Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(1), 443-450**
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121047

Hans汉斯

整系数多项式与纽结多项式

齐园园，马郡梓，韩友发*

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月24日；发布日期：2023年1月31日

摘 要

本文主要研究了整系数多项式和纽结Jones多项式的相关性质和二者之间的关系。研究宽度为7的多项式是某纽结Jones多项式的条件。先后介绍了宽度为5的多项式和宽度为6的多项式是某纽结Jones多项式的充分必要条件，在此基础上引出了宽度为7的多项式是某纽结Jones多项式的必要条件的研究。讨论了十二次整系数多项式与Jones多项式的一些关系。若一个Laurent多项式是一个次数为12，宽度为8的整系数多项式，给出了它是Jones多项式的必要条件。

关键词

纽结，Jones多项式，整系数多项式，宽度

Knot Polynomials and Integral Coefficient Polynomials

Yuanyuan Qi, Junzi Ma, Youfa Han*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we studied the properties of integral coefficient polynomial and knot polynomial, and the relationship between them. The paper mainly studied conditions that the polynomial with breadth 7 is the Jones polynomial of a knot; introduced sufficient and necessary condition that an integral coefficient polynomial with breadth 5 or 6 is the Jones polynomial of a knot. Next, we studied necessary condition that polynomial with width 7 is the Jones polynomial of a knot; discussed

*通讯作者。

文章引用: 齐园园, 马郡梓, 韩友发. 整系数多项式与纽结多项式[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 443-450.
DOI: 10.12677/aam.2023.121047

some relations between integral coefficients polynomials of degree 12 and the Jones polynomial. If a polynomial is an integral coefficient polynomial of degree 12 and width 8, we can find the necessary conditions for it to be a polynomial.

Keywords

Knot, Jones Polynomial, Integral Coefficient Polynomial, Breadth

1. 引言

二十世纪二十年代末，J. Alexander [1]给出了第一个纽结多项式，该多项式不变量也很好地区分了纽结和链环，具有很深刻清晰的拓扑意义。此后数学家们在接下来的很长一段时间里用亚历山大多项式研究了纽结的分类性质。1969 年，约翰・康威[2]通过研究 Alexander 多项式，给出了该多项式的递推公式，简化了计算过程。后来，琼斯[3]给出了一个新型的纽结多项式，不仅计算非常简单，在某些方面是一个比 Alexander 多项式的鉴别能力强的不变量。琼斯多项式的发现促进了纽结理论的发展。由于整系数多项式与纽结多项式有着非常密切的关系，因此研究二者之间内在联系就成了热点问题。人们已经知道了一个整系数多项式是纽结 Alexander 多项式的充要条件。纽结的 Jones 多项式出现以后，很多专家学者开始研究整系数多项式与纽结 Jones 多项式内在联系。

本文包括两部分，第一部分介绍由纽结多项式和整系数多项式的相关预备知识、Jones 多项式性质等。第二部分给出了整系数多项式与纽结 Jones 多项式的性质。

2. 预备知识

本章节介绍与该论文有关的预备知识。其中包括纽结的定义、Alexander 多项式的性质、Jones 多项式的性质。

定义 1.1 把嵌入到欧式空间 R^3 或者三维球面 S^3 中的圆周 S^1 称为纽结。若给纽结规定一个方向，则得到有向纽结。由有限条互不相交的简单闭曲线构成的图形，称为链环。组成链环的每一条简单闭曲线称为该链环的一个分支，如果给链环的每一个分支规定一个方向。则称该链环为有向链环。

引理 1.1 [4]对任意一个有向环链投影图 L 均对应一个整系数多项式 $V(L)$，并满足：

1) 同痕不变性

假若有向投影图 L 与 L' 相互同痕，则它们所对应的多项式是相等的。也就是 $V(L)=V(L')$。

2) 拆接关系式

则 $t^{-1}V(L_+;t)-tV(L_-;t)=\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)V(L_0;t)$。

