

阈值策略下一类Lotka-Volterra Filippov型植物传染病模型的全局动力学

冷 轩, 代安定, 李 游, 晏日安, 曹志豪

湖南城市学院理学院, 湖南 益阳

收稿日期: 2023年10月11日; 录用日期: 2023年11月6日; 发布日期: 2023年11月15日

摘 要

本文研究了阈值策略下一类Lotka-Volterra Filippov型植物传染病模型的全局动力学, 当感染植株的数量和易感植株的数量比例小于数值 k 时, 不采取措施, 传染病最终会衍变成病; 当感染植株的数量和易感植株的数量比例大于数值 k 时, 采取等比例种植易感植株和移除感染植株的方式控制传染病传播。通过不同参数的取值, 得到四种情形, 分别分析了这四种情形下系统的全局动力学行为, 得到四种结果。

关键词

传染病模型, Lyapunov函数, 全局渐近稳定

Global Dynamics of a Lotka-Volterra Filippov-Type Plant Infectious Disease Model under Threshold Strategy

Xuan Leng, Anding Dai, You Li, Ri'an Yan, Zhihao Cao

School of Science, Hunan City University, Yiyang Hunan

Received: Oct. 11th, 2023; accepted: Nov. 6th, 2023; published: Nov. 15th, 2023

Abstract

In this paper, the global dynamics of the Lotka-Volterra Filippov plant infectious disease model under the threshold strategy are studied, and when the ratio of the number of infected plants and the number of susceptible plants is less than the value k , if no measures are taken, the infectious disease will eventually evolve into a disease. When the ratio of the number of infected plants to

the number of susceptible plants is greater than the value k , the spread of infectious diseases is controlled by planting susceptible plants and removing infected plants in equal proportions. Through the values of different parameters, four situations are obtained, and the global dynamic behavior of the system in these four situations is analyzed respectively, and four results are obtained.

Keywords

Infectious Disease Model, Lyapunov Function, Global Asymptotic Stability, Qualitative Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 模型介绍

本文研究了阈值策略下一类特殊的 Lotka-Volterra Filippov 型植物传染病模型[1] [2], 其中被移除的感染植物的数量等于重新种植的易感植物的数量, 具体模型为

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \beta S(t)I(t) - \eta_1 S(t) + v\phi(S, I)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \eta_2 I(t) - v\phi(S, I)I(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $S(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示 t 时刻易感植株和感染植株的数量; A 表示易感植株的种植数量, 为一常数; $\beta > 0$ 表示传染病感染率; $\eta_1 > 0$ 和 $\eta_2 > 0$ 分别表示易感植株和感染植株的自然死亡率; $v > 0$ 去除率; $\phi(S, I)$ 是控制函数, 具体表达式为

$$\phi(S, I) = \begin{cases} 0, & \frac{I}{S} < k, \\ 1, & \frac{I}{S} > k, \end{cases}$$

其中 $k \geq 0$ 表示感染植株的经济阈值与易感比率。当易感植株和感染植株的比例小于 k 时, 不需要采取任何控制措施。一旦比例超过经济阈值 k , 就立刻采取措施移除感染植株同时补种同样数量的易感植株, 以控制病虫害。在本文中, 我们假设 $\eta_1 < \eta_2$ 意味着易感植物的自然死亡率小于感染植物的自然死亡率。

分界线记为

$$\Sigma = \{(S, I) \in R_+^2 \mid I = Sk\}$$

它把系统(1.1)划分为两个光滑的区域

$$G_1 = \{(S, I) \in R_+^2 \mid I < Sk\}, G_2 = \{(S, I) \in R_+^2 \mid I > Sk\}$$

其中 $R_+^2 = \{(S, I) \mid S > 0, I > 0\}$ 。因此在区域 G_1 上模型(1.1)变为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I, \end{cases} \quad I < Sk \quad (1.2)$$

在区域 G_2 上模型(1.1)变为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S + vI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I - vI, \end{cases} \quad I > Sk, \quad (1.3)$$

2. 预备知识

由于(1.1)右端的不连续性, 在本文中, 定义了一个具有初始条件的(1.1)的解。设 $\overline{co}[\phi(S, I)]$ 为 $\phi(S^-, I^-)$ 凸闭包, 则 $\overline{co}[\phi(S, I)] = [\phi(S^-, I^-), \phi(S^+, I^+)]$, 其中 $\phi(S^-, I^-)$ 和 $\phi(S^+, I^+)$ 分别表示 ϕ 在的左右极限[3]。

定义 2.1 [4]. 若向量函数 $(S(t), I(t))$ 在 $[0, T)$, $T \in (0, +\infty)$ 的任何子区间 $[t_1, t_2]$ 上绝对连续, 满足初值条件 $S(0) = S_0 > 0$ 且 $I(0) = I_0 > 0$, 并且存在可测函数 $\gamma(t): [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对几乎所有的 $t \in [0, T)$ 有 $\gamma(t) \in \overline{co}[\phi(S(t), I(t))]$ 和

