

# 变分数阶随机微分方程的Euler-Maruyama方法

王笑涵\*, 袁晗雯, 宋雨晨, 孙雯, 霍振阳

扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州

收稿日期: 2022年12月12日; 录用日期: 2023年1月5日; 发布日期: 2023年1月13日

## 摘要

本文对一类变分数阶随机微分方程初值问题构造了一个Euler-Maruyama (EM)数值方法, 并分析了该EM方法的稳定性和强收敛性。最后, 通过两个数值算例来验证了理论分析结果的正确性。

## 关键词

变分数阶积分, 分数阶随机微分方程, Euler-Maruyama方法, 误差估计

# An Euler-Maruyama Method for Variable-Order Fractional Stochastic Differential Equations

Xiaohan Wang\*, Hanwen Yuan, Yuchen Song, Wen Sun, Zhenyang Huo

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Received: Dec. 12<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jan. 5<sup>th</sup>, 2023; published: Jan. 13<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

This paper constructs an Euler-Maruyama (EM) method for a kind of variable-order fractional stochastic differential equations with an initial condition, and analyzes the stability and strong convergence of the presented EM method. Finally, two numerical examples are given to verify the correctness of the theoretical results.

\*通讯作者。

文章引用: 王笑涵, 袁晗雯, 宋雨晨, 孙雯, 霍振阳. 变分数阶随机微分方程的 Euler-Maruyama 方法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 37-45. DOI: 10.12677/aam.2023.121006

## Keywords

Variable-Order Fractional Integral, Fractional Stochastic Differential Equations, Euler-Maruyama Method, Error Estimate

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近年来, 带有噪声项的分数阶微分方程开始引起广大科技工作者的关注[1] [2] [3]。但是, 这类方程的解析解几乎是无法获得的。因此, 数值求解这类方程就显得尤为重要。毛文亭等在 2018 年对一类带乘性噪声分数阶随机微分方程给出了数值方法, 并分析了该数值方法的弱稳定性和弱收敛性[4]。Doan 等人于 2019 年提出了一个 Euler-Maruyama (EM)方法, 用以解决分数阶指标  $\alpha \in (0.5, 1)$  时带有乘性白噪声分数阶随机微分方程的初值问题[5]。Huang 等人于 2022 年对多项分数阶随机微分方程构造了一个 EM 格式, 并给出了该格式的快速计算方法[6]。

变分数阶随机微分方程是分数阶随机微分方程的一个全新研究方向[7] [8]。在对长时间的粘弹性行为建模时, 可变的阶数可以更准确地描述初始时间点附近的弹性行为。Yang 等人首次将 EM 方法应用于计算带有乘性白噪声的变分数阶随机微分方程, 并证明了该方法的强收敛性[9]。本文将在[9]的基础上, 为以下变分数阶随机微分方程构造一个 EM 方法, 并进行相应的数值分析

$$u'(t) = cI_{0,t}^{\alpha(t)}u(t) + f(t, u(t)) + g(t, u(t))\frac{dW_t}{dt}, \quad t \in (0, T] \quad (1)$$

初值  $u(0) = u_0$ ,  $c \geq 0$  为一个固定常数。  $I_{0,t}^{\alpha(t)}u(t)$  为变分数阶积分算子[10], 定义如下:

$$I_{0,t}^{\alpha(t)}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha(t)}} ds.$$

$(W_t)_{t \in [0, \infty)}$  是一个在完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}, \mathbb{P})$  上的标准布朗运动。

## 2. 假设及 EM 方法的构造

为了确保方程(1)的解的适定性, 以及数值理论分析的需要, 给出下面 3 个假设:

(A) 方程的漂移项和扩散项在  $\mathbb{R}^d$  上满足 Lipschitz 条件: 存在  $L > 0$  对所有  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in [0, T]$  都有

$$|f(t, x) - f(t, y)| \vee |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y|.$$

