P(u_{i+1},u_s)$ 内存在点 u_{i+2}。由 $|X\cup Y|=|[1,r]|$ 可知，$u_{i+2}\in N(u_1)$ 或 $u_{i+2}\in N(u_{r+1})$，但上述两条件不同时成立，否则与之前的假设矛盾。当 $u_{i+2}\in N(u_1)$ 时，路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{i+2}u_{i+3}\cdots u_{r+1}$ 与 P 的选取矛盾(如图 3)。

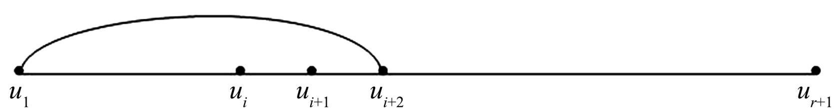

Figure 3. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{i+2}u_{i+3}\cdots u_{r+1}$

图 3. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{i+2}u_{i+3}\cdots u_{r+1}$ 的示意图

当 $u_{i+2}\in N(u_{r+1})$ 时，路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_su_{i+2}u_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 与 P 的选取矛盾(如图 4)。因此 $s=i+2$。

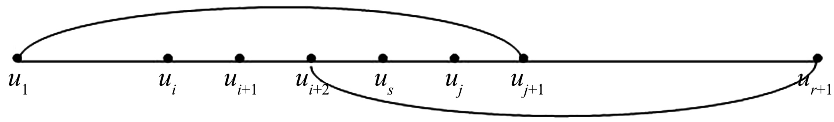

Figure 4. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_su_{i+2}u_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$

图 4. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_su_{i+2}u_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 的示意图

如果 $u_1u_s\in E(G)$，则路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_su_{i+3}\cdots u_{r+1}$ 与 P 的选取矛盾(如图 3)。因此，$u_1u_s\notin E(G)$。如果 $u_su_{r+1}\in E(G)$，则路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_su_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 与 P 的选取矛盾(如图 5)。因此，$u_su_{r+1}\notin E(G)$。

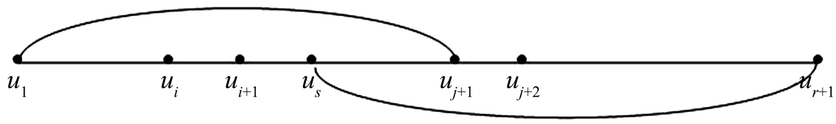

Figure 5. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_su_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$

图 5. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_su_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 的示意图

此外，有 $N_H(u_1)\cap N_H(u_s)=\varnothing$，否则 $\exists z\in N_H(u_1)\cap N_H(u_s)$，又因为 $u_{r+1}\notin V(F)$，故而存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1zu_su_{s+1}\cdots u_r$ 与 P 的选取矛盾(如图 6)。

Figure 6. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1zu_su_{s+1}\cdots u_r$

图 6. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1zu_su_{s+1}\cdots u_r$ 的示意图

也有 $N_H(u_s)\cap N_H(u_{r+1})=\varnothing$，否则 $\exists y\in N_H(u_s)\cap N_H(u_{r+1})$，当 $r=j+1$ 时，路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_sy$ 与 P 的选取矛盾(如图 7)；当 $r\geq j+2$ 时，路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_syu_{r+1}u_r\cdots u_{j+3}$ 与 P 的选取矛盾(如图 8)。

