

# $T_{11}$ 的不可定向亏格的计算

杨夏懿<sup>1\*</sup>, 晁福刚<sup>1,2#</sup>

<sup>1</sup>商洛学院数学与计算机应用学院, 陕西 商洛

<sup>2</sup>华东师范大学数学系, 上海

收稿日期: 2023年10月8日; 录用日期: 2023年11月3日; 发布日期: 2023年11月10日

## 摘要

一个图 $G$ 的亏格 $g(G)$  (或不可定向亏格 $\tilde{g}(G)$ , 也称叉冒数)是最小的整数 $g$  (或 $k$ ), 使得 $G$ 可以嵌入到曲面 $S_g$  (或 $N_k$ )上, 且边为两两不交的简单闭曲线。借助于曲面嵌入图理论中的剪开和粘合的技巧, 得到了11-圈的立方体图 $T_{11}$ 的不可定向亏格。

## 关键词

嵌入, 亏格, 克莱因瓶

# The Computation of the Nonorientable Genus of $T_{11}$

Xiayi Yang<sup>1\*</sup>, Fugang Chao<sup>1,2#</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics and Computer Application, Shangluo University, Shangluo Shaanxi

<sup>2</sup>Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai

Received: Oct. 8<sup>th</sup>, 2023; accepted: Nov. 3<sup>rd</sup>, 2023; published: Nov. 10<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

The genus  $g(G)$  (or nonorientable genus  $\tilde{g}(G)$ , is also called crosscap number) of a graph  $G$  is the smallest number  $g$  (or  $k$ ) such that  $G$  has an embedding in  $S_g$  (or  $N_k$ ) and the edges are simple closed curves which do not intersect except at a common vertex. We obtained the nonorientable genus of the cubic graph of 11-cycle,  $T_{11}$ , using the technique of cut and identification in the theory of embedded graphs surfaces.

\*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 杨夏懿, 晁福刚.  $T_{11}$ 的不可定向亏格的计算[J]. 应用数学进展, 2023, 12(11): 4617-4621.

DOI: 10.12677/aam.2023.1211452

## Keywords

Embedding, Genus, The Klein Bottle

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

曲面  $S$  是一个无边界的、紧致的、连通的 2-维流形。曲面分类定理[1]告诉我们：每个曲面或者同胚于  $S_g$ ，添加了  $g$  个手柄的球，或者同胚于  $N_k$ ，添加了  $k$  个叉帽的球。一个图  $G$  的亏格  $g(G)$  (或不可定向亏格  $\tilde{g}(G)$ )，也称叉帽数是最小的整数  $g$  (或  $k$ )，使得  $G$  可以嵌入到  $S_g$  (或  $N_k$ ) 上，且边为两两不交的简单闭曲线。记  $n, e, f$  分别为图  $G$  的边数、点数和面数，经典的 Euler 公式告诉我们： $n - e + f = 2 - \gamma$ ，其中  $\gamma$  为图  $G$  的 Euler 亏格。

曲面  $S$  上的一个嵌入图是将一个图嵌入到曲面  $S$  上，使得对图中所有的边，除去一个公共点，都是边不交的多边形的边。一个三角剖分是指一个嵌入图的每个面都是一个三角形。一个平面的近三角剖分图是指嵌入到平面上的一个图，除了可能的一个外面，都以一个三角形为边界。外面以一个圈为边界。

在这里，我们计算了由 11-圈添加距离不大于 3 的所有两个点之间的边得到的图，即  $T_{11}$  的亏格。C. Thomassen [2]已经注意到亏格的计算是 NP 问题中的一类，所以是非常困难的一件事。在这里我们借助于嵌入的技巧，计算出了  $T_{11}$  的不可定向亏格为 3。

本文研究的图都是简单连通无向图，所有的专业术语均可参考文献[3]。

## 2. 主要定理及证明

M. O. Albertson 和 J. P. Hutchinson [4]在研究图的独立数和点数的比值时发现了一个 6-正则，6-色临界的可以嵌入到环面上的图，并把它命名为  $J$ ，后来知道到这个图同构于  $C_{11}^3$ ，也就是 11-圈的立方图。C. Thomassen [5]称这个图为  $T_{11}$ ，在这里，我们采用 C. Thomassen 的命名。图 1 给出了  $T_{11}$  在环面  $S_1$  上的一种嵌入方法。我们将证明  $T_{11}$  不能嵌入在克莱因瓶  $N_2$  上，也就是说， $T_{11}$  的不可定向亏格为 3。

