**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2023, 12(10), 4392-4402**
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210432

# 在一些充分条件下的不含4圈和7圈的平面图是2-弱退化的

**卢宏锴**

浙江师范大学，数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年9月25日；录用日期：2023年10月18日；发布日期：2023年10月25日

## 摘 要

如果一个图G的每个子图中有一个点$v$，它的度数最多为$k$，那么我们称图G为$k$-退化的。$k$-弱退化图是$k$-退化图的推广。在这篇文章中，我们证明了不含4圈，7圈和特殊圈的平面图是2-弱退化的，同时也是3-DP-可染的。由此得到结论：每个不含4圈，$k$圈，7圈和9圈的平面图是2-弱退化的以及3-DP-可染的，这里$k \in \{5,6\}$。

## 关键词

平面图，退化，弱退化，3-DP-可染

# Every Planar Graph with Some Sufficient Conditions but without 4- and 7-Cycles Is Weakly 2-Degenerate

**Hongkai Lu**

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Sep. $25^{th}$, 2023; accepted: Oct. $18^{th}$, 2023; published: Oct. $25^{th}$, 2023

文章引用: 卢宏锴. 在一些充分条件下的不含4圈和7圈的平面图是2-弱退化的[J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4392-4402. DOI: 10.12677/aam.2023.1210432

## Abstract

**A graph $G$ is $k$-degenerate if its every subgraph contains a vertex of degree at most $k$. Weakly $k$-degenerate graphs are a generalization of $k$-degenerate graphs. In this paper, we prove that every planar graph without 4, 7-cycles and some special cycles is weakly 2-degenerate. Consequently, it is 3-DP-colorable. As corollaries, every planar graph without 4-, $k$-, 7- and 9-cycles is weakly 2-degenerate and 3-DP-colorable, where $k \in \{5, 6\}$.**



## Keywords

**Planar Graph, Degenerate, Weakly-Degenerate, 3-DP-Colorble**




## 1. 引言

如果一个图$G$的所有子图$H$都含有一个点的度数最多为$k$，那么称该图为$k$-退化的。$k$-退化图在图论中扮演着很重要的角色。显然，每个$k$-退化图是$k+1$-可选图。每个平面图都是5-退化图，因此也是6-可选图。

Dvořák和Postle [1]介绍了DP染色的概念，其是对列表染色的一种推广。同时，他们也证明了每个$k$-退化图是$k+1$-DP-可染图。

根据欧拉公式以及握手定理，我们知道不含3圈的平面图是3-退化的。王维凡等 [2]证明了不含五圈的平面图是3-退化的。Fijavž等 [3]证明了不含六圈的平面图是3-退化的。刘润润等 [4]证明了不含相邻三角形的五圈的平面图是3-退化的。Sittitrai和Nakprasit [5]证明了在一些充分条件下的不含4圈和5圈的平面图是2-退化的。

**定理1.** *(P. Sittitrai, K. Nakprasit [5])*

1. *每个不含4圈，5圈，7圈，10圈的平面图是2-退化的。*
2. *每个不含4圈，5圈，7圈，11圈的平面图是2-退化的。*
3. *每个不含4圈，5圈，8圈，10圈的平面图是2-退化的。*

4. 每个不含*4*圈，*5*圈，*8*圈，*11*圈的平面图是*2*-退化的。

Jumnongnit和Pimpasalee [6]证明了在一些充分条件下的不含4圈和6圈的平面图是2-退化的。

**定理2.** *(P. Jumnongnit, W. Pimpasalee [6])*

1. 每个不含*4*圈，*6*圈，*8*圈，*10*圈的平面图是*2*-退化的。
2. 每个不含*4*圈，*6*圈，*9*圈，*10*圈的平面图是*2*-退化的。

所以，我们思考一个问题：在一些充分条件下，不含哪两种短圈的平面图是2-退化的？

由于对贪婪算法学习的推动，Bernshteyn和Lee [7]定义了弱退化的解释。

**定义1.** （删除） 设$G$是一个图，并且有映射$f : V(G) \to Z$。对于一个点$u$，$u \in V(G)$，操作（删除）$(G, f, u)$通过

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) - 1 & \text{如果} uv \in E(G) \\ f(v) & \text{否则} \end{cases}$$

得到$G' = G - u$ 以及映射$f' : V(G') \to Z$。

如果结果的值$f'$是非负的，那么我们称操作（删除）的应用是合理的。

**定义2.** （删除节省） 设$G$是一个图，并且有映射$f : V(G) \to Z$。对于一对相邻的点$u, w \in V(G)$，操作（删除保存）$(G, f, u, w)$通过

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) - 1 & \text{如果} uv \in E(G), v \neq w \\ f(v) & \text{否则} \end{cases}$$

