

基于L型域上泊松问题的虚拟元方法

刘 洋, 马俊驰*

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年12月28日; 录用日期: 2023年1月24日; 发布日期: 2023年1月31日

摘 要

本文应用虚拟元方法研究L型域上泊松问题。首先构造虚拟元函数空间, 并给出空间中函数的自由度。其次对空间进行虚拟元离散, 构造与问题相关的投影算子。然后借助自由度来计算投影算子, 得到连续问题的虚拟元离散形式, 而后对离散形式进行误差分析。最后给出泊松方程的数值计算, 通过不同范数意义下的相对误差与绝对误差, 可以看出随着网格剖分的细化, 数值解的收敛效果变得更好。当网格剖分最细时, 数值解的收敛效果最好, 验证了虚拟元方法的有效性和准确性。

关键词

虚拟元方法, 泊松问题, 投影算子, 误差分析

Virtual Element Method Based on Poisson Problem in L-Type Domain

Yang Liu, Junchi Ma*

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

In this paper, the virtual element method is applied to study the Poisson problem on the L-type field. Firstly, the virtual element space is constructed, and the degrees of freedom of the functions in the space are given. Secondly, the virtual element discrete of the space is constructed, and the projection operator related to the problem is constructed. Then, with the help of degrees of freedom, the projection operator is calculated to obtain the virtual element discrete form of the continuous problem, and then the error analysis of the discrete form is carried out. Finally, the numerical calculation of Poisson equation is given, and through the relative error and absolute error in the meaning of different norms, it can be seen that with the refinement of meshing, the conver-

*通讯作者。

gence effect of the numerical solution becomes better. When the mesh is the finest, the convergence effect of the numerical solution is the best, which verifies the effectiveness and accuracy of the virtual element method.

Keywords

Virtual Element Method, Poisson Problem, Projection Operator, Error Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着科学的发展和计算机技术的进步, 数值计算的应用越来越广泛。在多种数值求解方法中, 有限元方法的应用非常普遍, 运用有限元方法求解二维问题时, 剖分单元选择三角形或四边形剖分, 传统有限元方法构造的有限维空间, 基底选择单项式函数、样条基函数等。对于有限元方法在剖分区域和基底构成的限制, 在 2013 年 L.beirao da Veiga 等人在[1]中提出虚拟元方法, 对此做出改进。该方法可认为是有限元方法的推广, 虚拟元方法选择凸或非凸多边形。其次, 虚拟元方法不需要给出具体的基底求解, 仅使用自由度计算出系数。虚拟元方法可以用来解决许多方程问题, 比如 Poisson 方程[1], Stokes 方程[2], Cahn-Hilliard 方程[3], semilinear sine-Gordon 双曲方程[4]等。也可以运用虚拟元方法求解一些具体的问题, 文献[5]给出了应用虚拟元方法解决非线性抛物问题, 文献[6]给出了应用虚拟元方法解决板弯曲问题, 文献[7]给出了应用虚拟元方法求解线性弹性问题, 文献[8] [9] [10]给出应用虚拟元方法求解特征值问题, 文献[11]给出应用虚拟元方法求解二维线弹性带孔板问题, 文献[12]给出应用虚拟元方法求解端部受抛物线荷载的悬臂梁问题。本文将利用虚拟元方法求解 L 型域上的泊松问题。

本文第 2 部分给出虚拟元方法在求解 L 型域上的泊松问题中的理论推导。第 3 部分给出具体数值算例, 通过数值计算结果验证了理论分析的准确性。第 4 部分对本文进行总结。

2. 虚拟元方法

2.1. 连续问题

首先在 L 型区域上考虑泊松问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & u \in \Omega, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = g, & u \in \Gamma_N, \\ \bar{u} = 0, & u \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 为 R^2 上的一个多边形区域, $f \in L^2(\Omega)$, (\cdot, \cdot) 为 $L^2(\Omega)$ 中的内积, 由分部积分公式可得, 方程(1)的变分形式为: 找到 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(u, v) = (f, v), \quad v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

其中 $a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)$, Δ 为 Laplace 算子, 由 Lax-Milgram 定理可知连续问题(2)的解存在且唯一。