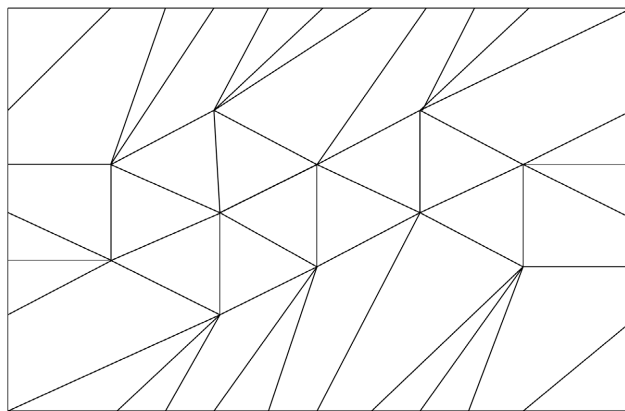


Figure 1. A method of embedding  $T_{11}$  on a torus  $S_1$

图 1.  $T_{11}$  在环面  $S_1$  上的一种嵌入方法

若  $G$  是简单的平面图, 由 Euler 公式  $n - e + f = 2$ , 可以推出  $e \leq 3n - 6$ , 等号成立当且仅当  $G$  是一个平面三角剖分图。由于  $T_{11}$  有 11 个点, 33 条边, 所以它不能嵌入到平面上。图 1 给出了它在环面上的一种嵌入方法, 所以下述的命题成立。

**命题 1.1**  $g(T_{11}) = 1$ 。

下面的一个简单的观察表明了一个任意给定的图的亏格与不可定向亏格之间的关系。如果知道图的可定向亏格, 在计算图的不可定向亏格的过程中, 借助于这个公式, 我们可以得到图的不可定向亏格的一个上界。

**命题 1.2** 对于不是树的每个连通图  $G$ , 有  $\tilde{g}(G) \leq 2g(G) + 1$ 。

**证明** 令  $\Pi$  是有正的符号的  $G$  的一个最小亏格嵌入。选择属于  $G$  中的一个圈的任意一条边  $e_0 \in E(G)$ , 并改变它的符号。这决定了  $G$  的一个不可定向嵌入  $\Pi'$ 。不包含  $e_0$  的  $\Pi$ -面迹同时也是  $\Pi'$ -面迹。记  $n, e, f$  和  $n', e', f'$ , 分别为嵌入  $\Pi$  和  $\Pi'$  的点数、边数和面迹数。改变这条边的符号以后, 嵌入  $\Pi'$  的点数和边数不会发生变化, 面迹数最多增加 1, 所以  $f' \leq f + 1$ 。

$\tilde{g}(G) = 2 - (n' - e' + f') \leq 2 - (n - e + f - 1) = 2 - (2 - 2g - 1) = 2g + 1$ , 即  $\tilde{g}(G) \leq 2g(G) + 1$ 。

设边  $e = uv$ , 它在  $\pi_u$  和  $\pi_v$  中的旋转方向可能一致, 也可能不一致。若  $e$  旋转方向一致, 则  $e$  对应于 1, 反之  $e$  对应于 -1。由面迹的定义, 我们可以得到下面的命题。

**命题 1.3** 如果  $W$  是一个  $\Pi$ -面迹, 那么  $W$  以负号出现的的数目是偶数。

称  $\Pi$ -嵌入图  $G$  的一个圈  $C$  是  $\Pi$ -单侧圈, 如果它有奇数条有负号的边。否则  $C$  是  $\Pi$ -双侧圈。令  $C = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{l-1} e_l v_l$  是一个  $\Pi$ -嵌入图  $G$  的  $\Pi$ -双侧圈。假设  $\Pi$  的符号在  $C$  上是正的。我们定义左子图和右子图如下: 对  $i = 1, \dots, l$ , 如果  $e_{i+1} = \pi_{v_i}^{k_i}(e_i)$ , 那么称所有的边  $\pi_{v_i}(e_i), \pi_{v_i}^2(e_i), \dots, \pi_{v_i}^{k_i-1}(e_i)$  在  $C$  的左侧。 $C$  的左子图, 记作  $G_l(C, \Pi)$  (或仅记作  $G_l(C)$ ), 定义为所有包含  $C$  的左侧的一条边的  $C$ -桥的并。右子图  $G_r(C, \Pi)$  (或仅记作  $G_r(C)$ ) 可以类似地定义。称  $\Pi$ -嵌入图  $G$  的一个圈  $C$  是  $\Pi$ -可分离的 (或曲面可分离的), 如果  $C$  是  $\Pi$ -双侧的且  $G_l(C)$  和  $G_r(C)$  没有公共边。