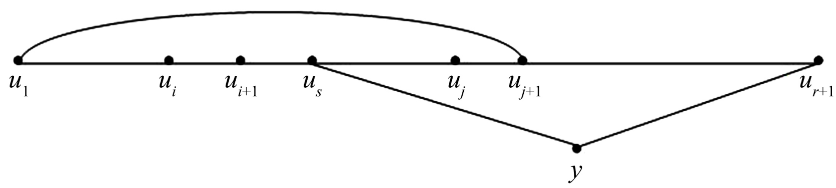

Figure 7. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_sy$

图 7. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_sy$ 的示意图

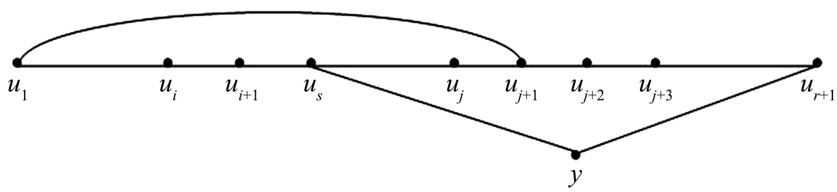

Figure 8. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_syu_{r+1}u_r\cdots u_{j+3}$

图 8. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_syu_{r+1}u_r\cdots u_{j+3}$ 的示意图

故而有，$d_H(u_1)+d_H(u_s)\le n-r-1$，$d_H(u_s)+d_H(u_{r+1})\le n-r-1$。

令 $P_1=u_1u_2\cdots u_{i+1}$，$P_2=u_{i+2}u_{i+3}\cdots u_{r+1}$。

令 $X_1=\{l\mid 1\le l\le i,u_1u_{l+1}\in E(G)\}$，$Y_1=\{l\mid 2\le l\le i+1,u_lu_s\in E(G)\}$，则 $X_1\cap Y_1\subseteq\{l\mid 2\le l\le i,u_lu_{l+1}\in E(F)\}=I_1$，否则 $\exists l\in X_1\cap Y_1$ 使得 $u_1u_{l+1},u_lu_s\in E(G)$，$u_lu_{l+1}\notin E(F)$，那么路 $u_{i+1}u_i\cdots u_{l+1}u_1u_2\cdots u_lu_su_{i+3}\cdots u_{r+1}$ 与 P 的选取矛盾(如图 9)。

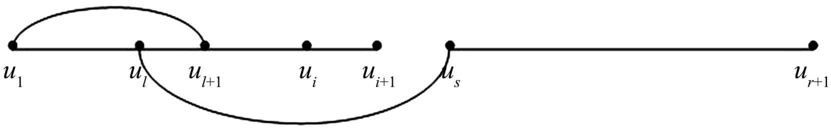

Figure 9. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_{l+1}u_1u_2\cdots u_lu_su_{i+3}\cdots u_{r+1}$

图 9. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_{l+1}u_1u_2\cdots u_lu_su_{i+3}\cdots u_{r+1}$ 的示意图

从而有，$d_{P_1}(u_1)+d_{P_1}(u_s)\le|X_1\cup Y_1|+|X_1\cap Y_1|\le|V(P_1)|+|I_1|$。

令 $X_2=\{l\mid i+2\le l\le r-1,u_1u_l\in E(G)\}$，$Y_2=\{l\mid i+2\le l\le r,u_su_{l+1}\in E(G)\}$，则 $X_2\cap Y_2\subseteq\{l\mid i+2\le l\le r-1,u_lu_{l+1}\in E(F)\}=I_2$，否则 $\exists l\in X_2\cap Y_2$ 使得 $u_1u_l,u_su_{l+1}\in E(G)$，$u_lu_{l+1}\notin E(F)$，那么路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_lu_{l-1}\cdots u_su_{l+1}u_{l+2}u_{r+1}$ 与 P 的选取矛盾(如图 10)。

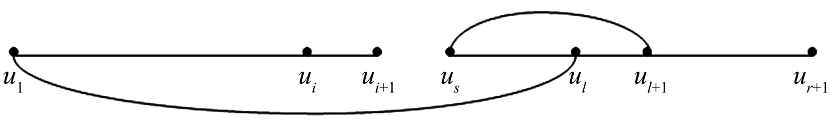

Figure 10. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_lu_{l-1}\cdots u_su_{l+1}u_{l+2}u_{r+1}$

图 10. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_lu_{l-1}\cdots u_su_{l+1}u_{l+2}u_{r+1}$ 的示意图

