Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(10), 4173-4176
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210409

函数可积性的进一步讨论

于欢欢[1]**，路正玉**[2*]

[1]广东理工学院基础课教学研究部，广东 肇庆
[2]广东理工学院艺术设计学院，广东 肇庆

收稿日期：2023年9月9日；录用日期：2023年10月3日；发布日期：2023年10月11日

摘 要

本文首先介绍了可积函数的概念；其次介绍了函数可积性的充分、必要和充分必要条件。重点研究一元函数可积性的反例的构造。最后结合例子进一步讨论了如何证明一个函数在给定区间上是否可积的问题，例如：复合函数的可积性。

关键词

可积函数，可积性，一元函数，构造反例

Further Discussion of Function Integrability

Huanhuan Yu[1]**, Zhengyu Lu**[2*]

[1]Basic Course Teaching and Research Department, Guangdong Technology College, Zhaoqing Guangdong
[2]College of Art and Design, Guangdong Technology College, Zhaoqing Guangdong

Received: Sep. 9th, 2023; accepted: Oct. 3rd, 2023; published: Oct. 11th, 2023

Abstract

Firstly, we introduce the concept of integrable function in the paper; secondly, the sufficient condition, necessary condition, sufficient and necessary condition of the integrability of function are introduced. We mainly focus on the counter-example construction of integrability of one variable function. Finally, combining with examples, we further discuss the problem that how to prove whether a function is integrable on a given interval, for example: the integrability of the composite function.

[*]通讯作者。

文章引用: 于欢欢, 路正玉. 函数可积性的进一步讨论[J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4173-4176.
DOI: 10.12677/aam.2023.1210409

Keywords

Integrable Function, Integrability, Function of One Variable, Construction of Counter-Example

1. 引言

可积性是函数的重要特性之一。积分在研究高等数学问题中占据了重要的地位，不但是数学的许多分支的基本数学工具，而且是物理、化学、生物、计算机等领域的基本数学工具。另一方面，积分所反映出的思想与日常生活联系紧密，积分在社会、经济等领域中也得到越来越广泛的应用[1] [2] [3]。一元、二元和多元函数的可积性都是积分学的重点内容，本文重点讨论了一元函数的可积性和函数可积性反例的构造。首先介绍了函数、定积分以及积分函数的定义，证明了函数可积性的相关定理，并且给出了定理的反例。其次重点研究了一元函数可积性的反例的构造。最后，通过构造具体的例子进一步研究了函数的可积性。

2. 函数的可积条件

华东师范大学数学系主编的《数学分析》以及同济大学数学系主编的《高等数学》[4] [5]介绍了函数、定积分和函数的可积性的定义，根据定义固然可以考察函数是否可积，但其方法不易，因此下边我们根据函数可积性的充分、必要和充要条件以及反例的构造进一步讨论了函数的可积性。

定理 1 [6] (可积的必要条件)如果函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么 f 在 $[a,b]$ 上必有界。

定理 2 (可积的充分条件)如下三类函数在闭区间 $[a,b]$ 上都是可积的：

① f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数；

② f 为闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数，且只有有限个间断点；

③ f 为闭区间 $[a,b]$ 的单调函数。

定理 3 (可积的第一充要条件)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow S=s$ 。

定理 4 (可积的第二充要条件)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists T$，使得 $S(T)-s(T)<\varepsilon$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon，\quad \omega_i=M_i-m_i。$$

定理 5 [7] (可积的第三充要条件)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon,\sigma>0,\exists T$，使属于 T 的所有小区间中，对应振幅 $\omega_i\geq\varepsilon$ 的那些小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的总长

$$\sum_{\omega_i}\Delta x_i<\sigma。$$

通过一元函数可积性的必要、充分和充分必要条件，我们对函数可积性有了进一步的认识，在对函数可积性的研究过程中遇到了许多的例子，函数可积性的进一步讨论也是需要我们重点研究和学习的内容。下面我们来共同构造部分函数，并讨论其可积性，通过一些具体的实例来更深层次的认识函数的可积性。以下主要从复合函数的可积性、是否具有原函数与函数的可积性的关系、函数列的可积性来加以讨论。

