Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(11), 4717-4732**
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1211465

Hans汉斯

一类离散的扩散霍乱传染病模型行波解稳定性

黄晨琛*，廖　书

重庆工商大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2023年10月21日；录用日期：2023年11月14日；发布日期：2023年11月21日

摘　要

本文主要研究一类离散的扩散霍乱传染病模型行波解的稳定性问题。通过构造恰当的加权函数，利用加权能量法和比较原理相结合的方法，证明模型系统在大初始扰动下，大波速行波解在空间上的全局渐近指数稳定性。

关键词

霍乱，格动力系统，行波解，稳定性，加权能量法，比较原理

Stability of Traveling Wave Solutions for a Discrete Spreading Cholera Epidemic Model

Chenchen Huang*, Shu Liao

School of Mathematic and Statistics,, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Received: Oct. 21st, 2023; accepted: Nov. 14th, 2023; published: Nov. 21st, 2023

Abstract

In this paper, we study the stability of traveling waves for a discrete diffusive cholera model. By constructing a proper weight function, and combing the weighted energy method and the comparison principle, the globally exponential stablilty of traveling wave solutions is proved under large initial perturbation.

*通讯作者。

文章引用: 黄晨琛, 廖书. 一类离散的扩散霍乱传染病模型行波解稳定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(11): 4717-4732.
DOI: 10.12677/aam.2023.1211465

Keywords

Cholera, Lattice Dynamical System, Travelling Wave Solutions, Stability, Weighted Energy Method, Comparison Principle

1. 引言

近年来，为了更好地研究传染病在空间上的演化情况以及更好地预测传染病的流行趋势，反应扩散传染病模型是众多学者广泛关注的研究内容，并已取得了很多成果。作为反应扩散传染病模型的一个重要研究内容之一便是行波解，由于空间平移的不变性，行波解不但可以很好地揭示传染病的传播过程，震荡现象，还能预测未来的传染规律和发展趋势，具有十分重要的实践意义和理论意义。其中，行波解的存在性和唯一性的证明已取得了丰硕的成果，可参见文献[1]-[8]。除此之外，行波解稳定与否可以直观反应传染病的传播形态能否保持不变且不受干扰，对传染病的预防和控制也具有很强的指导意义。因此对行波解稳定性的研究也是当前的研究热点和难点之一。

在研究反应扩散方程行波解稳定性时，代表性的研究方法就是 Mei 等人对于加权能量法的研究，他们在文献[9]中利用加权能量估计的方法和比较原则证明非局部 Nicholson 非线性方程行波解的全局指数稳定性。Yang 等人分别在文献[10]和[11]中采用加权能量法分别研究单调系统和非拟单调系统的行波解的稳定性。Hsu 等人的文献[12]针对一类带时滞的反应扩散模型，研究其行波解的存在性和稳定性，他们的研究结果表明围绕行波解的初始扰动属于适当的加权 Sobolev 空间时，模型的行波解是指数稳定的。Li 和 Weng [13]也采取同样的加权能量法和比较原理研究 SIS 传染病模型的行波解在大波速情况下的指数稳定性。Su 和 Zhang [14]研究一类带时滞和非拟单调的反应扩散方程的行波解的稳定性，采用傅里叶变化再结合加权能量法建立恰当的能量方程，证明了无论是在单调还是非单调的情况下，方程的行波解都以收敛率 $t^{-\frac{1}{2}}\Big/\mathrm{e}^{-\mu t}$ 在 $L^{\infty}(R)$ 空间上是全局指数稳定的，其中 $\mu>0$ 是某个正常数。更多相关文献还可以参见[15] [16] [17] [18]。