2.2. 构造虚拟元空间

首先, 对区域 Ω 进行剖分, τ_h 为 Ω 上的一个剖分, Γ_N 与 Γ_D 分别为 τ_h 边的集合, h_K 为单元直径, h

为单元直径的最大值, 对剖分网格要求满足如下条件: 存在整数 N 与正实数 λ , 使得对于每一个 h 与 $K \in \tau_h$, 满足: 1) 剖分单元 K 的边数不大于 N ; 2) 剖分单元 K 的最短边与直径的比值大于 λ ; 3) K 相对于半径为 λh_K 的球每一点都是星型的。

对于 $k \geq 1$ 时, 定义空间 $B_k(\partial K) := \{v \in C^0(\partial K) : v|_e \in \mathbb{P}_k(e), e \in \partial K\}$ 。

定义全局虚拟元空间为 $V_h := \{v \in H^1(K) : v|_{\partial K} \in B_k(\partial K), \Delta v|_E \in \mathbb{P}_{k-2}(K)\}$ 。

定义局部虚拟元空间为 $V_{h,K} := \{v \in V_h : v|_K \in V_h, K \in \tau_h\}$, 且 $\mathbb{P}_{-1}(K) = \{0\}$ 。

下面对于任给的 $v_h \in V_h$, 选取以下自由度:

- 1) v_h 在单元 K 内部顶点处的值;
- 2) 对于 $k \geq 1$, v_h 在单元 K 每条边 e 上的值;
- 3) 对于 $k \geq 1$, v_h 在单元 K 内部 $\frac{1}{|K|} \int_K m_\alpha v_h dx$, $\alpha = 1, \dots, n_{k-2}$;

其中, $m_\alpha \in M_k(K)$, $M_k(K)$ 是 $\mathbb{P}_k(K)$ 的一组基函数, 且 $n_{k-2} = \dim \mathbb{P}_{k-2}(K) = \frac{k(k-1)}{2}$ 。

2.3. 离散双线性形式与右端项

首先, 定义 H^1 投影算子 $\Pi^\nabla : V_{h,K} \rightarrow \mathbb{P}_k(K)$, 对于每一个 $v_h \in V_{h,K}$, 满足如下正交条件

$$\begin{cases} (\nabla p_k, \nabla(\Pi^\nabla v_h - v_h))_{0,K} = 0, & p_k \in \mathbb{P}_k(K), \\ \overline{\Pi^\nabla v_h} = \overline{v_h}, \end{cases}$$

下面对双线性形式进行虚拟元离散, 定义双线性形式 $a_K : H^1(K) \times H^1(K) \rightarrow R$, 对于任意的 $u, v \in H^1(K)$ 有 $a_K(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_{0,K}$, 故双线性形式的局部对应为 $a(u, v) = \sum_{K \in \tau_h} a_K(u, v)$ 。

定义局部离散双线性形式 $a_{h,K} : V_{h,K} \times V_{h,K} \rightarrow R$, 有

$$a_{h,K}(u_h, v_h) := (\nabla \Pi^\nabla u_h, \nabla \Pi^\nabla v_h)_{0,K} + S_K(u_h - \Pi^\nabla u_h, v_h - \Pi^\nabla v_h), \quad (3)$$

由于 Π^∇ 是恒等算子, 故式(3)中稳定项 $S_K(u_h - \Pi^\nabla u_h, v_h - \Pi^\nabla v_h)$ 为 0, 故式(3)可以转化为

$$a_{h,K}(u_h, v_h) := (\nabla \Pi^\nabla u_h, \nabla \Pi^\nabla v_h)_{0,K},$$

故上述连续问题离散双线性形式为: $a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} a_{h,K}(u_h, v_h)$ 。

局部离散双线性形式具有如下两个重要性质:

- 1) 一致性: 对任意的 $v \in V_K$, 与任意的 $p \in \mathbb{P}_k(K)$ 有

$$a_{h,K}(p, v) = a^K(p, v).$$

- 2) 稳定性: 存在常数 $\alpha_*, \alpha^* > 0$, 且 α_*, α^* 不受 h, E 的限制, 有

$$\alpha_* a_K(v_h, v_h) \leq a_{h,K}(v_h, v_h) \leq \alpha^* a_K(v_h, v_h).$$

定义 L^2 投影算子 $\Pi^0 : V_{h,K} \rightarrow \mathbb{P}_k(K)$, 对于每一个 $v_h \in V_{h,K}$, 满足如下正交条件

$$(p_k, (\Pi^0 v_h - v_h))_{0,K} = 0, \quad p_k \in \mathbb{P}_k(K),$$

接下来, f 经过 L^2 投影算子作用后变为 f_h , 对 $K \in \tau_h$ 有

$$\langle f_h, v_h \rangle = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f_h v_h dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\Pi^0 f) v_h dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f (\Pi^0 v_h) dx.$$

因此, 本文对应的离散问题为: 对于任意的 $v_h \in V_{h,K}$, 存在 $u_h \in V_h$, 使得

$$a_h(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle. \tag{4}$$

由于离散双线性形式具有一致性和稳定性, 因此可以证得上述离散问题(4)有唯一解。

2.4. 误差分析

下面对离散问题进行误差分析。

定理 1 [13]对足够小的 h , 等式(4)存在唯一解 $u_h \in V_h$, 则 H^1 范数误差估计为

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k (\|u\|_{k+1,\Omega} + |f|_{k,\Omega}),$$

其中 C 是一个正常数, 并且 C 与 h 无关。

定理 2 [13]对足够小的 h , 则 L^2 范数的误差估计为

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} (\|u\|_{k+1,\Omega} + |f|_{k,\Omega}),$$

其中 C 是一个正常数, 并且 C 与 h 无关。

3. 数值实验

本节通过数值算例, 验证上述理论分析结果, 直观地说明了运用虚拟元方法在处理 L 型区域上的泊松问题的有效性。考虑 L 型域上的泊松方程为

$$\begin{cases} \Delta u = f, & u \in \Omega, \\ f = 0, & u \in \Omega, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = g, & u \in \Gamma_N, \\ \bar{u} = 0, & u \in \Gamma_D, \end{cases} \tag{5}$$

此方程的精确解为 $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \sin \frac{2\theta - \pi}{3}$, $\theta \in (0, 2\pi]$ 。运用虚拟元方法在处理 L 型域上的泊松问题时, 选择尺寸大小如图 1 所示的 L 型区域。

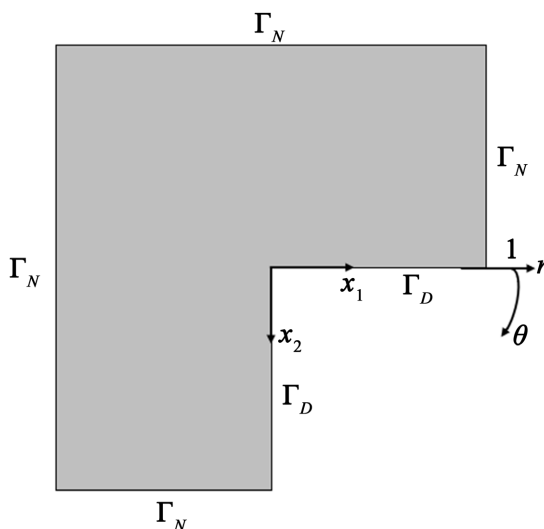


Figure 1. Geometry of the L-domain
图 1. L 型域的几何模型

在数值模拟时, 首先对区域 Ω 进行网格剖分, 剖分区域为矩形区域 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, 图2给出网格剖分数分别为104, 300, 1050, 3509, 17000, 51494的剖分图。