得到$G' = G - u$ 以及映射$f' : V(G') \to Z$。

如果$f(u) > f(w)$，并且结果的值$f'$是非负的，那么我们称操作（删除节省）的应用是合理的。

如果一个图$G$是有可能通过一系列合理的（删除）和（删除节省）的操作应用删去$G$中的所有点，那么则称$G$是$f$-弱退化。如果这个图$G$是$f$-弱退化的，这里的$f$是常数函数$d$，那么我们称$G$是$d$-弱退化的。如果这个图$G$是$f$-退化的，这里的$f$是常数函数$d$，那么我们称$G$是$d$-退化的。一般的，我们用$wd(G)$表示$G$的弱退化数，并且它是最小的正整数$d$，使得$G$是$d$-弱退化的。一般的，我们用$d(G)$表示$G$的退化数，并且它是最小的正整数$d$，使得$G$是$d$-退化的。

以下，Bernshteyn和Lee [7]给出了图的不同染色数之间的不等关系：

**命题1.** $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \chi_{DP}(G) \leq \chi_{DPP}(G) \leq wd(G) + 1 \leq d(G) + 1$，其中$\chi_{DPP}(G)$为图$G$的在线$DP$-染色数。

从命题1发现，$d(G) + 1$是一些图染色参数的上界。因此，我们对图的弱退化数具有极大的兴趣。Bernshteyn和Lee [7]证明了每个平面图都是4-弱退化的。后来，韩铭和王涛等 [8]证明了最短圈长为5的平面图是2-弱退化的。王涛 [9]证明了在一定条件下的不含4 圈和6圈的平面图是2-弱退化的。

**定理3.** *(王涛 [9])*

1. 让$G$为不含4圈，6圈和9圈的平面图。若$G$不存在正常相邻5圈的7圈，那么$G$是2-弱退化的。
2. 让$G$为不含4圈，6圈和8圈的平面图。若$G$不存在正常相邻9圈的3圈，那么$G$是2-弱退化的。

在这篇文章中，我们要证明在一些充分条件下的不含4圈和7圈的平面图是2-弱退化的。下面我们先介绍一些定义：

设$G$为一个平面图。如果一个点$v$，有$d(v) = k$ ($d(v) \geq k$和$d(v) \leq k$)，则称这个点为$k$-点($k^+$-点和$k^-$-点)。如果一个面$f$，有$d(f) = k(d(f) \geq k$和$d(f) \leq k)$，则称这个面为$k$- 面 ($k^+$-面和$k^-$- 面)。

我们对于一些3-点和4-点，给出定义：关联一个3-面的3-点称为$A_1$-点；关联一个5-面和两个$8^+$-面的3度点称为$A_2$-点；关联两个5-面和一个$8^+$-面的3度点称为$A_3$-点；关联三个$6^+$-面的3-度点称为$A_3$-点。设点$v$为4-点。如果$v$关联两个3面，则称$v$为$B_1$-点；现在假设$v$只关联一个3-面，$f$为与$v$关联，但不与三角形相邻的面。若$f$为$10^+$- 面，则称$v$为$B_2$-点，否则，则称$v$为$B_3$-点。

设$C$是一个平面图$G$的一个圈。如果有一条边，位于$C$的内部，并且连接$C$上不连续的两个点，则称这条边为$C$的弦。如果一个点$v$位于$C$的内部，有3个在$C$上的邻居$v_1, v_2, v_3$，那么称$G[\{vv_1, vv_2, vv_3\}]$为$C$的爪型。弦和爪型把圈分为了长度为$c_i$的小圈。我们把这些弦和爪型我们称为一条$(c_1, c_2)$-弦或者一个$(c_1, c_2, c_3)$-爪型。

如果一个圈只有一条$(3, 5)$-弦, 或者一条$(3, 9)$-弦, 或者一条$(5, 6)$-弦, 或者一个$(5, 5, 5)$-爪型，那么称这样的圈是特殊圈。我们用$\mathcal{G}$表示不含4圈，7圈和特殊圈的平面图的集合。

在这篇文章中，我们得到了以下的结果：

**定理4.** *$\mathcal{G}$中的每个图是2-弱退化的。*

**推论1.** *$\mathcal{G}$中的每个图都是3-DP-可染。*

**推论2.** *每个不含4圈，5圈，7圈和9圈的平面图是2-弱退化的，同时，也是3-DP-可染的。*

**推论3.** *每个不含4圈，6圈，7圈和9圈的平面图是2-弱退化的，同时，也是3-DP-可染的。*

## 2. 定理4的证明

我们可以通过反证法证明定理4。让$G$是对于定理4的极小反例，其中$G$拥有最少的顶点数加边数总和。设$G$是一个连通图并且其点的最小度为3，并且$G$中没有图 1，图 2 以及图 3 中的结构。