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \beta S(t)I(t) - \eta_1 S(t) + v\gamma(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \eta_2 I(t) - v\gamma(t)I(t), \end{cases}$$

则在 $[0, T)$, $T \in (0, +\infty)$ 上的向量函数 $(S(t), I(t))$ 是系统(1.1)带初值 $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ 的解。

引理 2.1 对系统(1.1)在 \mathbb{R}_+^2 中任意的初值条件下, 集合 $\Omega = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S + I \leq \frac{A}{\lambda} \right\}$ 是一个正不变吸引集, 其中 $\lambda = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ 。

证明由(1.1)可知

$$(S + I)' = A - \eta_1 S - \eta_2 I \leq A - \lambda(S + I)$$

两边积分得

$$S(t) + I(t) \leq \frac{A}{\lambda} + \left(S_0 + I_0 - \frac{A}{\lambda} \right) e^{-\lambda t}$$

若 $S_0 + I_0 \leq \frac{A}{\lambda}$, 则 $S(t) + I(t) \leq \frac{A}{\lambda}$, 即 Ω 为正不变集。

下面证明 Ω 为吸引集。假设 $S(t) + I(t) > \frac{A}{\lambda}$, 则 $\lambda(S(t) + I(t)) > A$, 因为

$$S(t) + I(t) \leq \frac{A}{\lambda} + \left(S_0 + I_0 - \frac{A}{\lambda} \right) e^{-\lambda t}$$

所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) + I(t)) \leq \frac{A}{\lambda}$, 说明 Ω 为吸引集。

3. 子系统及滑模域上的动力学

在本节中, 讨论系统(1.1)的子系统及滑模区域上的动力学行为。

3.1. 子系统上的动力学

这一部分, 讨论系统(1.1)的子系统上(1.2), (1.3)的动力学行为。

对于子系统(1.2), 基本再生素 $R_1 = \frac{A\beta}{\eta_1\eta_2}$ 。它有两个平衡点, 无病平衡点(DFE)和地方病平衡点(EE)

分别由下式给出

$$E_0^- = \left(\frac{A}{\eta_1}, 0 \right), E_1 = (S_1, I_1) = \left(\frac{\eta_2}{\beta}, \frac{A\beta - \eta_1\eta_2}{\eta_2\beta} \right),$$

定理 3.1 对于子系统(1.2), 若 $R_1 < 1$, 则无病平衡点 E_0^- 是全局渐近稳定的。若 $R_1 > 1$, 则地方病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的。

证明 若 $R_1 < 1$, 把系统(1.2)改写成

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\eta_1 \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right) \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V_0^-(S, I) = \frac{1}{2} \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 + \frac{A}{\eta_1} I$$

沿系统(3.1)对 $V_0^-(S, I)$ 求导可得

$$\frac{d}{dt} V_0^-(S, I) = -\eta_1 \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 \leq 0$$

由 LaSalle 不变原理, 可得 E_0^- 是全局渐近稳定的。证毕。

若 $R_1 > 1$ 时, 把系统(1.2)改写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (S - S_1) - \beta(S - S_1)I - \eta_2(I - I_1) \\ \frac{dI}{dt} = \beta(S - S_1)I \end{cases} \quad (3.2)$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V_1(S, I) = \frac{1}{2}(S - S_1)^2 + \frac{\eta_2}{\beta} \left(I - I_1 - I_1 \ln \frac{I}{I_1} \right)$$

沿系统(3.2)对 $V_1(S, I)$ 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(S, I) &= -\eta_1(S - S_1)^2 - \beta(S - S_1)^2 I - \beta(S - S_1)(I - I_1) + \beta(S - S_1)(I - I_1) \\ &= -(\eta_1 + \beta U)(S - S_1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

由 LaSalle 不变原理, 可得 E_1 是全局渐近稳定的。证毕。

对于子系统 (1.3), 基本再生素 $R_2 = \frac{A\beta}{(\eta_2 + \nu)\eta_1}$, 它有两个平衡点, 地方病平衡点和无病平衡点为

$$E_0^+ = \left(\frac{A}{\eta_1}, 0 \right), E_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{\eta_2 + v}{\beta}, \frac{A\beta - \eta_1(\eta_2 + v)}{\eta_2\beta} \right),$$

定理 3.2 对于子系统(1.3), 若 $R_2 < 1$ 且 $\eta_1 \leq \frac{4(1-R_2)A\beta(\eta_2+v)}{v^2}$, 则无病平衡点 E_0^+ 是全局渐近稳定的。若 $R_2 > 1$, 则地方病平衡点 E_2 是全局渐近稳定的。

证明 当 $R_2 < 1$ 时, 将系统 (1.3) 改写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\eta_1 \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right) - \beta SI + vI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I - vI, \end{cases} \quad (3.3)$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V_0^+(S, I) = \frac{1}{2} \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 + \frac{A}{\eta_1} I.$$

