Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(1), 166-172
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121020

Hans汉斯

构造奇数阶幻方的杨辉口诀法

朱雅妮[*]，**刘兴祥**[#]，**张宇婷**[#]

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月21日；发布日期：2023年1月30日

摘 要

幻方在中国起源很早，最初是与河图与洛书相关联，后来古人称为九宫算或纵横图，它是最早发现的著名组合算题。在杨辉口诀法的基础上，通过对构造出的具体的奇数阶幻方的构造规律进行探寻，结合幻方矩阵化的思路及分块矩阵这个工具给出奇数阶幻方构造的通法，并且将杨辉口诀法进行推广应用于全体奇数阶幻方的构造上。

关键词

和幻方，奇数阶幻方，分块矩阵，杨辉口诀法

Yang Hui's Formula Method for Constructing Magic Squares of Odd Order

Yani Zhu[*], **Xingxiang Liu**[#], **Yuting Zhang**[#]

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 21st, 2023; published: Jan. 30th, 2023

Abstract

Magic square has a very early origin in China. It was originally associated with river diagrams and Luoshu, and later it was called Jiugong calculation or vertical and horizontal diagram in ancient people. It is the earliest discovery of the famous combinatorial problem. On the basis of Yang Hui Formula method, this paper explores the construction law of odd order magic squares, combines the idea of magic square matrix and the tool of block matrix to give the general method of the construction of odd order magic squares, and generalizes Yang Hui Formula method to the construction of all odd order magic squares.

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用：朱雅妮，刘兴祥，张宇婷．构造奇数阶幻方的杨辉口诀法[J]．应用数学进展, 2023, 12(1): 166-172.
DOI: 10.12677/aam.2023.121020

Keywords

Sum Magic Square, Magic Square of Odd Order, Block Matrix, Yang Hui Formula Method

1. 引言

幻方起源于《周易》之河图、洛书与八卦，古称九宫算，是我国先祖最早发现的一个著名组合算题，是将从 1 到 n^2 的自然数排成纵横各为 n 个数的正方形，使在同一行、同一列和同一对角线上的几个数的和都相等，文献[1]-[8]是关于幻方的研究成果。十三世纪，中国南宋数学家杨辉在世界上首先开展了对纵横图的系统研究，欧洲十四世纪也开始了对幻方的工作。如今，幻方仍然是组合数学的研究课题之一，经过一代代数学家与数学爱好者的共同努力，幻方与它的变体所蕴含的各种神奇的科学性质正逐步得到揭示，文献[9] [10] [11]系统地介绍了现代矩阵理论与应用的基本内容。

将矩阵和幻方结合起来，主要研究奇数阶幻方的构造规律，将杨辉口诀从 3 阶幻方推广到了所有奇数阶幻方上，通过推广的杨辉口诀法给出一种矩阵化方法构造幻方，利用矩阵的各类运算解决幻方难题，不仅可以对矩阵的知识有更加深入的了解和学习，还能让更多的人对数学研究产生浓厚的兴趣。

2. 预备知识

定义 1 [1]设 F 是数域，矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(B_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，称矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}b_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$ 为数域 F 上矩阵 A 与矩阵 B 的 Hadamard 积，记为 $C=A\circ B$。

定义 2 [2]设 F 是数域，矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in F^{m\times m}$，若矩阵 A 满足

① $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 有 $e_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A\circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}=S_r$；

② $\forall j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 有 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A\circ E_{ij}(m,m)\right)\right)e_j=S_c$；

③ $$S_r=S_c=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A\circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A\circ E_{i,m+1-i}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}=S；$$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶和幻方，并称 S 为 m 阶和幻方 A 的幻和。

定义 3 [2]设 F 是数域，若矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}\in\left\{1,2,\cdots,m^2\right\}^{m\times m}$ 满足

① $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}$ 有 $e_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1} = S_r$；

② $\forall j \in \{1,2,\cdots,m\}$ 有 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)e_j = S_c$；

③ $$S_r = S_c = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A \circ E_{i,m+1-i}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1} = S；$$

④ 当 $i \neq j$ 或 $k \neq l$ 时，$\forall i,j,k,l = 1,2,\cdots,m$，均有 $a_{ij} \neq a_{kl}$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶始元和幻方，并称 S 为 m 阶始元和幻方 A 的幻和。

定义 4 [2]设 F 是数域，若矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times m} \in \left\{a+1, a+2, \cdots, a+m^2\right\}^{m\times m}, a \in Z$ 满足

① $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}$ 有 $e_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1} = S_r$；