(B) 线性增长条件: 存在  $L > 0$  使得对  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in [0, T]$  都有

$$|f(t, x)| \vee |g(t, x)| \leq L(1 + |x|).$$

(C)  $\alpha \in C^1[0, T]$ , 即  $\alpha(t)$  在区间  $[0, T]$  上连续可微。且存在  $0 < \alpha(t) < \alpha^* < 1$ , 对于  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ , 都有  $\alpha^* + \alpha(t) > 1$ 。

下面, 为了构造方程(1)的 EM 方法, 我们先将方程(1)转化为其等价的积分形式。对(1)式两边同时做从 0 到  $t$  的积分, 可以得到

$$u(t) = u(0) + c \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s \frac{u(y)}{(s-y)^{1-\alpha(s)}} dy ds + \int_0^t f(s, u(s)) ds + \int_0^t g(s, u(s)) dW_s. \quad (2)$$

对于上式右侧的二重积分，调换积分次序，可得

$$\int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s \frac{u(y)}{(s-y)^{1-\alpha(s)}} dy ds = \int_0^t u(s) \int_s^t \frac{(y-s)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy ds.$$

并令  $k(t, s) = c \int_s^t \frac{(y-s)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy$ ，则(2)式可以写成

$$u(t) = u(0) + \int_0^t k(t, s) u(s) ds + \int_0^t f(s, u(s)) ds + \int_0^t g(s, u(s)) dW_s. \quad (3)$$

在区间  $[0, T]$  上定义均匀网格的步长  $\tau = T/N$ ，这里  $N$  为正整数。在网格节点  $t_n = n\tau$  处，使用矩形方法来离散(3)式等号右侧的积分项。

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} u(s) \int_s^{t_n} \frac{(y-s)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy ds &= \tau \sum_{j=0}^{n-1} u_j \int_{t_j}^{t_n} \frac{(y-t_j)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy + O(\tau) \\ &= \tau \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{i=j}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(y-t_j)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy + O(\tau) \\ &= \tau \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{i=j}^{n-1} \frac{(t_{i+1}-t_j)^{\alpha(t_i)} - (t_i-t_j)^{\alpha(t_i)}}{\alpha(t_i) \Gamma(\alpha(t_i))} + O(\tau) \\ &= \tau \sum_{j=0}^{n-1} u_j \sum_{i=j}^{n-1} \frac{(t_{i+1}-t_j)^{\alpha(t_i)} - (t_i-t_j)^{\alpha(t_i)}}{\Gamma(\alpha(t_i)+1)} + O(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

接下来对第三项和第四项进行离散，可得

$$\int_0^t f(s, u(s)) ds = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, u(s)) ds \approx \tau \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j, u(t_j)). \quad (5)$$

和

$$\int_0^t g(s, u(s)) ds = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s, u(s)) dW_s \approx \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j, u(t_j)) \Delta W_j. \quad (6)$$

其中， $\Delta W_j = W(t_{j+1}) - W(t_j) \sim N(0, \tau)$ 。

把(4)~(6)式代入(3)式中就可以得出方程(2)的 EM 方法。设  $1 \leq n \leq N$  时，存在  $v_n$  使得

$$v_n = u_0 + \tau \sum_{j=0}^{n-1} v_j \sum_{i=j}^{n-1} b_{n,j} + \tau \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j, v_j) + \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j, v_j) \Delta W_j. \quad (7)$$

其中， $b_{n,j} = c \frac{(t_{i+1}-t_j)^{\alpha(t_i)} - (t_i-t_j)^{\alpha(t_i)}}{\Gamma(\alpha(t_i)+1)}$ 。这里  $v_n$  即为  $u(t_n)$  的 EM 方法数值解。