从而有，$d_{P_2}(u_1)+d_{P_2}(u_s)\le|X_2\cup Y_2|+|X_2\cap Y_2|\le|V(P_2)|-1+|I_2|$。

因此，$d_P(u_1)+d_P(u_s)\le|V(P)|-1+|E(F)|=r+k$。

令 $X_3=\{l\mid 1\le l\le i,u_su_{l+1}\in E(G)\}$，$Y_3=\{l\mid 2\le l\le i+1,u_lu_{r+1}\in E(G)\}$，则 $X_3\cap Y_3\subseteq\{l\mid 2\le l\le i,u_lu_{l+1}\in E(F)\}=I_3$，否则 $\exists l\in X_3\cap Y_3$ 使得 $u_{l+1}u_s,u_lu_{r+1}\in E(G)$，$u_lu_{l+1}\notin E(F)$，那么路 $u_{i+1}u_i\cdots u_{l+1}u_su_{i+3}\cdots u_{r+1}u_lu_{l-1}\cdots u_1$ 与 P 的选取矛盾(如图 11)。

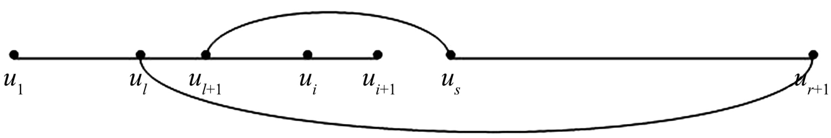

Figure 11. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_{l+1}u_su_{i+3}\cdots u_{r+1}u_lu_{l-1}\cdots u_1$

图 11. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_{l+1}u_su_{i+3}\cdots u_{r+1}u_lu_{l-1}\cdots u_1$ 的示意图

从而有，$d_{P_1}(u_s)+d_{P_1}(u_{r+1})\le|X_3\cup Y_3|+|X_3\cap Y_3|\le|V(P_1)|+|I_3|$。

令 $X_4=\{l\mid i+2\le l\le r-1,u_su_{l+1}\in E(G)\}$，$Y_4=\{l\mid i+3\le l\le r,u_lu_{r+1}\in E(G)\}$，则 $X_4\cap Y_4\subseteq\{l\mid i+3\le l\le r-1,u_lu_{l+1}\in E(F)\}=I_4$，否则 $\exists l\in X_4\cap Y_4$ 使得 $u_{l+1}u_s,u_lu_{r+1}\in E(G)$，$u_lu_{l+1}\notin E(F)$，那么当 $j+1<l$ 时，路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_{j+2}\cdots u_lu_{r+1}u_r\cdots u_{l+1}u_su_{s+1}\cdots u_j$ 与 P 的选取矛盾(如图 12)。当 $j+1>l+1$ 时，路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_{l+1}u_su_{s+1}\cdots u_lu_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 与 P 的选取矛盾(如图 13)。

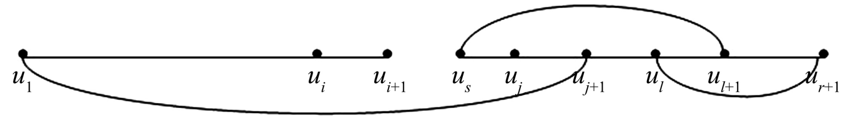

Figure 12. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_{j+2}\cdots u_lu_{r+1}u_r\cdots u_{l+1}u_su_{s+1}\cdots u_j$

图 12. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_{j+2}\cdots u_lu_{r+1}u_r\cdots u_{l+1}u_su_{s+1}\cdots u_j$ 的示意图

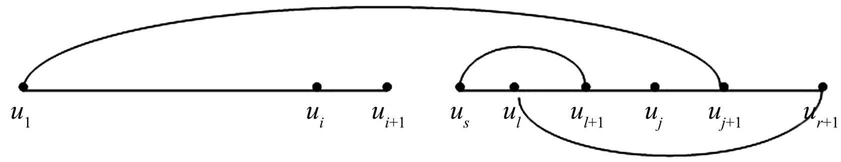

Figure 13. Schematic diagram of path $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_{l+1}u_su_{s+1}\cdots u_lu_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$