最近，将空间扩散系统进行空间离散化得到扩散性格微分系统引起了研究者越来越多的关注。格微分系统是偏微分系统的离散化形式，与空间连续系统相比，其动力学行为更加复杂，可以更好的刻画实际问题，并且在数值计算，参数估计等方面具有明显的优势。目前研究者大部分都是针对三维以下的离散系统进行行波解稳定性方面的研究。Zhang 和 Tian [19]建立一个一维格上的两物种 Lotka-Volterra 竞争系统，并得出模型大波速行波解的全局稳定性。Yang 和 Zhang [20]研究非单调离散扩散方程的行波解的稳定性和唯一性，利用加权能量方法和非线性 Halanay 不等式，证明当初始振动很小的时候，所有的行波解是时间指数稳定的。Hsu 和 Lin [21]研究离散的 SIS 传染病模型的行波解稳定性，借助加权能量法和比较原理得出当初始扰动在加权 Sobolev 空间任意大时，所有非临界波速行波解的全局指数稳定性。Su 和 Zhang [22]还研究了一类格上的三种群 Lotka-Volterra 竞争系统波解的稳定性，利用类似的比较原理和加权能量的方法，得到大波速波前解的指数渐近稳定性。Zhao 等人在文献[23]中研究一类格上的考虑年龄结构的二维人口模型，研究行波解的存在性和唯一性，其后利用挤压技术，建立非最小波前解的稳定性。其他类似的参考文献可参看[24] [25] [26]。

本文针对一类具有多种传播途径的霍乱传染病进行研究，这是一种由于摄入受霍乱弧菌污染的食物或水引起的急性肠道感染疾病，如果未经合理诊治，感染者可在短期内死亡。19 世纪时期，源自印度恒河三角洲的最初宿主使霍乱在世界各地的蔓延。霍乱曾经在全球范围引起过七次世界大流行，之前的六次大流行使得各大洲百万人口因此丧生。最近的第七次霍乱大流行于 1961 年始于南亚，1971 年蔓延至非洲，1991 年至到美洲。据世界卫生组织估计，全球每年因霍乱导致 300 万至 500 万例感染者，有 28,000 到 142,000 人因此死亡，不仅是国际卫生条例规定的国际检疫传染病之一，也是我国规定的甲类传染病之一。近期比较严重的两次霍乱疫情，一次是于 2008 年~2009 年在津巴布韦爆发，引起超过 9 万八千例感染者，最终统计有 4200 人死亡，尽管在国际机构的帮助下，疫情于 2009 年结束，但于 2018 年又一次卷土重来，造成 2000 多例感染者；另外一次 2010 年海地在地震之后也爆发严重的霍乱疫情，影响了 82 万多人，造成 9792 人因此丧生。在最近几十几年间，霍乱还陆陆续续在各国各地爆发，尤其是一些不发达或者发展中的国家，例如刚果(2008 年)，伊拉克(2008 年)，越南(2009 年)，尼日利亚(2010 年)，墨西哥(2013 年)，南苏丹(2014 年)和索马里(2017 年)。

霍乱因其传播方式与众不同而受到研究者的广泛关注，其具有多种传播途径，不但通过人与人之间直接传播，还通过人与被污染的水源进行非直接传播。Codeco [27]改进了标准的传染病 SIR 模型，首次计算在水源环境中霍乱弧菌的浓度，但该模型只假设不洁水源为唯一感染途径。Hartley 等人[28]随后在 Codeco 工作的基础上，充分考量到了霍乱多途径传播的特点，将霍乱病菌分为高感染阶段和低感染阶段，结合两个新的环境元素构建一个高维霍乱传染病模型。Mukandavire 等人[29]再将 Hartley 的模型进行一些简化，采用非线性发生率来描述人与被污染的水源之间的传播，重点刻画传播过程中的饱和效应。Tien 和 Earn [30]构造并分析一个具有多种传播途径的高维霍乱模型，对该模型模型进一步拓展分析和数值模拟。Shuai 和 Driessche [31]依照病毒毒性的强弱把水源中的病毒分为不同类型，同时也把受感染的人群按照对应的病毒传染性的强弱划分为有限个类型进行分析。Liao 等人[32]研究带有非局部扩散项的霍乱传染病模型行波解的存在性问题，利用 Schauder 不动点定理，构造上下解得到行波解的存在性，其次构造 Lyapunov 函数结合 Lebesgue 控制收敛原理，得到行波解在 $+\infty$ 处的渐近行为。更多的相关文献可以参见[33] [34] [35] [36] [37]。