### 3. EM 方法的数值理论分析

下面，先给出 EM 方法(7)的稳定性。

**定理 1** 对于  $1 \leq n \leq N$ ，EM 方法(7)的解  $v_n$  满足如下矩估计

$$\mathbb{E}[v_n^2] \leq M_1, \tag{8}$$

其中

$$M_1 = Q_1 \left[ 1 + E_{1-\alpha^*} \left( Q_2 \Gamma(1-\alpha^*) \right) \right], \quad Q_1 = 4\mathbb{E}[u_0^2] + 8L^2T(T+1), \tag{9}$$

$$Q_2 = 8L^2T(T+1) + 4T^{3-\alpha^*}AQ_3.$$

证明. 由 Jensen 不等式和 Cauchy 不等式可以推出

$$\mathbb{E}[v_n^2] \leq 4\mathbb{E}[u_0^2] + 4\tau^2 \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j} v_j \right)^2 \right] + 4\tau^2 \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j, v_j) \right)^2 \right] + 4\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j, v_j) \Delta W_j \right)^2 \right], \tag{10}$$

其中,  $B_{n,j} = \sum_{i=j}^{n-1} b_{n,j}$ 。使用 Cauchy 不等式和线性增长条件, 有

$$\tau^2 \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j, v_j) \right)^2 \right] \leq 2L^2T\tau \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[1+v_j^2] \leq 2L^2T^2 + 2L^2T\tau \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[v_j^2]. \tag{11}$$

根据 Itô 等距定理和线性增长条件可以推出

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j, v_j) \Delta W_j \right)^2 \right] = \tau \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [g(t_j, v_j)^2] \leq 2L^2\tau \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[1+v_j^2] \leq 2L^2T + 2L^2\tau \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[v_j^2]. \tag{12}$$

下面来计算(10)式第二项的估计值, 使用微分中值定理, 可以得到

$$B_{n,j} = \sum_{i=j}^{n-1} b_{n,j} = c \sum_{i=j}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_j)^{\alpha_i} - (t_i - t_j)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \tag{13}$$

$$\leq cQ_3 (t_n - t_j)^{1-\alpha^*} = cQ_3 (n-j)^{1-\alpha^*} \left( \frac{T}{N} \right)^{1-\alpha^*},$$

其中,  $Q_3 = \max \left\{ 1, T^{2\alpha^*-1} \right\} / (1-\alpha^*)$ 。注意到

$$|k(t,s)| = \left| c \int_s^t \frac{(y-s)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy \right| = \left| c \int_s^t \frac{(y-s)^{\alpha(y)+\alpha^*-1}}{\Gamma(\alpha(y))\alpha^*} dy \right| \leq cQ_3 (t-s)^{1-\alpha^*}, \tag{14}$$

再结合(4)式, 有

$$\sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j} \leq c \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-y)^{\alpha(s)-1} dy ds = c \int_0^t \frac{s^{\alpha(s)}}{\Gamma(\alpha(s)+1)} ds \leq A, \tag{15}$$

其中,  $A = c \cdot \max \left\{ T, \frac{T^{1+\alpha^*}}{1+\alpha^*} \right\}$ 。因此, 可知第二项可以放缩为

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j} v_j \right)^2 \right] \leq \sum_{j=0}^{n-1} |B_{n,j}| \mathbb{E}[v_j^2] \sum_{j=0}^{n-1} |B_{n,j}| \tag{16}$$

$$\leq \frac{T^{1-\alpha^*}AQ_3}{N^{1-\alpha^*}} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[v_j^2] (n-j)^{1-\alpha^*}$$

$$\leq T^{1-\alpha^*}AQ_3N^{\alpha^*} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[v_j^2]}{(n-j)^{\alpha^*}}.$$

把(11), (12)和(16)式代入(10)式中, 可以得出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v_n^2] &\leq 4\mathbb{E}[u_0^2] + 8L^2T(T+1) + 8L^2(T+1)\tau \sum_{i=j}^{n-1} \mathbb{E}[v_j^2] + 4T^{3-\alpha^*}AQ_3N^{\alpha^*-2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[v_j^2]}{(n-j)^{\alpha^*}} \\ &\leq Q_1 + \frac{Q_2}{N^{1-\alpha^*}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[v_j^2]}{(n-j)^{\alpha^*}},\end{aligned}$$

其中  $Q_1$  和  $Q_2$  已在(9)式中给出. 根据 Gronwall 不等式, 定理得证.