沿着系统(3.3)对函数 $V_0^+(S, I)$ 求导

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_0^+(S(t), I(t)) &= -\eta_1 \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 - \beta S^2 I + \frac{A}{\eta_1} \beta SI + vSI - \frac{A}{\eta_1} vI + \frac{A}{\eta_1} (\beta SI - \eta_2 I - vI) \\ &= -\eta_1 \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 - \beta I \left(S - \left(\frac{A}{\eta_1} + \frac{v}{2\beta} \right) \right)^2 + g(I) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

其中

$$g(I) = \frac{A(\eta_2 + v) \left(\frac{A\beta}{\eta_1(\eta_2 + v)} - 1 + \frac{\eta_1 v^2}{4A\beta(\eta_2 + v)} \right)}{\beta \eta_1} I.$$

当 $\eta_1 \leq \frac{4(1-R_2)A\beta(\eta_2+v)}{v^2}$ 时, 有 $g(I) \leq 0$ 。有 Lasalle 不变原理, 可得 E_0^+ 是全局渐近稳定的。

当 $R_2 > 1$ 时, 将系统(1.3)改写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\eta_1 (S - S_2) - \beta (S - S_2) I - \eta_2 (I - I_2), \\ \frac{dI}{dt} = \beta (S - S_2) I, \end{cases} \quad (3.4)$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V_2(S, I) = \frac{1}{2} (S - S_2)^2 + \frac{\eta_2}{\beta} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right).$$

沿着系统(3.4)对函数 $V_2(S, I)$ 求导

$$\begin{aligned}\frac{dV_2(S,I)}{dt} &= -\eta_1(S-S_2)^2 - \beta(S-S_2)^2 I - \eta_2(S-S_2)(I-I_2) + \eta_2(S-S_2)(I-I_2) \\ &= -(\eta_1 + \beta I)(S-S_2)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

根据 Lasalle 不变原理, 得到 E_1 是全局渐近稳定的。

3.2. 滑模域上的动力学

这一部分, 分析系统(1.1)在滑模域上的动力学行为。设 $H(S,I) = I - Sk$, 有

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial S}, \frac{\partial H}{\partial I} \right) = (-k, 1).$$

选取向量 $n = (-k, 1)$ 作为分界线 Σ 的法向量。为了方便求滑模域 Σ 上的切点, 定义如下函数

$$g_1(S) = \langle \nabla H, F_1(S, kS) \rangle = k[\beta(k+1)S^2 + (\eta_1 - \eta_2)S - A]$$

和

$$g_2(S) = \langle \nabla H, F_2(S, kS) \rangle = k[\beta(k+1)S^2 + (\eta_1 - \eta_2 - \nu(1+k))S - A]$$

当 $g_1(S) > 0$, $g_2(S) < 0$ 时, 可求得滑模域 Σ_1 为

$$\Sigma_1 = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_T^1 < S < S_T^2, I = kS\}$$

其中

$$S_T^1 = \frac{-(\eta_1 - \eta_2) + \sqrt{(\eta_1 - \eta_2)^2 + 4A(1+k)\beta}}{2(1+k)\beta}$$

和

$$S_T^2 = \frac{-[\eta_1 - \eta_2 - \nu(1+k)] + \sqrt{[\eta_1 - \eta_2 - \nu(1+k)]^2 + 4A(1+k)\beta}}{2(1+k)\beta}.$$

根据 Fillippov 凸方法, 容易得到滑模方程

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{1+k} f(S), I = kS$$

其中 $f(S) = A - (\eta_1 + \eta_2 k)S$, 求得 $f(S)$ 的零点为 $S_p = \frac{A}{\eta_1 + \eta_2 k}$ 。

此外, 系统(1.1)的唯一伪平衡 $E_p = (S_p, kS_p)$ 存在的充要条件为 $S_T^1 < S_p < S_T^2$ 。为了方便判断伪平衡点 E_p 是否存在, 给出如下引理

引理 3.1 若 $\eta_1 < \eta_2$, 则下面断言成立:

(i) $\text{sign}(S_p - S_T^1) = \text{sign}(A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2)$;

(ii) $\text{sign}(S_p - S_T^2) = \text{sign}(A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k)$ 其中 $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

证明 (i) 不失一般性, 假设 $S_T^1 > S_p$, 下证 $S_T^1 > S_p$ 等价于 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 。因为 $f(S_p) = 0$ 以及 $f(S)$ 的性质, 可得 $S_T^1 > S_p$ 等价于 $f(S_T^1) < 0$, 即

$$f(S_T^1) = -(\eta_1 + \eta_2 k) \left(S_T^1 - \frac{A}{\eta_1 + \eta_2 k} \right) < 0,$$

可得 $f(S_T^1) < 0$ 当且仅当 $S_T^1 > \frac{A}{\eta_1 + \eta_2 k}$ 。由函数 $g_1(S)$ 的性质知 $S_T^1 > \frac{A}{\eta_1 + \eta_2 k}$ 等价于

$$g_1 \left(\frac{A}{\eta_1 + \eta_2 k} \right) = \frac{Ak(1+k)}{(\eta_1 + \eta_2 k)^2} (A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2) < 0.$$