② $\forall j \in \{1,2,\cdots,m\}$ 有 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)e_j = S_c$；

③ $$S_r = S_c = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A \circ E_{i,m+1-i}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1} = S；$$

④ 当 $i \neq j$ 或 $k \neq l$ 时，$\forall i,j,k,l = 1,2,\cdots,m$，均有 $a_{ij} \neq a_{kl}$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶连元和幻方，并称 S 为 m 阶连元和幻方 A 的幻和。

定义 5 [2]设 F 是数域，矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times m}$，若矩阵 A 满足

① $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}$ 有 $e_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A \circ E_{ij}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1} = S_r$；

② $\forall j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 有 $(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)_{1\times m}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A\circ E_{ij}(m,m)\right)\right)e_j=S_c$；

③ $$S_r=S_c=(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A\circ E_{ii}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$=(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)_{1\times m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(A\circ E_{i,m+1-i}(m,m)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times 1}=S；$$

④ 当 $i\neq j$ 或 $k\neq l$ 时，$\forall i,j,k,l=1,2,\cdots,m$，均有 $a_{ij}\neq a_{kl}$

则称矩阵 A 为数域 F 上的 m 阶异元和幻方，并称 S 为 m 阶异元和幻方 A 的幻和。

3. 推广的杨辉口诀法

我国南宋时期的数学教育家杨辉构造三阶幻方时，有杨辉口诀：

“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺进。”即在 3 阶自然方阵上，只移动上下、左右 4 个数就变成了一幅 3 阶幻方。

将杨辉口诀法推广到所有奇数阶幻方上，则幻方构造规律的分块矩阵化可以用杨辉口诀法描述为：

从 1 至 $(2n+1)^2$ 共有 $(2n+1)^2$，依等分分为 $2n+1$ 段，每段数组均斜排，或从上中到右中，或从右中到下中，或从下中到左中，或从左中到上中，或从上中到左中，或从左中到下中，或从下中到右中，或从右中到上中；数字排完分九块，先从上下再左右，数 $n\times n$ 无，$n\times(2n+1)$ 有，$n\times n$ 无，$(2n+1)\times n$、$(2n+1)\times(2n+1)$、$(2n+1)\times n$ 皆有数，数 $n\times n$ 无，$n\times(2n+1)$ 有，$n\times n$ 无(见表 1)，数块运行按方向，左块向右右块左，上块向下下块上，各块均行 $2n+1$ 格，块运行完成幻方。

Table 1. Block matrix of magic squares of odd order
表 1. 奇数阶幻方的分块矩阵

$n\times n$	$n\times(2n+1)$	$n\times n$
$(2n+1)\times n$	$(2n+1)\times(2n+1)$	$(2n+1)\times n$
$n\times n$	$n\times(2n+1)$	$n\times n$

可以简化为变形的杨辉口诀：

$(2n+1)^2$ 个数斜排，或上中右中，或右中下中，或下中左中，或左中上中，或上中左中，或左中下中，或下中右中，或右中上中，块上下对易，块左右相更，各平移 $2n+1$ 格，运行成幻方。

进而得到同于杨辉口诀的口诀，即推广的杨辉口诀法：

$(2n+1)^2$ 个数斜排，块上下对易，块左右相更，各平移 $2n+1$ 格，运行成幻方。

4. 主要结果

将推广的杨辉口诀法用矩阵化方法表示出来，利用矩阵的运算解决奇数阶幻方问题。

定理 1 首先构造 $4n+1$ 阶矩阵 $M=\left(m_{ij}\right)_{(4n+1)\times(4n+1)}\left(i,j=1,2,\cdots,4n+1\right)$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}\left(\dfrac{i+j-2n}{2}-1\right)\cdot 2n+j, & \dfrac{i+j-2n}{2}\in Z^{*}\text{且}\dfrac{i+j-2n}{2}\le i,j\le 2n+\dfrac{i+j-2n}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其次将矩阵 M 分块为

$$M=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & A_{n\times(2n+1)} & 0_{n\times n}\\ B_{(2n+1)\times n} & T_{(2n+1)\times(2n+1)} & C_{(2n+1)\times n}\\ 0_{n\times n} & D_{n\times(2n+1)} & 0_{n\times n}\end{bmatrix}$$

再次根据 M 中的子矩阵 T，利用分块矩阵的加法得矩阵 H，

$$H=T+\begin{bmatrix}0_{(2n+1)\times(n+1)} & B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C & 0_{(2n+1)\times(n+1)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0_{(n+1)\times(2n+1)}\\ A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D\\ 0_{(n+1)\times(2n+1)}\end{bmatrix}$$