### 2.1. 可约构型

在这节中，我们证明$G$中点的最小度为3，并且图 1，图 2，图 3中的结构在$G$ 中不存在。如果$wd(G) = d$ 并且对于$G$的任何一个子图$H$，有$wd(H) < d$，那么我们称$G$是一个最小的$d$-弱退化图。如果一个连通图的每个块是一个圈或者是一个完全图，我们称这个连通图为$GDP$-树。Bernshteyn和Lee [7]证明了以下关于$Gallai$的结果。

**定理5.** *(Bernshteyn, Lee [7]) 设$G$为最小的$d$-弱退化图，其中$d \geq 3$。*

1. $G$的最小度至少为$d$。
2. 让$U \subseteq \{u \in V(G) | d_G(u) = d\}$。那么$G[U]$的每个部分都是一个$GDP$-树。

根据以上定理，我们可以得到以下引理：

**引理1.** *$G$中点的最小度为3。*

证明. 假设$G$不是一个2-弱退化图，但是它的每个子图是2-弱退化图。那么$G$是一个连通的3-弱退化图。因此，$G$是一个最小的3-弱退化图。根据定理5(1)，$G$中一个点的度数最多为2是不可能的。 □

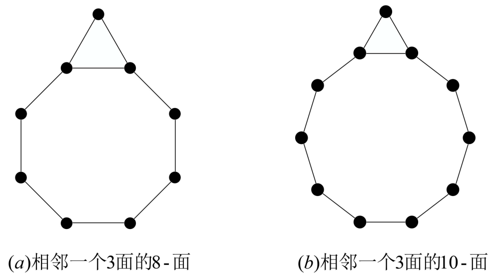



**Figure 1.** The round black dot is 3-vertex

**图 1.** 圆形黑点是3-点

**引理2.** *图 1中的结构不存在。*

证明. 现在设$G'$为$G$的一个子图，这个子图由图 1(a)结构中的点诱导得到。那么这个子图$G'$包含了形如图 1(a)的图，那么我们可以知道2-连通子图$G'$不可能是一个圈或者是一个完全图。根据定理5(2)，我们知道$G$ 不可能是最小的3-弱退化图，矛盾，所以图 1中(a)结构不存在。同理，图 1中(b)结构不存在。 □

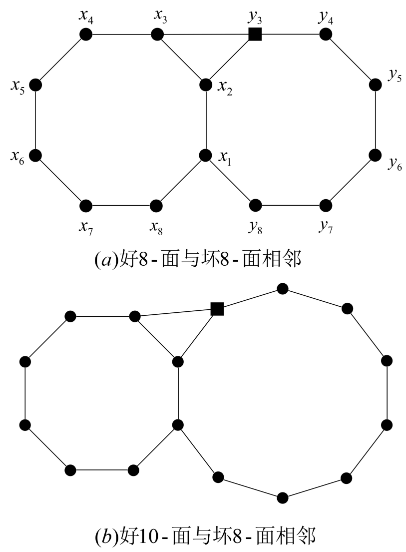
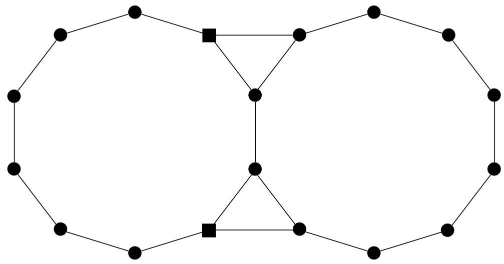



**Figure 2.** The round black dot is 3-vertex, the square black dot is 4-vertex

**图 2.** 圆形黑点是3-点，方形黑点是4-点



好10-面与坏1-10-面相邻

**Figure 3.** The round black dot is 3-vertex, the square black dot is 4-vertex

**图 3.** 圆形黑点是3-点，方形黑点是4-点

**引理3.** *图 2以及图 3中的结构不存在。*

证明. 现在我们假设$W$是图2中(a)结构。由于$G$不含4圈，7圈和特殊圈，则在$W$中的8圈不存在任何一条弦。由$G$的极小性，我们可以通过一系列的（删除）和（删除节省）操作的合理应用把$V(G)-V(W)$中的点一一删去，接下来我们按照以下顺序一一删去$W$中的点：$x_3, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, x_2, x_1, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4$。在删去$W$中的点的过程中，除了第一步用（删除节省）$(G, ., x_3, x_4)$操作，其他都是（删除）操作。因此，图 2 中(a) 结构不可以作为对于定理4极小反例的子图。同理，对于图2中(b)结构以及图 3中结构都不能作为对于定理4极小反例的子图。 □