可得, $S_T^1 > S_p$ 当且仅当 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 。

(ii) 的证明与(i)的证明类似, 这里不再给出证明。证毕。

4. 系统的全局动力学

这一节考虑系统(1.1)的全局动力学行为。首先给出两个引理证明系统(1.1)不在极限环。

引理 4.1 系统(1.1)不存在滑模极限环。

证明 不失一般性, 考虑 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$ 的情形, 即 E_1 为实平衡点 E_2 是虚平衡点, 在这种情况下, 证明系统不可能出现如图 1 所示的滑模极限环。可以得出, 实平衡点 E_1 是局部渐近稳定的, 并且吸引集合

$$\Omega_1 = \left\{ (S, I) \mid V_1(S, I) \leq V_1(S_T^1, kS_T^1) \right\}.$$

因为 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$, 由引理 3.1 可得, $S_p < S_T^1 < S_T^2$, 此时滑模域上没有伪平衡点。由 $f(S)$ 的性质可知, 当 $S \in (S_T^1, S_T^2)$ 时, 有 $f(S) < 0$, 即滑模域上的解轨线沿着滑模向下滑动到达切点 $T_1 = (S_T^1, kS_T^1)$ 。由于 $(S_T^1, kS_T^1) \in \Omega_1$, 所以从切点出发的解轨线将收敛到 E_1 , 说明 E_1 吸引滑模域

反证法。假设存在如图 1 所示的滑模极限环 Γ , 那么滑模极限环 Γ 必须从切点 $T_1 = (S_T^1, kS_T^1)$ 出发经过一段时间后到达再次到达滑模域 Σ_1 , 这与 E_1 吸引滑模域矛盾, 所以系统(1.1)不存在滑模极限环。

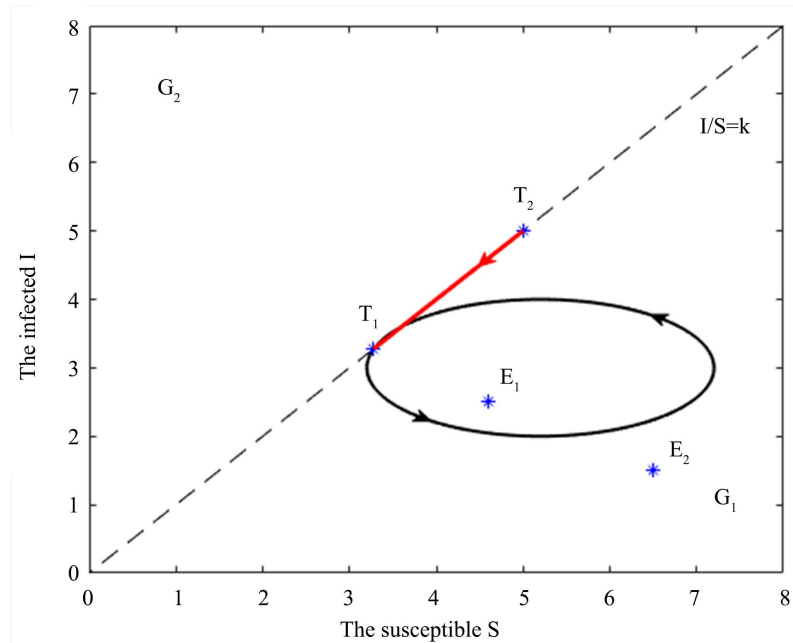


Figure 1. The possible sliding limit cycle if E_1 is real and E_2 is virtual

图 1. 当 E_1 为实平衡点 E_2 为虚平衡, 系统可能存在的滑模极限环

引理 4.2 系统(1.1)不存在围绕 Σ_1 的穿越极限环。

证明 反证法。假设存在围绕 Σ_1 的穿越极限环 Γ 如图 2 所示, 设分别 Γ_1, Γ_2 为 Γ 在区域 G_1, G_2 的部分, P_1, P_2 分别表示为 Γ 与 Σ_1 的交点, D_1, D_2 分别表示 Γ_1 和 P_1P_2 围成的有界区域以及 Γ_2 和 P_1P_2 围成的有界区域。根据 Bendixson-Dulac 判别法, 设 Dulac 函数为 $B(S, I) = \frac{1}{SI}$, 则

$$\sum_{i=1}^2 \iint_{D_i} \left(\frac{\partial(Bf_i^1)}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_i^2)}{\partial I} \right) dSdI = \iint_{D_1} -\frac{A}{S^2I} dSdI + \iint_{D_2} -\frac{A}{S^2I} - \frac{v}{S^2} dSdI < 0$$