其中 L_+,L_-,L_0 是三个投影图只有在这一个交叉点处不同，其它都是相同的。

3) 若 O 是平凡的，则有 $V(O;t)=1$。

$V(L)$ 称为环链 L 的 Jones 多项式。

引理 1.2 [5] [6]若 L 为一个具有 n 个分支的定向链环，则有：

1) $V(L;1)=(-2)^{n-1}$；

2) 当 $n=1$ 时，$V'(L;1)=0$；

3) $V\left(L,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=(-1)^{n-1}$；

4) 若 $\mathrm{Arf}(L)$ 存在，那么 $(V;i)=\left(-\sqrt{2}\right)^{n-1}(-1)^{\mathrm{Arf}(L)}$。否则 $V(L;i)=0$；

5) $V\left(L;\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)=\pm\left(i\sqrt{3}\right)^{\mathrm{Dim}\,H_1(D_L,Z_3)}$。

3. 整系数多项式与 Jones 多项式性质

首先，研究宽度为 7 的多项式是某纽结 Jones 多项式的条件。首先介绍了宽度为 5 的多项式是某纽结 Jones 多项式的充分必要条件，其次介绍了宽度为 6 的多项式是某纽结 Jones 多项式的充分必要条件，最后研究了宽度为 7 的多项式是某纽结 Jones 多项式的必要条件。总是假设纽结的 Arf 不变量存在，而且 $\mathrm{Dim}\,H_1(D_L,Z_3)\not\equiv 0 \bmod 2$。

引理 2.1 [3]多项式 $f(t)=a_6t^6+a_5t^5+a_4t^4+a_3t^3+a_2t^2+a_1t$ （$a_i\in Z$，$i=1,2,\cdots,6$，$a_6\neq 0$）是某纽结多项式的充分必要条件 $a_6=-1,a_5=1,a_4=-1,a_3=2,a_2=-1,a_1=1$。

引理 2.2 [3]多项式 $f(t)=a_4t^4+a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0+a_{-1}t^{-1}+a_{-2}t^{-2}$ （$a_i\in Z$，$i=-2,-1,\cdots,4$，$a_{-2},a_4\neq 0$）是某纽结多项式的充分必要条件 $a_4=1,a_3=-1,a_2=1,a_1=-2,a_0=2,a_{-1}=-1,a_{-2}=1$。

以上分别是宽度为 5，6 的多项式是某纽结 Jones 多项式的充分必要条件，下面本文研究宽度为 7 的多项式是某纽结 Jones 多项式的条件。

定理 2.1 设多项式 $f(t)=a_{10}t^{10}+a_9t^9+a_8t^8+a_7t^7+a_6t^6+a_5t^5+a_4t^4+a_3t^3$ （$a_i\in Z$，$i=3,4,\cdots,10$，$a_3,a_{10}\neq 0$），则 $f(t)$ 是某纽结的 Jones 多项式的必要条件是

$$a_{10}=-2a_3,\ a_9=3a_3-1,\ a_8=-3a_3+1,\ a_7=5a_3-2$$
$$a_6=-4a_3+2,\ a_5=3a_3-1,\ a_4=-3a_3+2.$$

或者

$$a_{10}=a_3-3,\ a_9=-3a_3+7,\ a_8=-3,\ a_7=-2a_3=5,\ a_6=-1,\ a_5=3.$$

证明：由引理 1.1 和引理 1.2，若

$$f(t)=a_{10}t^{10}+a_9t^9+a_8t^8+a_7t^7+a_6t^6+a_5t^5+a_4t^4+a_3t^3$$

（$a_i\in Z$，$i=3,4,\cdots,10$，$a_3,a_{10}\neq 0$）是某纽结的 Jones 多项式，则

$$f(1)=a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3=1$$

$$f'(1)=10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4+3a_3=0$$

$$\begin{aligned}f\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}\right)&=a_{10}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{10}+a_9\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{9}+\cdots+a_3\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{3}\\&=\left(-\frac{1}{2}a_{10}+a_9-\frac{1}{2}a_8-\frac{1}{2}a_7+a_6-\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4+a_3\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(a_{10}-a_8+a_7-a_5+a_4\right)\end{aligned}$$

$$f(i)=a_{10}i^{10}+a_9i^9+\cdots+a_3i^3=\left(-a_{10}+a_8-a_6+a_4\right)+i\left(a_9-a_7+a_5-a_3\right)=\pm 1$$