**定义3.** *让$f$是一个8-面或者10-面。*

1. *让$f$为相邻着一个3-面$[v_1v_2u]$的8-面，并且$f$关联的所有点都是3-点，记做$v_1, v_2, \ldots, v_8$。根据图 1中(a)结构不存在，那么$u$是一个$4^+$-点。这样的面$f$称为坏1-面。我们让$8^+$-面$h$表示关联着$uv_1v_8$或者$uv_2v_3$ 的面。*

2. *让$f$为关联着9个$A_1$-点和一个$B_3$-点的10-面，把同时关联着一个$A_1$-点和一个$B_3$-点的3-面记做$[v_1v_2u]$，其中$u$为不在$f$上的点，$v_1$为$B_3$-点。这样的面$f$称为坏2-面。我们让$8^+$-面$h$表示关联着$uv_1$的面。*

3. *让$f$为关联着8个$A_1$-点和2个$A_2$-点的10-面，10个关联的3-点依次记做$v_1, v_2, \ldots, v_{10}$，其中$v_9, v_{10}$是两个$A_2$-点。此时，$f$相邻着4个3-面$[v_1v_2u_1], [v_3v_4u_2], [v_5v_6u_3], [v_7v_8u_4]$，其中$u_1, u_2, u_3, u_4$ 是分别在$t_1$,$t_2$,$t_3$,$t_4$中，但不在$f$上的点。那么根据图 1中(b)结构不存在，那么$u_1, u_2, u_3, u_4$都是$4^+$-点。这样的面$f$称为坏3-面。我们让$h$表示关联着路$u_1v_2v_3u_2$，或者路$u_2v_4v_5u_3$，或者路$u_3v_6v_7u_4$的$10^+$-面，同时，把这样的路记为好路。*

*以上的坏1-面、坏2-面和坏3-面,统称为坏面。其余的面统称好面。*

## 2.2. 权转移

对于$G$的点集$V$和面集$F$。让点和面的初始权为$ch(v) = d(v) - 4$和$ch(f) = d(f) - 4$，其

中$v \in V$，$f \in F$。根据欧拉公式，我们得到：

$$\sum_{x \in V \cup F} ch(x) = \sum_{v \in V}(d(v) - 4) + \sum_{f \in F}(d(f) - 4) = -8.$$

权转移规则如下：

$R1$. 每个3-面从它每个关联的点中得到权$\frac{1}{3}$。

$R2$. 让$v$ 是一个3-度点。

(1) 如果$v$是一个$A_1$-点，那么它从每个关联的$8^+$-面中得到权$\frac{2}{3}$。

(2) 如果$v$是一个$A_2$-点，那么它从每个关联的$8^+$-面中得到权$\frac{1}{2}$。

(3) 如果$v$是一个$A_3$-点，那么它从每个关联的$8^+$-面中得到权$\frac{1}{2}$，并且从每个关联的5-面中得到$\frac{1}{4}$。

(4) 如果$v$是一个$A_4$-点，那么它从每个关联的$6^+$-面中得到权$\frac{1}{3}$。

$R3$. 让$v$ 是一个4-度点。

(1) 如果$v$是一个$B_1$-点，那么它从每个关联的$10^+$-面中得到权$\frac{1}{3}$。

(2) 假设$v$是一个$B_2$-点，那么它从与$v$关联，但不与三角形相邻的$10^+$-面中得到权$\frac{1}{3}$。

(3) 假设$v$是一个$B_3$-点，那么它从关联的$8^+$-面中各自得到权$\frac{1}{6}$，其中这些$8^+$-面是相邻3-面的。

$R4$. 每个5-度点给每个关联的坏3-面转权$\frac{1}{9}$。

$R5$. 每个$6^+$-度点给每个关联的坏3-面转权$\frac{1}{3}$。

$R6$. 让$f$是一个坏3-面，与一个相邻的3-面$[xyz]$共享一条边$xy$；同时，$f_0$是一个好面与3-面$[xyz]$共享一条边$xz$。

(1) 如果$z$是一个$6^+$-点，那么$z$通过$f_0$给$f$转权$\frac{1}{6}$。

(2) 如果$z$是一个5-点，并且$z$关联着两条好路，那么$z$通过$f_0$给$f$转权$\frac{1}{18}$。

(3) 如果$z$是一个5-点，并且$z$只关联着一条好路，那么$z$通过$f_0$给$f$转权$\frac{1}{9}$。

我们用$ch^*(x)$定义在权转移以后的最终权，其中$x \in V \cup F$。由于点集和面集权之和在权转移的过程当中没有改变，那么我们得出结论：$\sum_{x \in V \cup F} ch(x) = \sum_{x \in V \cup F} ch^*(x) = -8$. 下面，我们通过证明最终权$ch^*(x) \geq 0$，其中$x \in V \cup F$，暗示了这对极小反例是矛盾的，也就完成了对定理4的证明。