其中 $i=1,2$, 根据格林公式, 可得

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1} \left(\frac{\partial(Bf_1^1)}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_1^2)}{\partial I} \right) dSdI \\ &= \oint_{\Gamma_1 \cup \overline{P_2P_1}} Bf_1^1 dI - \oint_{\Gamma_1 \cup \overline{P_2P_1}} Bf_1^2 dS \\ &= \int_{\Gamma_1} Bf_1^1 dI + \int_{\overline{P_2P_1}} Bf_1^1 dI - \int_{\Gamma_1} Bf_1^2 dS - \int_{\overline{P_2P_1}} Bf_1^2 dS \\ &= \int_{\Gamma_1} Bf_1^1 f_1^2 dt - \int_{\Gamma_1} Bf_1^2 f_1^1 dt + \int_{\overline{P_2P_1}} Bf_1^1 dI - \int_{\overline{P_2P_1}} Bf_1^2 dS \\ &= \int_{\overline{P_2P_1}} (kBf_1^1 - Bf_1^2) dS \\ &= \int_{\overline{P_2P_1}} \left(\frac{A}{S^2} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{S} - (k+1)\beta \right) dS \\ &= -A \left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) - (k+1)\beta(P_1 - P_2) + (\eta_2 - \eta_1) \ln \left| \frac{P_1}{P_2} \right| \end{aligned}$$

其中, 沿着 $\Gamma_i (i=1,2)$ 有 $dS = f_1^1 dt$ 和 $dI = f_1^2 dt$, 沿着 Σ 有 $dI = k dS$ 。类似的

$$\begin{aligned}
& \iint_{D_2} \frac{\partial(Bf_2^1)}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_2^2)}{\partial I} dSdI \\
&= \int_{P_2\bar{P}_1} (kBf_2^1 - Bf_2^2) dS \\
&= -A \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1} \right) - (k+1)\beta(P_2 - P_1) + (\eta_2 - \eta_1 + (k+1)v) \ln \left| \frac{P_2}{P_1} \right|
\end{aligned}$$

因为 $P_1 < P_2$, 所以

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \iint_{D_i} \frac{\partial(Bf_i^1)}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_i^2)}{\partial I} dSdI \\
&= \iint_{D_1} \frac{\partial(Bf_1^1)}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_1^2)}{\partial I} dSdI + \iint_{D_2} \frac{\partial(Bf_2^1)}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_2^2)}{\partial I} dSdI \\
&= \int_{P_2\bar{P}_1} (kBf_1^1 - Bf_1^2) dS + \int_{P_2\bar{P}_1} (kBf_2^1 - Bf_2^2) dS \\
&= v(k+1) \ln \left| \frac{P_2}{P_1} \right| > 0
\end{aligned}$$

矛盾, 因此引理 4.2 可证。

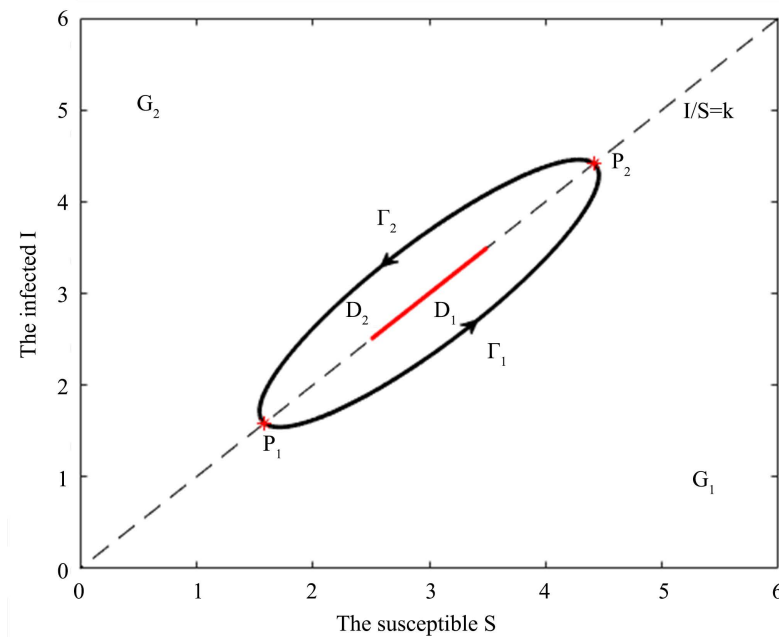


Figure 2. The possible crossing limit cycle

图 2. 系统可能存在的穿越极限环

情形 1 $R_1 \leq 1$

定理 4.1 当 $R_1 \leq 1$ 且 $\eta_1 < \frac{4(1-R_1)A\beta\eta_2}{v^2}$, 则无病平衡点 E_0^- 是全局渐近稳定的。

证明 设 $(S(t), I(t))$ 是 (1.1) 满足初值条件 $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$ 的解, 根据定义 2.1, 存在一个可测函数 $\gamma(t) \in [0, 1]$, 使得对几乎所有的 $t \in [0, +\infty)$ 都有

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S + v\gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I - v\gamma I, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma = 0, I < Sk, \\ \gamma = 1, I > Sk, \\ \gamma = [0, 1], I = Sk. \end{cases}$$