为了分析 EM 方法(7)的强收敛性, 我们这里先把(7)改写成与之等价的连续形式, 即有, 令步长公式  $\hat{s} = \hat{s}(s)$  在每一个小区间  $s \in [t_n, t_{n+1})$  上满足  $\hat{s} = t_n$

$$v(t) = u_0 + \int_0^t k(t, s)v(\hat{s})ds + \int_0^t f(s, v(\hat{s}))ds + \int_0^t g(s, v(\hat{s}))dW_s. \quad (17)$$

显然, 从(17)可知

**引理 1** 设  $\{v_n\}_{n=0}^N$  是 EM 方法(7)的解,  $v(t)$  是(17)式给出的时间连续随机过程. 那么, 当  $0 \leq n \leq N$  时有  $v(t_n) = v_n$ .

**引理 2** 当  $0 \leq n \leq N-1$  时, 对任意  $t \in [t_n, t_{n+1})$ , 连续随机过程  $v(t)$  具有如下的广义连续性

$$\mathbb{E}[(v(t) - v(t_n))^2] \leq M_2\tau^{2(2-\alpha^*)} + M_3\tau, \quad (18)$$

其中

$$M_2 = 6c^2M_1Q_3^2 \left(1 + \frac{1}{(2-\alpha^*)^2}\right) \tau^{2(2-\alpha^*)}, \quad M_3 = 12L^2(1+M_1). \quad (19)$$

**证明.**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(v(t) - v(t_n))^2] &\leq 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t k(t, s)v(\hat{s})ds - \int_0^{t_n} k(t_n, s)v(\hat{s})ds\right)^2\right] \\ &\quad + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s, v(\hat{s}))ds - \int_0^{t_n} f(s, v(\hat{s}))ds\right)^2\right] \\ &\quad + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t g(s, v(\hat{s}))dW_s - \int_0^{t_n} g(s, v(\hat{s}))dW_s\right)^2\right] \\ &\leq 6\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_n} (k(t, s) - k(t_n, s))v(\hat{s})ds\right)^2\right] + 6\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^t k(t, s)v(\hat{s})ds\right)^2\right] \\ &\quad + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^t f(s, v(\hat{s}))ds\right)^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^t g(s, v(\hat{s}))dW_s\right)^2\right].\end{aligned} \quad (20)$$

由定理 1 和线性增长条件可知

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^t f(s, v(\hat{s}))ds\right)^2\right] \leq \tau \int_{t_n}^t \mathbb{E}[f(s, v(\hat{s}))^2]ds \leq 2L^2\tau \int_{t_n}^t (1 + \mathbb{E}[v_n^2])ds \leq 2L^2(1+M_1)\tau^2. \quad (21)$$

通过 Itô 等距和线性增长条件可知

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^t g(s, v(\hat{s}))dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t_n}^t g(s, v(\hat{s}))^2 ds\right] \leq 2L^2(1+M_1)\tau. \quad (22)$$

下面重点考虑(20)式的前两项，对第二项使用 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_n}^t k(t,s)v(\hat{s}) ds \right)^2 \right] &\leq \int_{t_n}^t |k(t,s)| \mathbb{E} [v(\hat{s})]^2 ds \int_{t_n}^t |k(t,s)| ds \\ &\leq M_1 \left( \int_{t_n}^t |k(t,s)| ds \right)^2 \\ &\leq \frac{c^2 Q_3^2 M_1 \tau^{2(2-\alpha^*)}}{(2-\alpha^*)^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