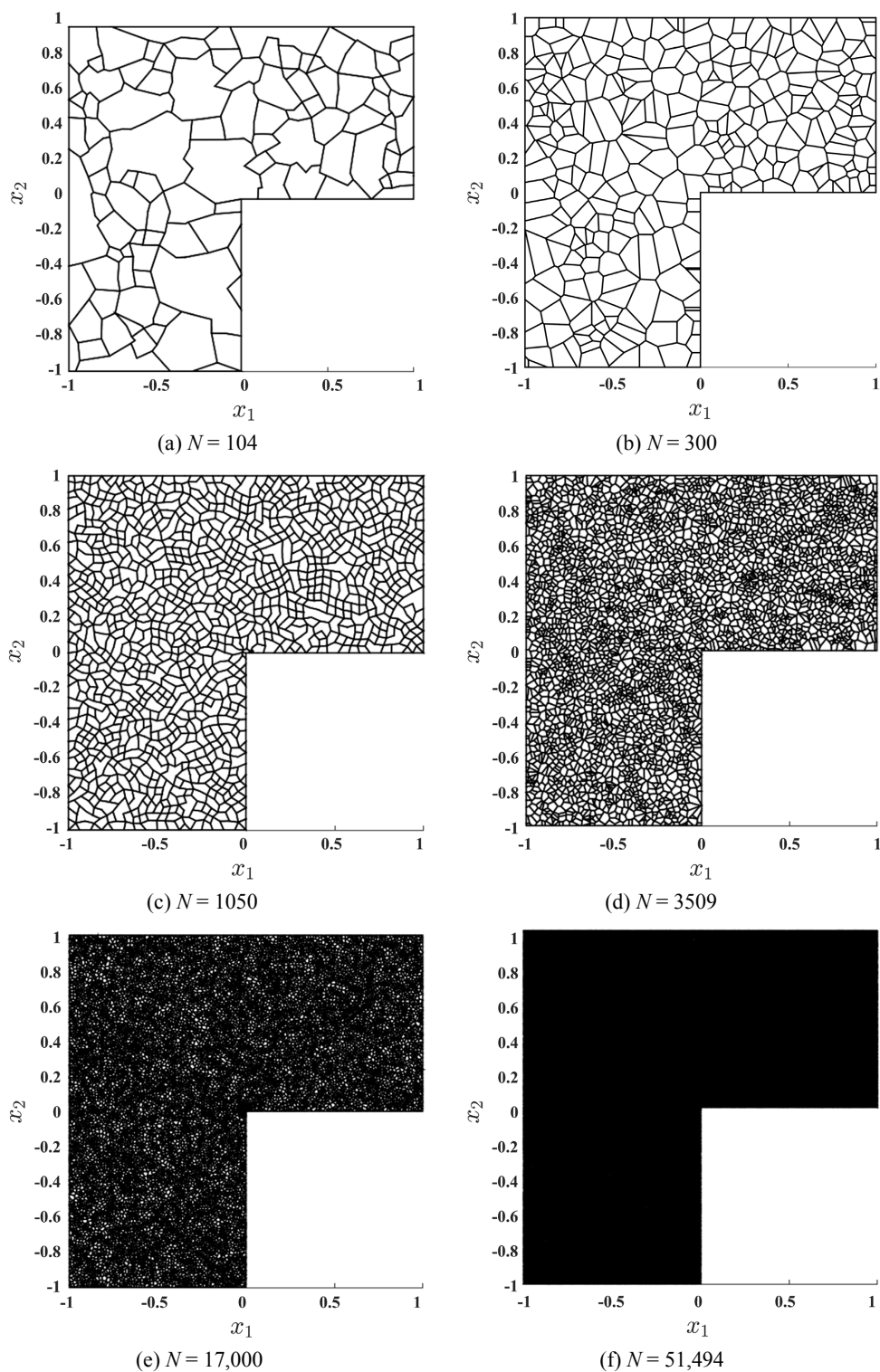


Figure 2. Grid division diagram
图 2. 网格剖分图

图3给出网格数分别为104, 300, 1050, 3509, 17000, 51494对应的数值解, 从结果中看出, 淡黄色区域代表误差相对较大, 红色区域代表误差相对较小, 且淡黄色逐渐变淡误差逐渐减小。从而随着剖分程度的细化, 淡黄色逐渐变淡, 误差逐渐变小。符合上文理论推导, 即随着网格剖分的细化误差逐渐达到最优。