**断言1.** *让$f$是一个好的$8^+$-面。如果$f$相邻有坏面$h$，那么$f$给$h$转权$\frac{1}{6}$，这样以后$ch^*(f) \geq 0$。*

证明. **情况1**: 设$f$是一个好的8-面，其相邻着一个3-面$[v_1v_2u]$，使得$u$不在$f$上。由于$f$是好的且图1中(a)结构不存在，则$f$至少关联着一个$4^+$-点。假设存在$4^+$-点不是$v_1$或者$v_2$，根据图 2中结构不存在，则不会相邻坏面，与题矛盾。

假设$v_1$和$v_2$中至少有一个为$4^+$-点。让$v_1$是一个$4^+$-点。如果$v_1$是一个$5^+$-点，$f$最多相邻1个坏2-面。根据断言1以及规则$R2$，$f$给$v_2$最多转$\frac{2}{3}$，给其他3-点最多转$\frac{1}{2}$，给坏面转$\frac{1}{6}$。可以得到$ch^*(f) =$

$8-4-\frac{2}{3}-6\times\frac{1}{2}-\frac{1}{6}>0$。如果$v_1$是唯一的4-点，根据图 2中结构不存在，现在$f$最多相邻1个坏面。根据规则$R3(3)$，所以，我们有$ch^*(f)=8-4-\frac{2}{3}-6\times\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$。如果$v_1$和$v_2$都是4-点，那么$ch^*(f)=8-4-6\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{6}>0$。

**情况2**: 设$f$是一个好的$k$-面，这里$k\geq 10$。我们假设$f$关联着$n$个4-点，这也就暗示了$f$最多相邻有$n$ 个坏2-面或者坏3-面；并且假设$f$相邻着$m$个坏1-面，由于$f$和坏1-面也许共同关联一个3-点，根据规则$R2$和$R3$，那么$f$给坏1-面和3-点权之和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。$f$最多给每个关联的3-点转$\frac{2}{3}$，最多给每个相邻的4-点转$\frac{1}{3}$，给每个关联的坏面转$\frac{1}{6}$。那么我们知道$f$最多给关联坏2-面的4-点转$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，$f$最多给关联坏3-面的4-点转$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$。如果$f$关联着至少一个$5^+$-点，我们有，$ch^*(f)=k-4-\frac{2}{3}\times(k-2m-n-1)-(\frac{2}{3}+\frac{2}{3})\times m-\frac{1}{2}\times n=\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}n-\frac{10}{3}\geq 0$。如果$f$不关联任何$5^+$-点，我们有$ch^*(f)=k-4-\frac{2}{3}\times(k-2m-n)-(\frac{2}{3}+\frac{2}{3})\times m-\frac{1}{2}\times n=\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}n-4$。

假设$k=10$，那么有$ch^*(f)=\frac{1}{6}n-\frac{2}{3}$。由于$f$是好的并且相邻着坏面，则有$n\geq 1$。如果$n=1$，由于图 2中(b)结构不存在，那么$f$最多关联着一个坏2-面。若$f$恰好关联着9个$A_1$-点，那么$f$只能关联着一个坏2-面，则此时剩下的点为$B_2$-点，根据规则$R3(2)$，$f$不给这个点转权，此时有$ch^*(f)=10-6-9\times\frac{2}{3}=0$。下面我们假设$f$最多关联着8个$A_1$-点，则剩下两个点为3-点和4-点。若这个4-点为$B_1$-点，$B_2$-点或者是一个关联着坏2-面的$B_3$-点，那么这个3-点为$A_4$-点。因此有$ch^*(f)=10-6-8\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$。否则，$f$最多给这个4-点转$\frac{1}{6}$，因此有，$ch^*(f)=10-6-8\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=0$。

如果$n=2$，由于$G$没有图 3的结构，$f$不相邻坏3-面。根据规则$R3$以及断言1, 则$f$给每个4-点最多转$\max\{\frac{1}{3},\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\}=\frac{1}{3}$，我们得到$ch^*(f)=10-6-8\times\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{3}=0$。