现在假定  $C$  是  $\Pi$ -嵌入图  $G$  的一个曲面不可分离圈。如果  $C$  是  $\Pi$ -双侧圈, 令  $\bar{G}$  是将图  $G$  的一个圈  $C$  换成  $C$  的两个拷贝, 使得  $C$  的左侧的所有的边和  $C$  的一个拷贝关联,  $C$  的右侧的所有的边和  $C$  的另一个拷贝相关联。我们说  $\bar{G}$  是由  $G$  沿着  $C$  剪开 (或  $\Pi$ -剪开) 得到的图。嵌入  $\Pi$  定义了  $\bar{G}$  的一个嵌入 (我们仍记作  $\Pi$ )。

类似地, 我们可以定义沿着一个  $\Pi$ -单侧圈剪开。如果  $C = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_0$  是这样一个圈, 我们首先和双侧圈的情形一样定义  $C$  的每个点处的左侧的边 (和右侧的边): 如果需要的话, 我们可以取一个等价嵌入, 我们可以假定  $\Pi$  的符号  $\lambda$  满足: 对  $1 \leq i < k$ , 有  $\lambda(e_i) = 1$ , 和  $\lambda(e_k) = -1$ 。然后我们使用  $C$  上的连续边对  $e_i, e_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) 来定义与  $v_i$  和  $e_i$  与  $e_{i+1}$  相关联的  $C$  的左侧的边。然后将  $G$  中的  $C$  换成圈  $\bar{C} = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k \bar{v}_0 \bar{e}_1 \bar{v}_1 \cdots \bar{e}_k v_0$  来构造图  $\bar{G}$ , 这个圈的长度是  $C$  的两倍。 $C$  的左侧的边与  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$  关联,  $C$  的右侧的边与  $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}$  相关联。我们扩展  $\lambda$ , 置  $\lambda(\bar{e}_1) = \dots = \lambda(\bar{e}_{k-1}) = 1$  和  $\lambda(\bar{e}_k) = -1$ , 因此得到  $\bar{G}$  的一个嵌入  $\bar{\Pi}$ 。

**命题 1.4** 假定  $C$  是一个  $\Pi$ -嵌入图  $G$  的一个  $\Pi$ -曲面不可分离圈。令  $\bar{G}$  是沿着  $C$  剪开得到的图,  $\bar{\Pi}$  为它的嵌入。那么所有的  $\bar{\Pi}$ -面迹都是  $G$  中的  $\Pi'$ -面迹, 其中  $C$  的边被它在  $\bar{G}$  中的边所替代。如果  $C$  是  $\Pi$ -双侧圈, 那么  $eg(\bar{\Pi}) = eg(\Pi) - 2$ , 且  $C$  的两个拷贝是新的  $\bar{\Pi}$ -面圈。如果  $C$  是  $\Pi$ -单侧圈, 那么  $eg(\bar{\Pi}) = eg(\Pi) - 1$ , 且  $\bar{C}$  是  $\bar{G}$  中的一个面圈。