对于第一项有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^{t_n} (k(t,s) - k(t_n,s))v(\hat{s}) ds \right)^2 \right] &\leq \int_{t_n}^t |k(t,s) - k(t_n,s)| \mathbb{E} [v(\hat{s})]^2 ds \int_{t_n}^t |k(t,s) - k(t_n,s)| ds \\ &\leq M_1 \left( \int_0^{t_n} (k(t,s) - k(t_n,s)) ds \right)^2 \\ &\leq M_1 \left( c \int_0^{t_n} \left| \int_{t_n}^t \frac{(y-s)^{\alpha(y)-1}}{\Gamma(\alpha(y))} dy \right| ds \right)^2 \\ &\leq c^2 M_1 \left( \int_0^{t_n} Q_2 \left[ (t-s)^{1-\alpha^*} - (t_n-s)^{1-\alpha^*} \right] ds \right)^2 \\ &\leq c^2 M_1 Q_3^2 \tau^{2(2-\alpha^*)}. \end{aligned} \tag{24}$$

把(21)~(24)式代入(20)式，则引理 2 得证。

下面，给出 EM 方法(7)的强收敛性结论。

**定理 2** 设  $u(t)$  是方程(1)的精确解， $v(t)$  是(17)的解，则下式成立

$$\max_{t \in [0,T]} \mathbb{E} \left[ |u(t) - v(t)|^2 \right] \leq M_4 \tau^{2(2-\alpha^*)} + M_5 \tau. \tag{25}$$

其中， $M_4$  和  $M_5$  定义如下

$$\begin{aligned} M_4 &= Q_5 E_{1-\alpha^*} \left( Q_6 \Gamma(1-\alpha^*) T^{1-\alpha^*} \right) M_2, \\ M_5 &= Q_5 E_{1-\alpha^*} \left( Q_6 \Gamma(1-\alpha^*) T^{1-\alpha^*} \right) M_3, \\ Q_5 &= 6TL^2 (T+1) + \frac{6c^2 Q_3^2 T^{2(2-\alpha^*)}}{(2-\alpha^*)^2}, \\ Q_6 &= 6T^{\alpha^*} L^2 (T+1) + \frac{6c^2 Q_3^2 T^{3-\alpha^*}}{2-\alpha^*}. \end{aligned} \tag{26}$$

那么，以下关于 EM 方法(7)的误差估计也成立

$$\max_{t \in [0,T]} \mathbb{E} \left[ |u(t_n) - v_n|^2 \right] \leq M_4 \tau^{2(2-\alpha^*)} + M_5 \tau. \tag{27}$$

**证明.** 对任意  $t \in [0, T)$ ，设  $t \in [t_n, t_{n+1})$ ， $0 \leq n \leq N-1$ 。用(2)式减(17)式，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|u(t)-v(t)|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t k(t,s)(u(s)-v(\hat{s}))ds\right)^2\right] \\
&\quad + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s,u(s))-f(s,v(\hat{s}))ds\right)^2\right] \\
&\quad + 3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t g(s,u(s))-g(s,v(\hat{s}))dW_s\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^3 I_k.
\end{aligned} \tag{28}$$

对  $I_2$  使用 Cauchy 不等式, 根据线性增长条件和引理 2, 可以得出

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 3TL^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[|u(s)-v(\hat{s})|^2\right] ds \\
&\leq 6TL^2 \int_0^t \left(\mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right] + \mathbb{E}\left[|v(s)-v(\hat{s})|^2\right]\right) ds \\
&\leq 6TL^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right] ds + 6T^2L^2 \left(M_2\tau^{2(2-\alpha^*)} + M_3\tau\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

对  $I_3$  使用 Itô 等距引理, 根据线性增长条件和引理 2, 可以得出

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 3L^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[|u(s)-v(\hat{s})|^2\right] ds \\
&\leq 6L^2 \int_0^t \left(\mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right] + \mathbb{E}\left[|v(s)-v(\hat{s})|^2\right]\right) ds \\
&\leq 6L^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right] ds + 6TL^2 \left(M_2\tau^{2(2-\alpha^*)} + M_3\tau\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

下面用类似的方法处理  $I_1$ , 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 6\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t k(t,s)(u(s)-v(s))ds\right)^2\right] + 6\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t k(t,s)(v(s)-v(\hat{s}))ds\right)^2\right] \\
&= I_{1,1} + I_{1,2}.
\end{aligned} \tag{31}$$