如果$n=3$，此时$f$最多相邻有3个坏2-面或者2个坏3-面。假设$f$最多关联有6个$A_1$-点，那么我们得到$ch^*(f)=10-6-6\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{6}=0$。接下来我们让$f$关联有7个$A_1$-点，此时，为奇数个$A_1$-点，此时$f$最多关联$f$最多相邻有3个坏2-面或者1个坏3-面。若$f$不相邻坏3-面，则$f$给每个4-点最多转$\max\{\frac{1}{3},\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\}=\frac{1}{3}$。那么有$ch^*(f)=10-6-7\times\frac{2}{3}-3\times\frac{1}{3}>0$。若$f$相邻着一个坏3-面，那么$f$给关联着坏3-面的两个4-点最多转$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，给剩下的4点最多转$\frac{1}{3}$。因此有$ch^*(f)=10-6-7\times\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=0$。如果$n\geq 4$时，$ch^*(f)=\frac{1}{6}n-\frac{2}{3}\geq 0$。

假设$k\geq 11$，我们有$ch^*(f)=\frac{1}{6}n-\frac{1}{3}$。由于$f$是好的并且关联着坏面，那么有$n\geq 1$。我们只需要考虑$f$关联着一个4-点的情况。由于$f$不相邻坏3-面，则$f$给这个4-点最多转$\max\{\frac{1}{3},\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\}=\frac{1}{3}$。我们可以得到，$ch^*(f)=11-6-10\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$。

假设$k\geq 12$，我们可以轻松的得到$ch^*(f)=\frac{1}{6}n\geq 0$。 □

**断言2.** 对于所有的$v\in V$，都有$ch^*(v)\geq 0$

证明. **情况1**: 设$d(v)=3$，并且有$ch(v)=3-4=-1$。由于3-点$v$最多关联着一个3-面，所以点$v$可以是$A_1$，$A_2$，$A_3$以及$A_4$-点中的其中一个。如果$v$是一个$A_1$-点，根据规则$R1$和$R2(1)$，那么它给相关联的3-面转$\frac{1}{3}$，并且从每个相关联的$8^+$-面得到$\frac{2}{3}$。我们有，$ch^*(v)=-1-\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=0$。如果$v$是一个$A_2$-点，根据规则$R2(2)$，那么它从每个相关联的$8^+$-面得到$\frac{1}{2}$。因此有，$ch^*(v)=-1+2\times\frac{1}{2}=0$。如果$v$是一个$A_3$-点，根据规则$R2(3)$，那么它从每个相关联的$8^+$-面得到$\frac{1}{2}$，并且从相关联的5-面中得到$\frac{1}{4}$。因此有，$ch^*(v)=-1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0$。如果$v$是一个$A_4$-点，根据规则$R2(4)$，那么它从每

个相关联的$6^+$-面得到$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(v) = -1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$。

**情况2**: 设$d(v) = 4$，并且有$ch(v) = 4 - 4 = 0$。在权转移的规则中，只有$R3$涉及到4-点，那么我们只考虑$v$为$B_1$- 点，$B_2$-点以及$B_3$-点的情况。如果$v$是一个$B_1$-点，关联有2个3-面，那么根据规则$R1$和$R3(1)$，$v$从每个关联的$10^+$-面中得到$\frac{1}{3}$，并且给每个关联的3-面$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(v) = 0 + 2 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$。如果$v$是一个$B_2$-点，那么根据规则$R1$和$R3(3)$，$v$从关联着$v$，但不与3-面相邻的$10^+$-面中得到$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(v) = 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$。如果$v$是一个$B_3$-点，那么根据规则$R1$和$R3(3)$，$v$从每个关联的$8^+$-面中得到$\frac{1}{6}$，并且给每个关联的3-面$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(v) = 0 - 2 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0$。

**情况3**: 设$d(v) = 5$，并且有$ch(v) = 5 - 4 = 1$。由于$v$最多关联有2个3-面，根据规则$R1$，这两个3-面各自从$v$得到$\frac{1}{3}$。根据$R4$和$R6$，那么$v$最多给其他关联的3个面$\frac{1}{9}$。因此有，$ch^*(v) = 1 - 2 \times \frac{1}{3} - 3 \times \frac{1}{9} = 0$。