**命题 1.5**  $T_{11}$  是局部 Hamilton 的, 也就是说, 对  $T_{11}$  的每个点, 由  $v$  的邻点诱导的  $G$  的子图  $N(v, G)$  有一个 Hamilton 圈。

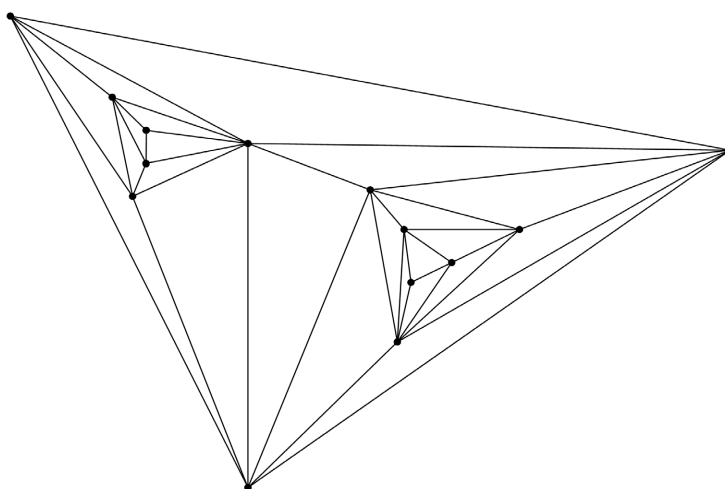
**定理 1.6**  $\tilde{g}(T_{11})=3$ 。

**证明**由命题 1.1 和命题 1.2 知,  $\tilde{g}(T_{11})=3$ 。所以仅需证明  $T_{11}$  不能嵌入到克莱因瓶  $N_2$  上。

假设  $\Pi=(\pi, \lambda)$  是  $T_{11}$  在克莱因瓶  $N_2$  上的一个嵌入。选择一个点  $x \in T_{11}$ 。我们可以假定对  $x$  的每个邻点  $x'$ , 有  $\lambda(xx')=1$ 。记  $n, e, f$  分别为  $T_{11}$  在克莱因瓶  $N_2$  上的嵌入的点数、边数和面数, 由克莱因瓶  $N_2$  上的 Euler 公式  $n-e+f=0$ , 知道这个嵌入有 22 条面迹, 且所有的面迹均为三角形。这意味着有一个与包含  $x$  的六个面三角形边不交的 3-面圈  $T=wyz$ 。由命题 1.3 知,  $T$  中有一条边有正的符号, 不妨说  $\lambda(yz)=1$ 。从而 3-圆  $C=xyz$  是  $\Pi$ -双侧的非面圈。假设  $C$  是面圈, 那么  $C$  的内部和外部均有节点, 从而  $T_{11}-C$  有另一个分支, 这是不可能的。进一步, 还有  $C$  是诱导的不可分离圈。由命题 1.4 知, 沿着  $C$  剪开, 可以得到一个图  $G'$  在 Euler 亏格为 0 的曲面, 即球面, 上的一个嵌入  $\Pi'$ 。

记  $T_1$  和  $T_2$  为  $C$  在  $G'$  中的拷贝, 对  $i=1,2$ , 令  $x_i, y_i, z_i$  分别是  $x, y, z$  在  $T_i$  中的拷贝。令  $G'=G-T_1-T_2$  是由  $G$  删除  $T_1$  和  $T_2$  中的点及其关联的边得到的图, 则  $G'$  中与  $x, y, z$  的距离不大于 3 的点, 或者与  $x_1, y_1, z_1$  相邻, 或者与  $x_2, y_2, z_2$  相邻。因此  $T_1$  和  $T_2$  分别被嵌入到  $G'$  的两个不同的面  $F_1$  和  $F_2$  中。

由于  $G'$  是平面三角剖分图, 所以  $F_i$  包含  $T_i$  以及相应的 6 条边。进一步,  $T_1$  中的每一个点与  $F_1$  的某个点相邻  $T_2$  中的每一个点与  $F_2$  的某个点相邻。因此我们可以得到  $G'$  在平面上的一种嵌入方式, 如图 2 所示。



**Figure 2.** Plane triangulation embedding of  $G'$

**图 2.**  $G'$  的平面三角剖分嵌入

现在粘合  $T_1$  和  $T_2$ , 使得相应的图为  $T_{11}$ 。因为  $T_1$  和  $T_2$  中的点的度数分别为 3, 4, 5, 所以仅有一种粘合的方式, 粘合产生  $T_{11}$  在环面上的嵌入。这与克莱因瓶  $N_2$  的不可定向性相矛盾。

确定图的最小亏格问题是 NP-困难的。目前已被解决的图类多为完全图、完全二部图等特定图类。本文借助于曲面嵌入图理论中的剪开和粘合的技巧, 得到了 11-圈的立方体图  $T_{11}$  的不可定向亏格。经典的公式在组合计数中得到的结果往往比较粗糙, 剪开和粘合的技巧是从图的结构出发, 可以得到较为精确的结果。图的亏格问题还与理论计算机科学的研究有密切的关系, 图的结构分析将在研究中起着重要的作用。

### 基金项目

国家自然科学基金项目(11171114)。

---

## 参考文献

- [1] Thomassen, C. (1992) The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces. *The American Mathematical Monthly*, **99**, 863-864. <https://doi.org/10.1080/00029890.1992.11995944>
- [2] Thomassen, C. (1989) The Graph Genus Problem is NP-Complete. *Journal of Algorithms*, **10**, 568-576. [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(89\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0196-6774(89)90006-0)
- [3] Mohar, B. and Thomassen, C. (2001) *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, Baltimore. <https://doi.org/10.56021/9780801866890>
- [4] Albertson, M.O. and Hutchinson, J.P. (1977) The Independence Ratio and Genus of a Graph. *Transactions of the American Mathematical Society*, **226**, 161-173. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0437372-X>
- [5] Thomassen, C. (1994) Five-Coloring Graphs on the Torus. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **62**, 11-33. <https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1052>