1) 考虑 $f(i)=1$ 的情况($\operatorname{Arf}(L)=0$)。

可以得到以下方程组：

$$\begin{cases} a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3=1 \\ 10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4+3a_3=0 \\ -a_{10}+2a_9-a_8-a_7+2a_6-a_5-a_4+2a_3=2 \\ a_{10}-a_8+a_7-a_5+a_4=0 \\ -a_{10}+a_8-a_6+a_4=1 \\ a_9-a_7+a_5-a_3=0 \end{cases}$$

化为增广矩阵后变换得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{化简}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将矩阵知识应用于上述非齐次方程，可以计算出各未知数系数之间的关系：

$$a_{10}=a_4+a_3-2,\ a_9=-a_4+1,\ a_8=a_4-1$$
$$a_7=-2a_4-a_3+2,\ a_6=a_4,\ a_5=-a_4+1.$$

由引理 1.2 知：

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right) &= a_{10}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{10}+a_9\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{9}+\cdots+a_3\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{3} \\ &= \left(-\frac{1}{2}a_{10}-a_9-\frac{1}{2}a_8+\frac{1}{2}a_7+a_6+\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4-a_3\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_{10}+a_8+a_7-a_5-a_4\right) \\ &= \left(-a_4-3a_3+2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-2a_3+2\right) \end{aligned}$$

由 $\operatorname{Dim} H_1\left(D_L, Z_3\right) \neq 0 \bmod 2$ ，则有 $-a_4-3a_3+2=0$ ，所以有 $a_4=-3a_3+2$ ，即

$$a_{10}=-2a_3,\ a_9=3a_3-1,\ a_8=-3a_3+1,\ a_7=5a_3-2$$
$$a_6=-4a_3+2,\ a_5=3a_3-1,\ a_4=-3a_3+2.$$

2) 考虑 $f(i)=-1$ 的情况($\operatorname{Arf}(L)=1$)。

可以得到以下方程组：

$$\begin{cases} a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3=1 \\ 10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4+3a_3=0 \\ -a_{10}+2a_9-a_8-a_7+2a_6-a_5-a_4+2a_3=2 \\ a_{10}-a_8+a_7-a_5+a_4=0 \\ -a_{10}+a_8-a_6+a_4=-1 \\ a_9-a_7+a_5-a_3=0 \end{cases}$$

将矩阵知识应用于上述非齐次方程，可以计算出各未知数系数之间的关系：

$$a_{10}=a_4+1,\ a_9=-3a_4+1,\ a_8=a_4-a_3-1$$
$$a_7=-2a_4+1,\ a_6=a_4-a_3+1,\ a_5=-a_4+a_3+1.$$

由引理 1.2 知：

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right) &= a_{10}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{10}+a_9\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{9}+\cdots+a_3\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{3} \\ &= \left(-\frac{1}{2}a_{10}-a_9-\frac{1}{2}a_8+\frac{1}{2}a_7+a_6+\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4-a_3\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_{10}+a_8+a_7-a_5-a_4\right) \\ &= \left(a_4-a_3+2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-2a_4-2a_3\right) \end{aligned}$$

由 $\operatorname{Dim} H_1\left(D_L, Z_3\right) \not\equiv 0 \bmod 2$，则 $a_4-a_3+2=0$。即 $a_4=a_3-2$，

$$a_{10}=a_3-3,\ a_9=-3a_3+7,\ a_8=-3,\ a_7=-2a_3+5,\ a_6=-1,\ a_5=3.$$

从而定理得证。

注： 当 $f(i)=1, \operatorname{Dim} H_1\left(D_L, Z_3\right) \equiv 0 \bmod 2$ 时，可得 $a_3=1$，取 $a_4=0$，则纽结 7_3 (图 1) Jones 多项式符合定理要求。