**情况4**: 设$d(v) = k \geq 6$，并且有$ch(v) = k - 4$。现在，$v$最多关联有$\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$个3-面，根据规则$R1$，这些3-面各自从$v$中得到$\frac{1}{3}$。根据$R5$和$R6$，那么$v$最多给其他关联的$(d(v) - \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor)$个面$\frac{1}{6}$。因此有$ch^*(v) = k - 4 - \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor \times \frac{1}{3} - (d(v) - \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}k - 4 \geq 0$。

□

**断言3.** 对于所有$f \in F$，都有$ch^*(f) \geq 0$。

证明. **情况1**: 设$d(f) = 3$。根据规则$R1$，$f$从每个相关联的点中得到$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(v) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$。

**情况2**: 设$d(f) = 5$。如果$f$至少关联有1个$4^+$-点，根据规则$R2$，那么$f$最多给每个关联的3-点$\frac{1}{4}$。因此有，$ch^*(f) = 5 - 4 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$。如果$f$恰好关联了5个3-点，那么这个5-面最多关联有4个$A_3$-点，根据规则$R2(3)$，这些$A_3$-点各自从$f$中得到$\frac{1}{4}$。因此有，$ch^*(f) = 5 - 4 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$。

**情况3**: 设$d(f) = 6$。由于$G \in \mathcal{G}$，则有$f$关联着6个$6^+$-面。我们可以得出$f$关联着6个$A_4$-点，根据规则$R2(4)$，这些$A_4$-点各自从$f$中得到$\frac{1}{6}$。因此有，$ch^*(f) = 6 - 4 - 6 \times \frac{1}{3} = 0$。

**情况4**: 设$d(f) = 8$。由于$G \in \mathcal{G}$，则有$f$最多相邻着一个3-面。假设$f$不相邻任何3-面。那么$f$最多关联着8个3-点，这些3-点各自最多从$f$中得到$\frac{1}{2}$。因此有，$ch^*(f) = 8 - 4 - 8 \times \frac{1}{2} = 0$。假设$f$恰好相邻着一个3-面，记做$[xyz]$，使得他们的公共边为$xy$。如果$f$是好并且相邻着坏圈，根据断言1，我们知道$ch^*(f) \geq 0$。如果$f$是好并且不相邻着坏圈，那么$f$一定关联着一个$4^+$-点，此时，这个4点不会是$B_1$- 点。因此有，$ch^*(f) = 8 - 4 - 2 \times \frac{2}{3} - 5 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0$。如果$f$是坏面，此时为坏1-面，那么分别与边$xz$和$yz$相邻的两个好$8^+$-面给$f$转$\frac{1}{6}$。因此有，$ch^*(f) = 8 - 4 - 2 \times \frac{2}{3} - 6 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = 0$。

**情况5**: 设$d(f) = 9$。由于$G \in \mathcal{G}$，则有$f$不相邻任何一个3-面。那么$f$最多关联着9个3-点，这些3-点各自最多从$f$中得到$\frac{1}{2}$。因此有，$ch^*(f) = 9 - 4 - 9 \times \frac{1}{2} > 0$。

**情况6**: 设$d(f) = k \geq 10$。如果$f$是相邻着坏圈的好圈，根据断言1，我们知道$ch^*(f) \geq 0$。下面我们讨论$f$是不相邻着坏圈的好圈或者是坏圈的情况：

**情况6.1**: 设$k = 10$。假设$f$最多关联着6个$A_1$-点。根据全部规则，那么$f$最多给剩下4个点分别转$\frac{1}{2}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 6 \times \frac{2}{3} - 4 \times \frac{1}{2} = 0$。假设$f$恰好关联着7个$A_1$-点。由于有奇数个$A_1$-点，那么$f$一定关联着一个$4^+$-点，$f$最多给这个点转$\frac{1}{3}$。并且$f$ 最多给剩下两个点分别转$\frac{1}{2}$。

因此，$ch^*(f) = 10 - 4 - 7 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$。

假设$f$恰好关联着8个$A_1$-点。此时，我们让$f$相邻的4个3-面为$t_1, t_2, t_3, t_4$，其中$u_1, u_2, u_3, u_4$是分别在$t_1$,$t_2$,$t_3$, $t_4$中不在$f$上的点。假设$f$至少关联着一个$4^+$-点。如果这个$4^+$-点是$B_1$-点或者$B_2$-点，那么剩下的另一个点不可能为$A_2$-点或者$A_3$-点，$f$给这两个点最多分别转$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$。如果这个$4^+$-点不是$B_1$-点或者$B_2$-点，那么$f$给这个点最多转$\frac{1}{6}$，给剩下另一个点最多转$\frac{1}{2}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0$。如果$f$没有关联任何一个$4^+$-点，那么这两个3点一定是相邻，否则的话，这两个3-点都不是$A_2$-点或者$A_3$-点，则有$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$。