对  $I_{1,1}$  使用 Cauchy 不等式, 由(14)式可以推出

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &\leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right] |k(t,s)| ds \int_0^t |k(t,s)| ds \\
&\leq \frac{6c^2Q_3^2T^{2-\alpha^*}}{2-\alpha^*} \int_0^t \mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right] (t-s)^{1-\alpha^*} ds \\
&\leq \frac{6c^2Q_3^2T^{3-\alpha^*}}{2-\alpha^*} \int_0^t \frac{\mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right]}{(t-s)^{\alpha^*}} ds.
\end{aligned} \tag{32}$$

对  $I_{1,2}$  使用 Cauchy 不等式, 根据引理 2, 可以推出

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &\leq 6\int_0^t \mathbb{E}\left[|v(s)-v(\hat{s})|^2\right] |k(t,s)| ds \int_0^t |k(t,s)| ds \\
&\leq \frac{6c^2Q_3^2T^{2(2-\alpha^*)}}{(2-\alpha^*)^2} \left(M_2\tau^{2(2-\alpha^*)} + M_3\tau\right).
\end{aligned} \tag{33}$$

把(29)~(33)式代入(28)式中, 可得

$$\mathbb{E}\left[|u(t)-v(t)|^2\right] \leq Q_5\left(M_2\tau^{2(2-\alpha^*)} + M_3\tau\right) + Q_6 \int_0^t \frac{\mathbb{E}\left[|u(s)-v(s)|^2\right]}{(t-s)^{\alpha^*}} ds.$$

其中,  $Q_5$  和  $Q_6$  已在(17)式和(26)式中给出。

根据广义 Gronwall 不等式, (25)式得证。如果令(25)式中的  $t = t_n$ , 根据引理 1 可知:  $v(t_n) = v_n$ 。此时(25)式就可以转变成(27)式。定理证毕。

注: 在(27)式中, 由于  $(2-\alpha^*) > 0.5$ , 因此 EM 方法(7)式的强收敛阶恒为 0.5。

### 4. 数值实验

本节将用数值算例来验证 EM 方法(7)的强收敛性。以下一切计算通过 MATLAB (R2017b)在一台拥有 Intel(R)Core(TM)i7-5500U, CPU2.40 GHz 和 4G RAM 的笔记本电脑上完成。设  $u(t_n, \omega_j)$  是方程(1)的第  $j$  条样本轨道在  $t_n$  处的真实解,  $v_n(\omega_j)$  是对应的 EM 方法(7)得到的数值解, 其中  $n = 0, \dots, N, j = 1, \dots, M$ 。误差的计算方法如下

$$e_\tau = \max_{0 \leq n \leq N} \left[ \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |u(t_n, \omega_j) - v_n(\omega_j)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq PN^{-\kappa},$$

其中收敛阶由  $\kappa = \log_2 e_\tau / e_{\tau/2}$  计算获得。在数值实验中, 设时间区间  $[0, T] = [0, 1]$ , 常数  $c = 1$ , 样本轨道总数  $M = 1000$ , 以网格数  $N = 512$  时的数值解近似表示精确解, 变数阶  $\alpha$  按如下函数来给出

$$\alpha(t) = \alpha(1) + (\alpha(0) - \alpha(1)) \left( (1-t) - \frac{\sin(2\pi(1-t))}{2\pi} \right).$$

**例 1** 考虑一个线性的变分数阶随机微分方程, 令方程(1)中  $f(t, u) = g(t, u) = u$ , 初值  $u_0 = 0.1$ 。计算误差和收敛阶见表 1。

**Table 1.** Error and convergence order of EM method for linear variable fractional stochastic differential equation in example 1  
**表 1.** 例 1 中线性变分数阶随机微分方程 EM 方法的误差和收敛阶