则矩阵 H 为通过矩阵化方法构造得出的 $2n+1$ 阶始元和幻方。

证明：为证明构造好的矩阵 H 每行元素相加之和相等，即证明调整元素前的矩阵 M 的 i_M 行和 $2n+1+i_M$ 行的每个元素相加之和相等 $(i=1,2,\cdots,2n+1)$，矩阵 M 与矩阵 H 对应行元素关系如下(i_M 为矩阵 M 的第 i 行的标号，i_H 为矩阵 H 的第 i 行的标号)：

当 $i_M\le n, i_H=i_M+n+1$，

当 $n<i_M\le 2n, i_H=i_M-n$，

当 $i_M=2n+1, i_H=n+1$；

为证明构造好的矩阵 H 每列元素相加之和相等，即证明调整元素前的矩阵 M 的 j_M 列和 $2n+1+j_M$ 列的每个元素相加之和相等($j=1,2,\cdots,2n+1$)，矩阵 M 与矩阵 H 对应列元素关系如下(j_M 为矩阵 M 的第 j 行的标号，j_H 为矩阵 H 的第 j 行的标号)：

当 $j_M\le n, j_H=j_M+n+1$，

当 $n<j_M\le 2n, j_H=j_M-n$，

当 $j_M=2n+1, j_H=n+1$。

以下计算同一行、同一列和同一对角线上的几个数的和：

可以看出，矩阵 M 每行、每列元素都为等差数列。

1) 行和

每行元素的公差 $d_1=2n+2$，

第 i_M $(i_M=1,2,\cdots,2n+1)$ 行元素规律：通过观察得矩阵 M 中第 i_M 行含有 i_M 个数字，即每一行项数 $x_1=i_M$，每一行首项 $a_1=2n+2-i_M$，

所以第 i_M 行和为 $s=x_1a_1+\dfrac{x_1(x_1-1)}{2}d_1=ni_M^2+ni_M+i_M$。

第 $2n+1+i_M$ $(i_M=1,2,\cdots,2n)$ 行元素规律：通过观察得矩阵 M 第 $2n+1+i_M$ 行含有 $2n+1-i_M$ 个数字，即项数 $y_1=2n+1-i_M$，每一行首项 $a_1'=(2n+1)i_M+1$，

所以第 i_M+2n+1 行和为 $s'=y_1a_1'+\dfrac{y_1(y_1-1)}{2}d_1=4n^3+6n^2+4n+1-ni_M^2-ni_M-i_M$。

将调整元素前的矩阵 M 的 i_M 行和 i_M+2n+1 行的每个元素相加，其和即为造好的矩阵 H 第 i_H 行元素之和 S_r：

$$S_r=s+s'=4n^3+6n^2+4n+1$$

2) 列和

每列元素的公差 $d_2 = 2n$

第 $j_M\left(j_M = 1,2,\cdots,2n+1\right)$ 列元素规律：通过观察得矩阵 M 第 j_M 列含有 j_M 个数字，即项数 $x_2 = j_M$，每一列首项 $a_2 = j_M$，

所以第 j_M 列和为 $s = x_2a_2 + \frac{x_2\left(x_2-1\right)}{2}d_2 = nj_M^2 - nj_M + j_M$；

第 $2n+1+j_M\left(j_M = 1,2,\cdots,2n\right)$ 列元素规律：通过观察得矩阵 M 第 $2n+1+j_M$ 列含有 $2n+1-j_M$ 个数字，即项数 $y_2 = 2n+1-j_M$，每一列首项 $a_2' = \left(2n+1\right)\left(j_M+1\right)$，所以第 j_M+2n+1 列和为 $s' = y_2a_2 + \frac{y_2\left(y_2-1\right)}{2}d_2 = 4n^3+6n^2+4n+1-nj_M^2+nj_M-j_M^2$。

将调整元素前的矩阵 M 的 j_M 行和 j_M+2n+1 行的每个元素相加其和即为造好的矩阵 H 第 j_H 列元素之和 S_c：

$$S_c = s + s' = 4n^3+6n^2+4n+1。$$

3) 主对角线

主对角线上元素的公差 $d_3 = 2n+1$，项数 $x_3 = 2n+1$ 项，首项 $a_3 = n+1$，所以主对角线元素和为 $S_{md} = x_3a_3 + \frac{x_3\left(x_3-1\right)}{2}d_3 = 4n^3+6n^2+4n+1$。