本文拟针对一类格上的高维霍乱传染病模型的行波解进行稳定性分析。据我们所知，目前针对三维以上的格微分系统的行波解稳定性问题，结论还比较少。本文的主要结构如下。首先建立格上的高维模型系统，给出相应的初值问题的解的存在唯一性和比较原理，接下来结合加权能量方法和比较原理讨论解的能量指数衰减估计，再利用嵌入定理证明大波速行波解的全局渐近指数稳定性，最后是全文总结。

2. 霍乱传染病模型

霍乱传染病的传播比较复杂，不但通过人与人之间进行直接传播，还通过人与不洁水源之间进行非直接传播。我们在文献[32]的基础上，建立带扩散项的霍乱传染病模型如下

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\Lambda-\alpha\left(\beta_w W(x,t)+\beta_h I(x,t)\right)S(x,t)-(\kappa+\mu)S(x,t)+D_1\Delta S(x,t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=\psi S(x,t)-\sigma\alpha\left(\beta_w W(x,t)+\beta_h I(x,t)\right)V(x,t)-\mu V(x,t)+D_2\Delta V(x,t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}=\alpha\left(\beta_w W(x,t)+\beta_h I(x,t)\right)\left(S(x,t)+\sigma V(x,t)\right)-(\gamma+\mu)I(x,t)+D_3\Delta I(x,t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=\theta I(x,t)-\delta W(x,t)+D_4 W(x,t) \tag{4}$$

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial t}=\gamma I(x,t)-\mu R(x,t)+D_5\Delta R(x,t) \tag{5}$$

$S(x,t),V(x,t),I(x,t)$ 和 $R(x,t)$ 分别代表易感者，接种者，感染者和移出者在 t 时刻 x 处的密度，$W(x,t)$ 表示水源在 t 时刻 x 处的霍乱病菌浓度。模型中参数 Λ 为输入率，β_w 和 β_h 分别表示环境与人之间传播和人与人之间传播的传染率系数，α 为霍乱病菌的衰减率，μ 为死亡率，γ 为染病者的复原率，δ 为病原体的去除率。所有的参数都为正数 $d_i(i=1,2,3,4,5)$ 为正扩散率系数。

注意到系统方程中 R 的独立性，为了简化计算，在后面的分析中只考虑方程组(1)~(4)即可。显然模型(1)~(4)具有无病平衡点 $E_0=\left(\frac{\Lambda}{\kappa+\mu},\frac{\phi\frac{\Lambda}{\mu}}{\kappa+\mu},0,0\right)$，以及地方病平衡点 $E^*=(k_1,k_2,k_3,k_4)$，且表达式为

$$\begin{aligned}
k_1&=\frac{\Lambda}{\alpha\left(\beta_w\frac{\xi k_3}{\delta}+\beta_h k_3\right)+\kappa+\mu},\\
k_2&=\frac{\phi\Lambda}{\left[\alpha\left(\beta_w\frac{\theta k_3}{\delta}+\beta_h k_3\right)+\kappa+\mu\right]\left[\sigma\alpha\left(\beta_w\frac{\theta k_3}{\delta}+\beta_h k_3\right)+\mu\right]},\\
k_3&=I^*,\\
k_4&=\frac{\theta k_3}{\delta}.
\end{aligned}$$

求雅可比矩阵并代入初始值，得基本再生数为：$R_0=\frac{\alpha(S_0+\sigma V_0)(\beta_h\delta+\beta_w\theta)}{\delta(\gamma+\mu)}$。