图 13. 存在路 $u_{i+1}u_i\cdots u_1u_{j+1}u_j\cdots u_{l+1}u_su_{s+1}\cdots u_lu_{r+1}u_r\cdots u_{j+2}$ 的示意图

从而有，$d_{P_2}(u_s)+d_{P_2}(u_{r+1})\le|X_4\cup Y_4|+|X_4\cap Y_4|\le|V(P_2)|-1+|I_4|$。

因为 $u_1u_2,u_ru_{r+1}\notin E(F)$，又 u_s 是 F 上的孤立点，即 $u_{i+1}u_s,u_su_{i+3}\notin E(F)$，故而 $I_3+I_4=E(F)$。因此，$d_P(u_s)+d_P(u_{r+1})\le|V(P)|-1+|E(F)|=r+k$。

故而有，$d_G(u_1)+d_G(u_s)\le n+k-1$，$d_G(u_s)+d_G(u_{r+1})\le n+k-1$，又因为 $u_1u_s\notin E(G)$，$u_su_{r+1}\notin E(G)$，有 $d_G(u_1)+d_G(u_s)\ge n+k-1$，$d_G(u_s)+d_G(u_{r+1})\ge n+k-1$，所以 $d_G(u_1)+d_G(u_s)=n+k-1$，$d_G(u_s)+d_G(u_{r+1})=n+k-1$。

那么 $2\left(d_G(u_1)+d_G(u_s)+d_G(u_{r+1})\right)=3(n+k-1)$。由 $\varepsilon(n,k)=1$ 知，n，k 奇偶性相同，而上式等号两边奇偶性不同，矛盾。所以假设不成立，定理 8 成立。

定理 9 设 G 是阶 $n\ge k+t$ 的图，其中 k，t 为满足 $k\le t$ 的正整数。设 F 是 G 中 $(k,t,t-k)$-线性森林。如果

(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，$k=1$ 时，

(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，$k\ge 2$ 时，

则对任意 $r\in[\max\{4,k+2t\},n]$，G 中存在长为 r 或 $r+1$ 的圈过 F。

证明 由引理 6 和引理 7 可知，G 中存在长度不超过 $\max\{4,k+2t\}$ 的圈过 F，记为 C_{r_0}。要证明定理 9，只需证明在 $r\ge r_0$ 时，G 中存在长度为 r 或 $r+1$ 的圈过 F。

用归纳法，当 $r=r_0$ 时，G 中有长为 r 的圈过 F，显然成立。

假设结论对给定的 r 成立，下面证对 $r+1$ 也成立，即证 G 中有长度为 $r+1$ 或 $r+2$ 的圈过 F。因为对于给定的 r，有长为 r 或 $r+1$ 的圈过 F。如果存在长为 $r+1$ 的圈过 F，那么得证，如果不存在长为 $r+1$ 的圈过 F，那么存在长为 r 的圈过 F，再由定理 8 可知，一定存在长为 $r+2$ 的圈过 F。故定理得证。