设 $g(\gamma, I) = \frac{4A^2\beta^2 + \gamma^2\eta_1^2v^2 - 4A\beta\eta_1\eta_2}{4\beta\eta_1^2} I$, 下证 $g(\gamma, I) \leq 0$ 。当 $I < Sk$, 此时 $\gamma = 0$, 所以

$$g(\gamma, I) = \frac{4A\beta\eta_1\eta_2(R_1 - 1)}{4\beta\eta_1^2} I \leq 0$$

当 $I \geq Sk$ 时, 此时 $0 < \gamma \leq 1$, $R_1 \leq 1$, $\eta_1 < \frac{4(1-R_1)A\beta\eta_2}{v^2}$, 所以

$$g(\gamma, I) \leq g(1, k) = \frac{4A^2\beta^2 + \eta_1^2v^2 - 4A\beta\eta_1\eta_2}{4\beta\eta_1^2} k \leq 0.$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V(S, I) = \frac{1}{2} \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 + \frac{A}{\eta_1} I$$

函数 $V(S, I)$ 沿着系统(4.1)求导

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(S(t), I(t)) &= \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right) \left(A - \beta SI - \eta_1 S + v\gamma I \right) + \frac{A}{\eta_1} (\beta SI - \eta_2 I - v\gamma I) \\ &\leq \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right) \left(A - \beta SI - \eta_1 S + v\gamma I \right) + \frac{A}{\eta_1} (\beta SI - \eta_2 I) \\ &= -\eta_1 \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 - \beta I \left(S - \frac{2A\beta + \gamma\eta_1v}{2\beta\eta_1} \right)^2 + g(\gamma, I) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

由 Lasalle 不变原理, 得到 E_0^- 是全局渐近稳定的, 如图 3 所示。

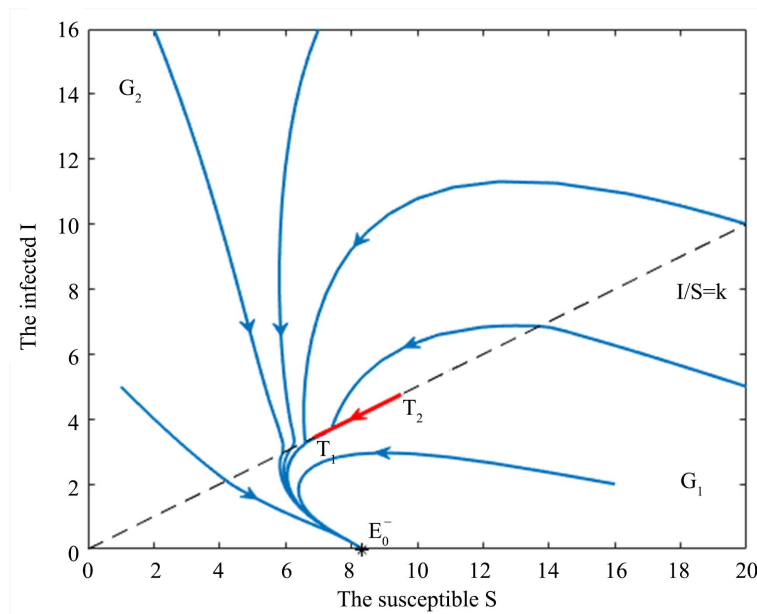


Figure 3. The parameters are selected as follows:

$$A=5, \beta=0.1, \eta_1=0.6, \eta_2=0.9, \nu=0.6, k=0.5$$

图 3. 参数选取 $A=5, \beta=0.1, \eta_1=0.6, \eta_2=0.9, \nu=0.6, k=0.5$

情形 2 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$

定理 4.2 当 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$ 时, 地方病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的。

证明 由条件 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 可得 $\frac{I_1}{S_1} = \frac{A\beta - \eta_1\eta_2}{\eta_2^2} < k$, 此时 E_1 为实平衡点。由条件

$A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$ 可得 $\frac{I_2}{S_2} = \frac{A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu)}{\beta(\eta_2 + \nu)} < k$, 此时 E_2 为虚平衡点。

因为 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 < 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$, 由引理 3.1 可得, $S_p < S_T^1 < S_T^2$ 此时滑模域上没有伪平衡点。由 $f(S)$ 的性质知, 当 $S \in (S_T^1, S_T^2)$ 时, 有 $f(S) < 0$, 即滑模域上的解轨线沿着滑模向下滑动。