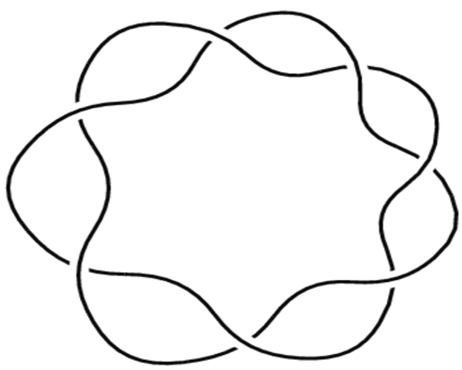

Figure 1. Kont 7_3
图 1. 纽结 7_3

推论 2.1 设多项式 $f(t)=a_{10}t^{10}+a_9t^9+a_8t^8+a_7t^7+a_6t^6+a_5t^5+t^3$ ($a_i \in Z$，$i=3,4,\cdots,10$，$a_3, a_{10} \neq 0$)，则 $f(t)$ 是某纽结的 Jones 多项式的充分必要条件是 $a_{10}=-1, a_9=1, a_8=-1, a_7=1, a_6=-1, a_5=1$。

推论 2.2 $\operatorname{Arf}\left(7_3\right)=0$。

下面讨论十二次整系数多项式与 Jones 多项式的一些关系。讨论若一个 Laurent 多项式是一个次数为 12，宽度为 8 的整系数多项式，则给出它是 Jones 多项式的必要条件。

定理 2.2 若 $f(t)=a_{12}t^{12}+a_{11}t^{11}+a_{10}t^{10}+a_9t^9+a_8t^8+a_7t^7+a_6t^6+a_5t^5+a_4t^4$ ($a_{12} \neq 0$，$a_i \in Z$，

$i=4,5,\cdots,12$)是某组结的 Jones 多项式，则系数满足下列条件之一：

1) $$a_{12}=-\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2},\ a_{11}=\frac{3}{2}a_5+a_4-\frac{1}{2},\ a_{10}=-\frac{3}{2}a_5-\frac{3}{2},$$
$$a_9=2a_5-3a_3+1,\ a_8=-\frac{5}{2}a_5-a_4+\frac{1}{2},\ a_7=\frac{3}{2}a_5-a_4+\frac{3}{2}$$

2) $$a_{12}=-\frac{1}{2}a_5-1,\ a_{11}=\frac{3}{2}a_5+a_4,\ a_{10}=-\frac{3}{2}a_5-1$$
$$a_9=3a_5+1,\ a_8=-\frac{5}{2}a_5-a_4,\ a_7=\frac{3}{2}a_5-a_4+1$$

证明：若 $f(t)=a_{12}t^{12}+a_{11}t^{11}+a_{10}t^{10}+a_9t^9+a_8t^8+a_7t^7+a_6t^6+a_5t^5+a_4t^4$（$a_{12}\neq 0$，$a_i\in Z$，$i=4,5,\cdots,12$)为某组结的 Jones 多项式，则

$$f(1)=a_{12}+a_{11}+a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=1$$

$$f'(1)=12a_{12}+11a_{11}+10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4=0$$

$$\begin{aligned}f\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)&=\left(a_{12}-\frac{1}{2}a_{11}-\frac{1}{2}a_{10}+a_9-\frac{1}{2}a_8-\frac{1}{2}a_7+a_6-\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4\right)\\&\quad+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_{11}+a_{10}-a_8+a_7-a_5+a_4\right)\\&=1\end{aligned}$$

$$f(i)=\left(a_{12}-a_{10}+a_8-a_6+a_4\right)+i\left(-a_{11}+a_9-a_7+a_5\right)=\pm 1$$

1) 考虑 $f(i)=1$ 的情况

可以得到以下方程组：

$$\begin{cases}a_{12}+a_{11}+a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=1\\12a_{12}+11a_{11}+10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4=0\\2a_{12}-a_{11}-a_{10}+2a_9-a_8-a_7+2a_6-a_5-a_4=2\\-a_{11}+a_{10}-a_8+a_7-a_5+a_4=0\\a_{12}-a_{10}+a_8-a_6+a_4=1\\-a_{11}+a_9-a_7+a_5=0\end{cases}$$

解方程组得：

$$a_{12}=a_6+a_5-1,\ a_{11}=-a_6+a_4,\ a_{10}=a_6-2$$
$$a_9=-2a_6-a_5+2,\ a_8=a_6-a_5-a_4,\ a_7=-a_6-a_4+2$$