定理 3 的证明 当 $F\ne P_{k+1}\cup(t-1)K_1$ 时，设 G 是含 F 的 n 阶图，$\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$。在 G 中去掉 F 路中的所有内部点，即对于每条长度大于 1 的路，都用一条边将其代替，得到图 G'。设总共去掉了 $k-k'$ 个内部点，使得原线性森林 F 变成了 (k',t)-线性森林 F'，且新得到的线性森林每条路的长都为 0 或 1，也即 $(k',t,t-k')$-线性森林。那么 G' 的阶数变为 $n'=n-(k-k')=n-k+k'$。对于 G' 中的任意两个不相邻点，其度和至多减少 $2(k-k')$，又有 $\varepsilon(n',k')=\varepsilon(n,k)$，所以 $\sigma_2(G')\ge n+k-\varepsilon(n,k)-2(k-k')=n'+k'-\varepsilon(n',k')$。由定理 9 知，对任意 $r'\ge\max\{4,k'+2t\}$ 且 $r'\le n'$，G 中有长为 r' 或 $r'+1$ 的圈过 F'。通过将 G' 中 F' 的每条边换成 G 中对应的路，就可由 G' 中过 F' 的圈得到相应的 G 中过 F 的圈，圈的长度对应变化，故而，对任意 $r\in[\max\{4,k+2t\},n]$，G 中存在长为 r 或 $r+1$

的圈过 F。

当 $F=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$ 时，$\sigma_2(G)\ge n+k$，通过类似的方法去内部点再还原，可得结论仍成立。故得证。

定理 4 的证明 先证情况(i)，$F=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$ 时。如果 G 是完全图，那么对于任意的 (k,t)-线性森林，G 中一定有一个哈密顿圈过这个线性森林。故而假设 G 不是完全图。设 u、v 是 G 中一对不相邻点，$V(H)=V(G)-\{u,v\}$，H 是由 $V(H)$ 导出的 G 的子图。由前边定义有 $E(G)=d_G(u)+d_G(v)+E(H)$。又因为 $E(H)\le(n-2)(n-3)/2$，所以可以得到

$d_G(u)+d_G(v)=E(G)-E(H)\ge(n-1)(n-2)/2+k+2-(n-2)(n-3)/2=n+k$，因此由定理 1 可得，$G$ 是 (k,t)-哈密顿的。

情况(ii)类似，同样通过定理 1 可证，故定理得证。

下面给出一个例子说明定理 2 情况(i)的界是紧的。令 K_{n-1} 是一个完全图，点集 $V(K_{n-1})=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\}$ 外另有一点 v，且 v 与 K_{n-1} 上的 $k+1$ 个点 $v_1,v_2,\cdots,v_{k+1}$ 相邻，由这 n 个点构成的图即为图 G_1。可知 $E(G_1)=(n-1)(n-2)/2+k+1$。取线性森林 $F_1=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$，其中 $P_{k+1}=v_1v_2\cdots v_{k+1}$，同时在 K_{n-1} 中另取 $t-1$ 个其余点。显然，G_1 中没有一个哈密顿圈能包含这个线性森林 F_1。

4. 结语

本文研究了在(i) $\sigma_2(G)\ge n+k$，当 $F=P_{k+1}\cup(t-1)K_1$，(ii) $\sigma_2(G)\ge n+k-\varepsilon(n,k)$，其他情况，这两种条件下，对任意 $r\in[\max\{4,k+2t\},n]$，G 中存在长为 r 或 $r+1$ 的圈过 (k,t)-线性森林的问题，是对 Faudree 提出的过 (k,t)-线性森林的 $(k,t,2t+k)$-泛圈问题新的探索，目前猜想并未被完全证明，仍是比较困难的问题。另一方面，本文从边数的角度给出了图 G 是 (k,t)-哈密顿的一个条件。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. The Macmillan Press Ltd., Great Britain.

[2] Dirac, G.A. (1952) Some Theorems on Abstract Graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3-2**, 69-81. https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69

[3] Ore O. (1960) Note on Hamilton Circuits. *The American Mathematical Monthly*, **67**, 55. https://doi.org/10.2307/2308928

[4] Kronk, H.V. (1969) A Note on K-Path Hamiltonian Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **7**, 104-106. https://doi.org/10.1016/S0021-9800(69)80043-8

[5] Faudree, R.J., Gould, R.J. and Jacobson, M.S. (2009) Pancyclic Graphs and Linear Forests. *Discrete Mathematics*, **309**, 1178-1189. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.094

[6] 何剑. 度条件与过线性森林的圈[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2009.