3. 行波解稳定性分析

本节对系统(1)~(4)进行空间离散化得到如下四维格微分模型

$$\frac{\partial S_j(t)}{\partial t}=d_1\left[S_{j+1}(t)-2S_j(t)+S_{j-1}(t)\right]+\Lambda-\alpha\left(\beta_w W_j(t)+\beta_h I_j(t)\right)S_j(t)-(\kappa+\mu)S_j(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial V_j(t)}{\partial t}=d_2\left[V_{j+1}(t)-2V_j(t)+V_{j-1}(t)\right]+\psi S_j(t)-\sigma\alpha\left(\beta_w W_j(t)+\beta_h I_j(t)\right)V_j(t)-\mu V_j(t) \tag{7}$$

$$\frac{\partial I_j(t)}{\partial t}=d_3\left[I_{j+1}(t)-2I_j(t)+I_{j-1}(t)\right]+\alpha\left(\beta_w W_j(t)+\beta_h I_j(t)\right)\left(S_j(t)+\sigma V_j(t)\right)-(\gamma+\mu)I_j(t) \tag{8}$$

$$\frac{\partial W_j(t)}{\partial t}=d_4\left[W_{j+1}-2W_j+W_{j-1}\right]+\theta I_j(t)-\delta W_j(t) \tag{9}$$

其中 $t>0, J\in Z$。则模型系统(6)~(9)的解 $\left(S_j(t),V_j(t),I_j(t),W_j(t)\right)=\left(u_{1,j}(x,t),u_{2,j}(x,t),u_{3,j}(x,t),u_{4,j}(x,t)\right)$ 为行波解。

再令 $\xi=x+ct$，$c>0$ 为波速，将 $\left(S(x,t),V(x,t),I(x,t),W(x,t)\right)=\left(\phi_1(\xi),\phi_2(\xi),\phi_3(\xi),\phi_4(\xi)\right)$ 代入系统(6)~(9)，可得如下的行波方程

$$\frac{\partial\phi_1(\xi)}{\partial t}=d_1 D\left[\phi_1(\xi)\right]+\Lambda-\alpha\left(\beta_w\phi_4(\xi)+\beta_h\phi_3(\xi)\right)\phi_1(\xi)-(\kappa+\mu)\phi_1(\xi) \tag{10}$$

$$\frac{\partial\phi_2(\xi)}{\partial t}=d_2D[\phi_2(\xi)]+\psi\phi-\sigma\alpha(\beta_w\phi_4(\xi)+\beta_h\phi_3(\xi))\phi_2(\xi)-\mu\phi_2(\xi) \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi_3(\xi)}{\partial t}=d_3D[\phi_3(\xi)]+\alpha(\beta_w\phi_4(\xi)+\beta_h\phi_3(\xi))(\phi_1(\xi)+\sigma\phi_2(\xi))-(\gamma+\mu)\phi_3(\xi) \tag{12}$$

$$\frac{\partial\phi_4(\xi)}{\partial t}=d_4D[\phi_4(\xi)]+\theta\phi_3(\xi)-\delta\phi_4(\xi) \tag{13}$$

且系统的行波解要满足下面的边界条件

$$\lim_{\xi\to-\infty}(\phi_1(\xi),\phi_2(\xi),\phi_3(\xi),\phi_4(\xi))=(S_0,V_0,0,0)$$

以及

$$\lim_{\xi\to\infty}(\phi_1(\xi),\phi_2(\xi),\phi_3(\xi),\phi(\xi))=(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

接下来本节利用加权能量法讨论系统模型(10)~(13)的行波解是指数稳定的。在进行稳定性证明之前，先介绍一些必要的记号。

设 $C>0$ 是一个一般常数，$C_i>0(i=1,2,\cdots)$ 是特殊的一些常数。设 I 是一个区间，特殊情况下取 $I=R$。$L^2(I)$ 为定义在 I 上的平方可积函数区间。$H^k(I),(k\ge 0)$ 为 Sobolev 空间，是定义在区间 I 上的 L^2-函数 $f(x)$ 的集合，其导数形式

$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}f\,(i=1,2,\cdots,k)$ 且属于 $L^2(I)$。$L^2_\omega(I)$ 为 L^2-空间上赋予加权函数 $\omega(x)>0$ 的函数空间，其范数定义为：$\|f(x)\|_{L^2_\omega}=\left(\int_I\omega(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$。