4) 副对角线

副对角线上元素的公差 $d_4 = 1$，项数 $x_4 = 2n+1$ 项，首项 $a_4 = 2n^2+n+1$，所以副对角线元素和为 $S_{cd} = x_4a_4 + \frac{x_4\left(x_4-1\right)}{2}d_4 = 4n^3+6n^2+4n+1$。

5) $S_r = S_c = S_{md} = S_{cd}$

即得证矩阵 H 为 $2n+1$ 阶(奇数阶)始元幻方，$4n^3+6n^2+4n+1$ 为幻和。

根据矩阵性质可知，有以下推论成立。

推论 1 如果一个 $2n+1$ 阶矩阵 H 是一个始元和幻方，则 H^{T} 也是一个始元和幻方。

证明：矩阵 H 的第 i 行第 j 列元素就是 H^{T} 的第 j 行第 i 列元素，即有 $\left[H\right]_{ij} = \left[H^{\mathrm{T}}\right]_{ji}$，通过矩阵的转置未改变幻方中的元素，所以幻方 H^{T} 中的元素必然是 $1\sim\left(2n+1\right)^2$ 中的两两互不相同的数。由于矩阵的转置只是做了元素交换，未改变原有幻方的每一行及每一列的和，只是把行和列进行了交换，所以 H^{T} 中的元素必然有 $S_r = S_c = S_{md} = S_{cd}$，所以 H^{T} 也是一个始元和幻方，幻和为 $4n^3+6n^2+4n+1$。

推论 2 如果一个 $2n+1$ 阶矩阵 H 是一个始元和幻方，$A = \left(a\right)_{(2n+1)\times(2n+1)}, a \in N^*$，则 $A+H$ 是一个连元和幻方。

证明：由于 H 是一个始元和幻方，则 H 中元素两两互不相等，所以 $A+H$ 中的元素必然两两互不相等；又由于 $A+H$ 只是给矩阵中每个元素加一个数 a，所以 $A+H$ 的每一行及每一列的和都比原有幻方的大 $a\left(2n+1\right)$，$A+H$ 中的元素必然有 $S_r = S_c = S_{md} = S_{cd} = 4n^3+6n^2+4n+1+a\left(2n+1\right)$，所以 $A+H$ 是一个连元和幻方，幻和为 $4n^3+6n^2+4n+1+a\left(2n+1\right)$。

推论 3 如果一个 $2n+1$ 阶矩阵 H 是一个始元和幻方，则 aH 是一个异元和幻方 $\left(a \in N^*\right)$。

证明：由于 H 是一个始元和幻方，则 H 中元素两两互不相等，所以 aH 中的元素必然两两互不相等；又由于 aH 只是给矩阵中每个元素乘以一个数 a，所以 aH 的每一行及每一列的和都是原有幻方的 a 倍，aH 中的元素必然有 $S_r = S_c = S_{md} = S_{cd} = a\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)$，所以 aH 是一个异元和幻方，幻和为 $a\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)$。

5. 小结

文章给出了奇数阶($2n+1$ 阶)幻方的构造方法，通过利用矩阵将推广的杨辉口诀法用数学符号表示出来，首先按照一定的规律将 $1\sim(2n+1)^2$ 填入到 $4n+1$ 阶矩阵中，然后将矩阵进行分块，最后通过矩阵基本运算得出幻方结果。不仅将矩阵的应用扩充到幻方领域，还能让更多的人对中国古代数学研究产生浓厚的兴趣，其研究价值和意义较为深远。有关于杨辉口诀法是否可以推广于单偶数阶和双偶数阶幻方的构造规律中，还有待于日后做进一步探索研究。

参考文献

[1] 朱磊. 广义平方幻阵的广义 Hadamard 积的保持性[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2015.

[2] 刘兴祥, 董朦朦, 田雨禾. 幻阵的等价定义[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2018, 37(2): 21-25.

[3] 郭萍, 刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 21-27.

[4] 田雨禾. 和幻阵的分解与回文数和幻阵的构造[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2020.

[5] 郭萍. 幻阵的构造与计数问题研究[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2019.

[6] 何敏梅, 刘兴祥. 4k 阶始元幻方的矩阵构造法[J]. 河南科学, 2017, 35(10): 1562-1566.

[7] 张婧, 刘兴祥, 施钊. 完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 420-423.

[8] 刘兴祥, 曹燕飞. 4k 阶拉丁幻方的构造方法[J]. 河南科学, 2016, 34(11): 1777-1780.

[9] Hon, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 1) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.

[10] Hon, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 2) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.

[11] Hon, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 3) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.