3. 函数可积性反例的构造

3.1. 关于复合函数可积性的反例

假设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 的函数，并且其值域不越出区间 $[c,d]$，而 $g(y)$ 是定义在 $[c,d]$ 的函数。函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上，$g(y)$ 在 $[c,d]$ 上是可积的，然而它们的复合函数 $g[f(x)]$ 的可积性是不确定的。下面我们给出一个例子来加以说明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上，$g(y)$ 在 $[c,d]$ 上的可积性对于它们的复合函数 $g[f(x)]$ 的可积性来说既不是充分条件也非必要条件。

外层函数 $g(y)$ 与内层函数 $f(x)$ 都是可积的，而它们的复合函数 $F(x)=g[f(x)]$ 却是不可积的。

例 2 函数

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 当u\neq 0时,\\ 0, & 当u=0时\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积，而黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p},(p,q)=1,\ p,q\in N^{+}\\ 0, & x是无理数\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上也可积，但是它们的复合函数

$$F(x)=g[f(x)]=\begin{cases}0, & 当x是无理数时\\ \dfrac{1}{2}, & 当x是有理数时\end{cases}$$

却在 $[0,1]$ 上不可积。

3.2. 有无原函数与函数可积性的关系

一个函数有没有原函数对它的可积性是否有影响呢？下面我们给出了一个没有原函数的可积函数。

例 3 函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

显而易见，f 在区间 $[-1,1]$ 上可积。而 f 在区间 $[-1,1]$ 上没有原函数。事实上，若 f 在区间 $[-1,1]$ 上有原函数 F，即

$$F'(x)=f(x),\quad -1\le x\le 1,$$

则根据 Darboux 定理[8] [9]可得，F' 取 $f(-1)=0$ 与 $f(1)=1$ 之间的每一个值，这与 f 的定义是矛盾的，所以 f 在区间 $[-1,1]$ 上没有原函数。

由上述反例 4 可知存在没有原函数的函数是可积的。那么有原函数的函数就一定可积吗？

例 4 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易知 f 在区间 $[-1,1]$ 上的每一点 x 处都有导函数

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此，f 是 g 的原函数，但是因为 g 在闭区间 $[-1,1]$ 上是无界的，因此它在闭区间 $[-1,1]$ 是不可积的。通过上述的讨论，我们可以得出函数的可积性与其有无原函数并没有直接的联系。

3.3. 函数列的可积性

同样函数列也有存在是否可积的问题，下边我们给出了一个有界的函数列，它的极限在任意非空区间上都是不可积的。

例 5 假设

$$g(x)=\sin^2\pi x+\sin^2\pi x\cos^2\pi x+\sin^2\pi x\cos^4\pi x+\cdots+\sin^2\pi x\cos^{2k}\pi x+\cdots$$

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}g(n!x)\text{。}$$

那么当 x 是整数时，$g(x)=0$；然而当 x 不是整数的时候，$g(x)=1$。所以，如果 x 是有理数，那么 $G(x)=0$；如果 x 是无理数，那么 $G(x)=1$。由此可见 $G(x)$ 在任意区间上都是不可积的。

我们具体研究讨论了一元函数可积性的相关定理以及函数可积性的必要、充分、充分必要条件，并且构造了部分反例，通过这些反例更加深入地了解了函数可积性的内容，并且结合具体的例子进一步讨论了函数的可积性。

参考文献

[1] 刘建明, 李杰. 关于原函数的几个问题[J]. 商丘职业技术学院学报, 2011(5): 11-14.

[2] 曹学峰. 在有界闭区间上复合函数的黎曼可积性[J]. 吉林省教育学院学报, 2009(2): 99-100.

[3] 韩新方, 马丽. 函数可积性教学的改进策略[J]. 海南师范大学学报, 2017, 30(1): 105-107.

[4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[6] 孙清华, 孙昊. 数学分析内容、方法与技巧(上) [M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001.

[7] 赵显曾, 黄安才. 数学分析的方法与题解[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2005.

[8] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[9] 汪林. 数学分析中的问题和反例[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.