由于系统(1.1)不存在滑模极限环以及穿越极限环, 所以 E_1 是全局渐近稳定的, 如图 4 所示。

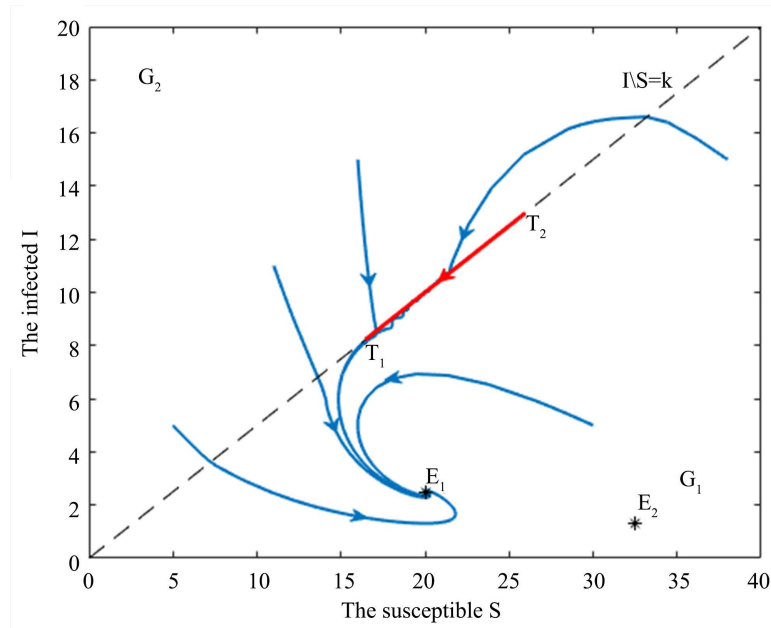


Figure 4. The parameters are selected as follows:

$$A=8, \beta=0.04, \eta_1=0.3, \eta_2=0.8, \nu=0.5, k=0.5$$

图 4. 参数选取 $A=8, \beta=0.04, \eta_1=0.3, \eta_2=0.8, \nu=0.5, k=0.5$

情形 3 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 。

定理 4.3 当 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$ 时, 伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的。

证明由条件 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 可得

$$\frac{I_1}{S_1} = \frac{A\beta - \eta_1\eta_2}{\eta_2^2} > k,$$

此时 E_1 为虚平衡点, 类似可得, E_2 为虚平衡点。

因为 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k < 0$, 由引理 3.1 可得, $S_T^1 < S_p < S_T^2$, 此时滑模域 Σ_1 存在伪平衡点 E_p 。由 $f(S)$ 的定义可知 $f'(S_p) < 0$, 即伪平衡点是稳定的。当 $S \in (S_T^1, S_p)$ 时, 有 $f(S) > 0$, 当 $S \in (S_p, S_T^2)$ 时, 有 $f(S) < 0$, 说明滑模域 Σ_1 上的解轨线将收敛到 E_p 。

由于系统(1.1)不存在滑模极限环以及穿越极限环, 所以 E_1 是全局渐近稳定的, 如图 5 所示。

定理 4.4 当 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k > 0$ 时, 地方病平衡点 E_2 是全局渐近稳定的。

证明由条件 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 可得 $\frac{I_1}{S_1} = \frac{A\beta - \eta_1\eta_2}{\eta_2^2} > k$, 此时 E_1 为虚平衡点。由条件

$A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k > 0$ 可得 $\frac{I_2}{S_2} = \frac{A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu)}{\beta(\eta_2 + \nu)} > k$, 此时 E_2 为实平衡点。

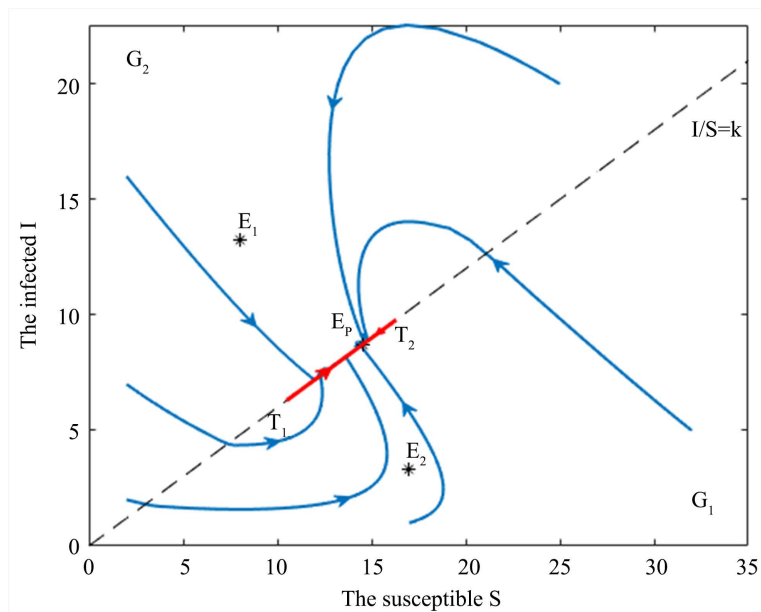


Figure 5. The parameters are selected as follows:

$A=15, \beta=0.1, \eta_1=0.55, \eta_2=0.8, \nu=0.9, k=0.6$

图 5. 参数选取 $A=15, \beta=0.1, \eta_1=0.55, \eta_2=0.8, \nu=0.9, k=0.6$

因为 $A\beta - k\eta_2^2 - \eta_1\eta_2 > 0$ 且 $A\beta - \eta_1(\eta_2 + \nu) - \eta_2(\eta_2 + \nu)k > 0$, 由引理 3.1 可得, $S_T^1 < S_T^2 < S_p$ 此时滑模域上没有伪平衡点。由 $f(S)$ 的性质知, 当 $S \in (S_T^1, S_T^2)$ 时, 有 $f(S) > 0$, 即滑模域上的解轨线沿着滑模向上滑动。