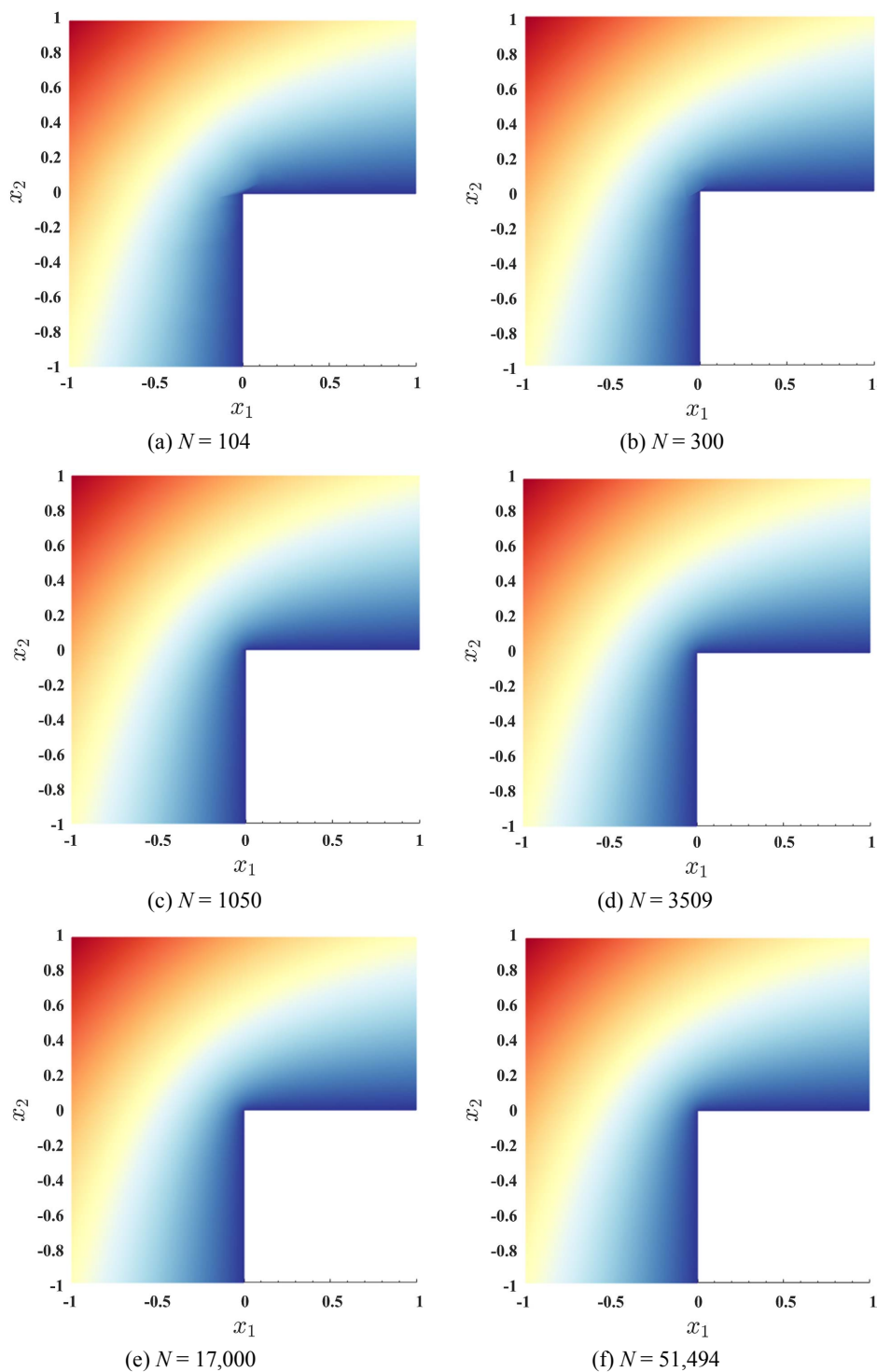


Figure 3. Numerical solutions for different mesh numbers

图3. 不同网格数对应的数值解

表 1 给出在不同网格下数值解的误差, $Err(H^1)$ 为 H^1 范数下的绝对误差, $err(L^2)$ 代表 L^2 范数下的相对误差。随着网格剖分的细化, 误差逐渐变小。由于在拐角处有奇异点, 因此, 在 L^2 范数下的收敛速率 k 相对于自由度的总数是由拐角的角度 β ($\beta = \pi/2$) 决定的。