由引理 1.2 知：

$$\begin{aligned}f\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)&=a_{12}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{12}+a_{11}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{11}+\cdots+a_4\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{4}\\&=\left(a_{12}+\frac{1}{2}a_{11}-\frac{1}{2}a_{10}-a_9-\frac{1}{2}a_8+\frac{1}{2}a_7+a_6+\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4\right)\\&\quad+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_{11}-a_{10}+a_8+a_7-a_5-a_4+a_2+a_1\right)\\&=\left(2a_6+3a_5-1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-2a_5-4a_4+4\right)\end{aligned}$$

从而有 $2a_6+3a_5-1=0$，即 $a_6=-\frac{3}{2}a_5+\frac{1}{2}$，所以有

$$a_{12}=-\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2},\ a_{11}=\frac{3}{2}a_5+a_4-\frac{1}{2},\ a_{10}=-\frac{3}{2}a_5-\frac{3}{2}$$
$$a_9=2a_5-3a_3+1,\ a_8=-\frac{5}{2}a_5-a_4+\frac{1}{2},\ a_7=\frac{3}{2}a_5-a_4+\frac{3}{2}$$

2) 考虑 $f(i)=-1$ 的情况

可以得到以下方程组：

$$\begin{cases} a_{12}+a_{11}+a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=1 \\ 12a_{12}+11a_{11}+10a_{10}+9a_9+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4=0 \\ 2a_{12}-a_{11}-a_{10}+2a_9-a_8-a_7+2a_6-a_5-a_4=2 \\ -a_{11}+a_{10}-a_8+a_7-a_5+a_4=0 \\ a_{12}-a_{10}+a_8-a_6+a_4=-1 \\ -a_{11}+a_9-a_7+a_5=0 \end{cases}$$

可得解为：

$$a_{12}=a_6+a_5-2,\ a_{11}=-a_6+a_4+1,\ a_{10}=a_6-2$$
$$a_9=-2a_6-a_5+3,\ a_8=a_6-a_5-a_4-1,\ a_7=-a_6-a_4+2$$

由引理 1.2 知：

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right) &= a_{12}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{12}+a_{11}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{11}+\cdots\cdots+a_4\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{4} \\ &= \left(a_{12}+\frac{1}{2}a_{11}-\frac{1}{2}a_{10}-a_9-\frac{1}{2}a_8+\frac{1}{2}a_7+a_6+\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_4\right) \\ &\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-a_{11}-a_{10}+a_8+a_7-a_5-a_4+a_2+a_1\right) \\ &= \left(2a_6+3a_5-2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-2a_5-4a_4+4\right) \end{aligned}$$

从而有 $2a_6+3a_5-2=0$，即 $a_6=-\frac{3}{2}a_5+1$，所以有

$$a_{12}=-\frac{1}{2}a_5-1,\ a_{11}=\frac{3}{2}a_5+a_4,\ a_{10}=-\frac{3}{2}a_5-1$$
$$a_9=3a_5+1,\ a_8=-\frac{5}{2}a_5-a_4,\ a_7=\frac{3}{2}a_5-a_4+1$$

综上，定理证毕。

注：由于整系数多项式与组结多项式的内在联系，所以研究它们的关系一直是纽结理论的热点课题。本文研究了次数是十次和十二次且它们的宽度分别是 7 和 8 的整系数多项式性质，给出这些多项式是某纽结 Jones 多项式的必要条件，进而可以研究某些纽结的 Arf 不变量性质。随着对纽结多项式性质的深入研究可能会得到更好的判别方法。

基金项目

受国家自然科学基金(No. 11471151，No. 12026411)，辽宁省教育厅(No. LJ2019004)的资助。

参考文献

[1] Alexander, J.W. (1928) Topological Invariants for Knots and Links. *Transactions of the American Mathematical Society*, **30**, 275-306. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1

[2] Conway, J.H. (1970) An Enumeration of Knots and Links, and Some of Their Algebraic Properties. In: *Computational Problems in Abstract Algebra*, Pergamon Press, New York, 329-358. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-012975-4.50034-5

[3] Jones, V.F.R. (1985) A Polynomial Invariants for Knots via Von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2

[4] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1991: 391-429.

[5] Han, Y.F. and Ma, X.S. (2010) Knots and Polynomials. *Journal of Mathematical Research & Exposition*, **30**, 257-264.

[6] 陶志雄. Jones 多项式的零点[J]. 数学年刊, 2011, 32A(1): 63-70.