由于系统(1.1)不存在滑模极限环以及穿越极限环, 所以 E_2 是全局渐近稳定的, 如图 6 所示。

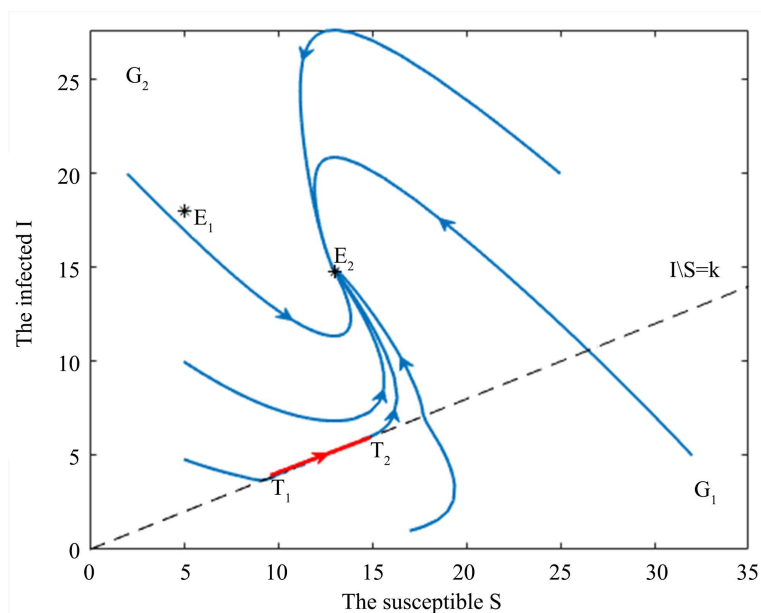


Figure 6. The parameters are selected as follows:

$A=10, \beta=0.1, \eta_1=0.2, \eta_2=0.5, \nu=0.8, k=0.4$

图 6. 参数选取 $A=10, \beta=0.1, \eta_1=0.2, \eta_2=0.5, \nu=0.8, k=0.4$

5. 总结

文章研究了一类 Lotka-Volterra Filippov 型植物传染病模型, 根据易感植株的数量和感染植株的数量比例来决定是否采取控制措施, 这导致模型的分界线是一条倾斜的斜线, 大部分的 Lotka-Volterra Filippov 型植物传染病模型的分界线是一条水平线[5] [6], 这是本文的新颖点。

对于模型的动力学行为分析, 首先分析了模型解的有界性和正解性, 保证了模型的生物学意义; 其次, 分别分析了在不同区域上以及滑模区域上系统的动力学行为, 在通过构造合适的 Lyapunov 函数分析系统在两个子区域上的动力学行为, 分别得到地方病平衡点 E_1 、 E_2 是渐近稳定的, 通过 Filippov 理论分析系统在滑模区域上的动力学行为; 在分析系统的全局动力学行为时, 给出两个引理并给出详细的证明, 这两个引理帮助我们排出了系统可能存在的滑模极限环和穿越极限环, 再通过构造合适的 Lyapunov 函数分析系统的解的渐近稳定性, 构造合适的 Lyapunov 函数这是本文的另一新颖点。根据参数的取值分为四种情况, 分别分析了这四种情况下系统的全局动力行为, 以定理的形式叙述得到的结果。最后通过数值模拟验证结果。

致 谢

感谢国家自然科学基金项目(编号: 12201199); 湖南省自然科学基金项目(编号: 2020JJ5014、2022JJ40021); 湖南省教育厅项目(编号: 21B0722、21C0660、21C0665)资助。

参考文献

- [1] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [2] Filippov, A.F. (2013) *Differential Equations with Discontinuous Right Hand Sides: Control Systems*. Springer Science & Business Media, Berlin.
- [3] 冷轩, 陈会敏. 基于广义 Lyapunov 方法的植物传染病模型的全局动力学[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1086-1095. <https://doi.org/10.12677/AAM.2021.104117>
- [4] 陈会敏, 冷轩. 平面库伦摩擦系统的动力学分析[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1336-1341. <https://doi.org/10.12677/AAM.2021.104143>
- [5] Li, W.X., Huang, L.H. and Wang, J.F. (2021) Global Asymptotical Stability and Sliding Bifurcation Analysis of a General Filippov-Type Predator-Prey Model with a Refuge. *Applied Mathematics and Computation*, **405**, Article 126263. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126263>
- [6] Li, W.X., Huang, L.H. and Wang, J.F. (2020) Global Dynamics of Filippov-Type Plant Disease Models with an Interaction Ratio Threshold. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 6995-7008. <https://doi.org/10.1002/mma.6450>