下面讨论两个3-点相邻的情况：此时$f$为坏3-面。假设$u_1, u_2, u_3, u_4$都是4-点。那么$f$相邻有3个好的10-面，这些面分别给$f$转$\frac{1}{6}$。除此之外，$f$最多相邻2个$A_2$-点。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} > 0$。假设$u_1, u_2, u_3, u_4$中至少有个点是$5^+$-点，记做$t_1$。如果$t_1$是一个$6^+$-点，根据规则$R6(1)$，那么$t_1$给$f$转$2 \times \frac{1}{6}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = 0$。如果$t_1, t_2, t_3, t_4$中只有一个点为5-点，记做$t_1$。根据规则$R6(2)$和$R6(3)$，然后$t_1$至少给$f$转$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$。除此之外，$f$相邻着至少一个好面，这个好面给$f$转$\frac{1}{6}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$。如果$t_1, t_2, t_3, t_4$中至少有2个5-点，根据规则$R6(2)$和$R6(3)$，这些5-点分别给$f$转$\frac{1}{6}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 8 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = 0$。

假设$f$恰好关联着9个$A_1$-点。现在$f$关联着一个$4^+$-点，记做$u$，此时$u$一定不为$B_1$-点。若$u$为$B_3$-点，那么$f$ 为一个坏2-面。此时，$u$会从$f$得到$\frac{1}{6}$。同时，$u$关联着一个好的$8^+$-面$h$，根据断言1，$h$通过$u$ 给$f$ 转$\frac{1}{6}$。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 9 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$。若$u$不为$B_3$-点，$f$不需要给这个点转权，因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 9 \times \frac{2}{3} = 0$。

假设$f$关联着10个$A_1$-点。图 3中(b)暗示了$f$关联着5个好的$10^+$-面。因此有，$ch^*(f) = 10 - 4 - 10 \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{6} > 0$。

**情况6.2**：设$k = 11$。显然，$f$最多关联着10个$A_1$-点。如果$f$最多关联着9个$A_1$-点，那么$f$最多给剩下两个点转$\frac{1}{2}$。因此有，$ch^*(f) = 11 - 4 - 9 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} = 0$。如果$f$最多关联着10个$A_1$-点，根据规则$R2(4)$或者$R3$，那么$f$最多得剩下来这个点$u$转$\frac{1}{3}$。因此有，$ch^*(f) = 11 - 4 - 10 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$。

**情况6.3**：设$k \geq 12$。由于$f$最多给每个关联的点转$\frac{2}{3}$。因此有，$ch^*(f) = k - 4 - k \times \frac{2}{3} \geq 0$。

□

根据断言2以及断言3，可以得出结论：$\sum_{x \in V \cup F} ch^*(x) \geq 0$，与极小反例矛盾。这样，我们完成了定理4的证明。

## 参考文献

[1] Dvořák, Z. and Postle, L. (2018) Correspondence Coloring and Its Application to List-Coloring Planar Graphs without Cycles of Lengths 4 to 8. *Journal of Combinatorial Theory*, **129**, 35-54. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.09.001

[2] Wang, W. and Lih, K. (2002) Choosability and Edge Choosability of Planar Graphs without Five Cycles. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 561-565. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80007-6

[3] Fijavž, G., Juvan, M., Mohar, B., Škrekovsi, R. (2002) Planar Graphs without Cycles of Specific Lengths. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 377-388. https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0570

[4] Liu, R., Li, X., Nakprasit, K., Sittitrai, P. and Yu, G. (2020) DP-4-Colorability of Planar Graphs without Adjacent Cycles of Given Length. *Discrete Applied Mathematics*, **277**, 245-251. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.09.012

[5] Sittitrai, P. and Nakprasit, K. (2021) Sufficient Conditions for Planar Graphs without 4-Cycles and 5-Cycles to Be 2-Degenerate. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112564. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112564

[6] Jumnongnit, P. and Pimpasalee, W. (2021) Planar Graphs without Specific Cycles Are 2-Degenerate. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112488. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112488

[7] Bernshteyn, A. and Lee, E. (2023) Weak Degeneracy of Graphs. *Journal of Graph Theory*, **103**, 607-634. https://doi.org/10.1002/jgt.22938

[8] Han, M., Wang, T., Wu, J., Zhou, H. and Zhu, X. (2023) Weak Degeneracy of Planar Graphs and Locally Planar Graphs. arXiv:2303.07901v1.

[9] Wang, T. (2023) Weak Degeneracy of Planar Graphs without 4- and 6-Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **334**, 110-118. https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.03.025