$n$	$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.9$		$\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.8$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.3976		0.4764	
16	0.3093	0.3623	0.3709	0.3610
32	0.2253	0.4568	0.2698	0.4591
64	0.1525	0.5630	0.1823	0.5661

从表 1 中可以看出: EM 方法的强收敛阶是 0.5, 符合定理 2 的结论。

**例 2** 考虑一个非线性线性的变分数阶随机微分方程, 令方程(1)中  $f(t, u) = g(t, u) = \cos(u)$ , 初值  $u_0 = 0.1$ 。计算误差和收敛阶见表 2。



**Table 2.** Error and convergence order of EM method for nonlinear fractional stochastic differential equations in example 2  
**表 2.** 例 2 中非线性变分数阶随机微分方程 EM 方法的误差和收敛阶

$n$	$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.9$		$\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.8$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.3617		0.3623	
16	0.2434	0.57	0.2436	0.57
32	0.1670	0.54	0.1670	0.54
64	0.1188	0.49	0.1188	0.49

在这个算例中, 尽管方程由上例的线性变为非线性, 但 EM 方法的强收敛阶仍是 0.5, 再次说明定理 2 的理论结果是正确的。

## 5. 总结

在本文中, 我们给出了一类变分数阶随机微分方程的 EM 方法, 证明了该 EM 方法的稳定性和强收敛性, 并给出了其强收敛阶为 0.5。最后用两个数值算例验证了 EM 方法强收敛阶的正确性。

## 基金项目

扬州大学大学生科创基金项目(X20220218)和江苏高校品牌专业建设工程资助项目(数学与应用数学, PPZY2015B109)。

## 参考文献

- [1] Pedjeu, J.C. and Ladde, G.S. (2012) Stochastic Fractional Differential Equations: Modeling, Method and Analysis. *Chaos, Solitons and Fractals*, **45**, 279-293. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2011.12.009>
- [2] Li, L., Liu, J.G. and Lu, J.F. (2017) Fractional Stochastic Differential Equations Satisfying Fluctuation-Dissipation Theorem. *Journal of Statistical Physics*, **169**, 316-339. <https://doi.org/10.1007/s10955-017-1866-z>
- [3] Sakthivel, R., Revathi, P. and Ren, Y. (2013) Existence of Solutions for Nonlinear Fractional Stochastic Differential Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **81**, 70-86. <https://doi.org/10.1016/j.na.2012.10.009>
- [4] 毛文亭, 张维, 王文强. 一类带乘性噪声分数阶随机微分方程数值方法的弱收敛性与弱稳定性[J]. 计算数学, 2018, 39(3): 161-171.
- [5] Doan, T.S., Huong, P.T., Kloeden, P.E. and Vu, A.M. (2020) Euler-Maruyama Scheme for Caputo Stochastic Fractional Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **380**, 112989. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112989>
- [6] Huang, J.F., Huo, Z.Y., Zhang, J.N. and Tang, Y.F. (2022) An Euler-Maruyama Method and Its Fast Implementation for Multiterm Fractional Stochastic Differential Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 159-173. <https://doi.org/10.22541/au.165061084.49772841/v1>
- [7] Wang, H. and Zheng, X. (2019) Wellposedness and Regularity of the Variable-Order Time-Fractional Diffusion Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **475**, 1778-1802. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.03.052>
- [8] Zheng, X.C., Zhang, Z.Q. and Wang, H. (2020) Analysis of a Nonlinear Variable-Order Fractional Stochastic Differential Equation. *Applied Mathematics Letters*, **107**, 106461. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106461>
- [9] Yang, Z.W., Zheng, X.C. and Zhang, Z.Q. (2021) Strong Convergence of a Euler-Maruyama Scheme to a Variable-Order Fractional Stochastic Differential Equation Driven by a Multiplicative White Noise. *Chaos, Solitons and Fractals*, **142**, 110392. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110392>
- [10] Sun, H., Chang, A., Zhang, Y. and Chen, W. (2019) A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **22**, 27-59. <https://doi.org/10.1515/fca-2019-0003>