Table 1. Relative and absolute errors under different meshes

表 1. 不同网格下的相对误差与绝对误差

N	$err(L^2)$	$err(H^1)$	$Err(L^2)$	$Err(H^1)$
104	8.90e-03	1.22e-01	1.50e-03	2.08e-02
300	2.10e-03	8.04e-02	2.09e-04	8.90e-03
1050	8.69e-04	4.09e-02	4.64e-05	2.20e-03
3509	4.33e-04	2.94e-02	1.25e-05	8.50e-04
17,000	5.60e-05	1.36e-02	7.44e-07	1.81e-04
51,494	2.84e-05	8.23e-03	2.17e-07	6.29e-05

4. 总结

本文基于 L 型域上泊松问题利用虚拟元方法求解, 通过对比在不同网格剖分下的相对误差与绝对误差的收敛效果, 验证了运用虚拟元方法所得的误差结果与理论分析的结果相一致。运用虚拟元方法的优势在于空间中网格的剖分很灵活, 网格采用多边形或多面体剖分, 可以很好解决网格悬挂节点问题。与传统有限元方法相比, 该方法由于近似解中包含非多项式, 所以在计算过程中不需要给出基函数的显式表达式, 只利用自由度来计算系数, 进而逼近真解。

参考文献

- [1] Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., Cangiani, A., et al. (2013) Basic Principles of Virtual Element Methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **23**, 199-214. <https://doi.org/10.1142/S0218202512500492>
- [2] Cangiani, A., Gyrya, V. and Manzini, G. (2016) The Nonconforming Virtual Element Method for the Stokes Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 3411-3435. <https://doi.org/10.1137/15M1049531>
- [3] Antonietti, P.F., Da Veiga, L.B., Scacchi, S., et al. (2016) A C^1 Virtual Element Method for the Cahn-Hilliard Equation with Polygonal Meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 34-56. <https://doi.org/10.1137/15M1008117>
- [4] Adak, D. and Natarajan, S. (2020) Virtual Element Method for Semilinear Sine-Gordon Equation over Polygonal Mesh Using Product Approximation Technique. *Mathematics and Computers in Simulation*, **172**, 224-243. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2019.12.007>
- [5] Vacca, G. and Beirão da Veiga, L. (2015) Virtual Element Methods for Parabolic Problems on Polygonal Meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **31**, 2110-2134. <https://doi.org/10.1002/num.21982>
- [6] Brezzi, F. and Marini, L.D. (2013) Virtual Element Methods for Plate Bending Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **253**, 455-462. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.09.012>
- [7] Da Veiga, L.B., Brezzi, F. and Marini, L.D. (2013) Virtual Elements for Linear Elasticity Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **51**, 794-812. <https://doi.org/10.1137/120874746>
- [8] Čertík, O., Gardini, F., Manzini, G., et al. (2018) The Virtual Element Method for Eigenvalue Problems with Potential Terms on Polytopic Meshes. *Applications of Mathematics*, **63**, 333-365. <https://doi.org/10.21136/AM.2018.0093-18>
- [9] Mora, D., Rivera, G. and Rodríguez, R. (2015) A Virtual Element Method for the Steklov Eigenvalue Problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 1421-1445. <https://doi.org/10.1142/S0218202515500372>
- [10] Mora, D., Rivera, G. and Rodríguez, R. (2017) A Posteriori Error Estimates for a Virtual Element Method for the Steklov Eigenvalue Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **74**, 2172-2190. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.05.016>

- [11] 王小如, 索宇洋, 马俊驰. 基于二维线弹性带孔板的虚拟元方法[J]. 应用数学进展, 2022(6): 3839-3848.
- [12] 马俊驰, 梁晓坤, 索宇洋. 基于虚拟元方法求解端部受抛物线荷载的悬臂梁问题[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(3): 295-300.
- [13] Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., Marini, L.D., *et al.* (2016) Virtual Element Method for General Second-Order Elliptic Problems on Polygonal Meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 729-750.
<https://doi.org/10.1142/S0218202516500160>