$H^k(I)(k\ge 0)$ 为赋予加权函数的 Sobolev 空间，其范数定义为：

$$\|f(x)\|_{H^k_\omega}=\left(\sum_{i=0}^{k}\int_I\omega(x)\left|\frac{\mathrm{d}^if(x)}{\mathrm{d}x^i}\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $T>0$ 是一个正常数，B 是一个 Banach 空间。再定义 $C([0,T];\mathrm{B})$ 为 $[0,T]$ 上 B-值连续函数空间。$L^2([0,T];\mathrm{B})$ 为 $[0,T]$ 上的 B-值 L^2-函数空间。再定义加权函数如下：$\omega(\xi):=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\sigma(\xi-\xi_0)}, & \xi\le\xi_0\\ 1, & \xi>\xi_0\end{cases}$，

其中 $\sigma>0$，ξ_0 为一个充分大的数使得 $\xi_0\gg 1$。并令 $D_i=d_i\left[-2+\mathrm{e}^{\sigma_0}+\mathrm{e}^{-\sigma_0}\right]$ 以及

$$\begin{aligned}
&C_1\sigma_0=D_1+d_1+\psi,\\
&C_2\sigma_0=D_2+d_2+\psi,\\
&C_3\sigma_0=D_3+d_3+2\alpha\beta_hk_1+2\sigma\alpha\beta_hk_2+\alpha\beta_wk_4+\sigma\alpha\beta_wV_4+\alpha\beta_h\phi_3+\alpha\beta_w\phi_1+\sigma\alpha\beta_w\phi_2+\sigma\alpha\beta_wV_4,\\
&C_4\sigma_0=D_4+d_4+\alpha\beta_w\phi_1+\sigma\alpha\beta_w\phi_2+\theta
\end{aligned}$$

接下来证明本文主要的稳定性定理如下

定理 1 对任意给定的行波解 $\Phi(x+ct)=(\phi_1(x+ct),\phi_2(x+ct),\phi_3(x+ct),\phi_4(x+ct))$，$C>\max\{c^*,C_1,C_2,C_3,C_4\}$

则存在一个 $\sigma=\sigma_0>0$ 以及 $\xi_0>0$ 使得

$u_i(x,t)-\phi_i(x+ct)\in C([0,+\infty);H^1_\omega(R))\cap L^2_\omega([0,+\infty);H^1_\omega(R)),i=1,2,3,4$。

以及 $\sup_{x\in R}\left\|u(x,t)-\Phi(x+ct)\right\|\le C\mathrm{e}^{-\nu t}$， $t\ge 0$ 其中 C 和 ν 为正常数。

为方便起见，再定义 $\begin{cases}V_i(\xi,t)=V_i^+(x,t)-\phi_i(\xi)\\ V_{i0}(\xi,t)=V_{i0}^+(x)-\phi_{i0}(x)\end{cases}$ 其中 $t\in[0,+\infty)$， $\xi\in R$ ， $x\in R$ 。

本节分以下三步来证明定理 3.1。

第一步. $u_i^+(x,t)$ 收敛到 $\phi_i(x+ct),i=1,2,3,4$ 。

引理 1 (比较原理)假设 $\left(u_1^-(x,t),u_2^-(x,t),u_3^-(x,t),u_4^-(x,t)\right)$， $\left(u_1^+(x,t),u_2^+(x,t),u_3^+(x,t),u_4^+(x,t)\right)$ 分别是系统(10)~(13)带有相应初值 $\left(u_{10}^-(x,0),u_{20}^-(x,0),u_{30}^-(x,0),u_{40}^-(x,0)\right)$ 和 $\left(u_{10}^+(x,0),u_{20}^+(x,0),u_{30}^+(x,0),u_{40}^+(x,0)\right)$ 的解，如果对任意的 $x\in R$ 满足

$$
\begin{aligned}
(S_0,V_0,0,0)&\le\left(u_{10}^-(x,0),u_{20}^-(x,0),u_{30}^-(x,0),u_{40}^-(x,0)\right)\\
&\le\left(u_{10}^+(x,0),u_{20}^+(x,0),u_{30}^+(x,0),u_{40}^+(x,0)\right)\\
&\le(k_1,k_2,k_3,k_4)
\end{aligned}
$$

那么对任意的 $(x,t)\in R^+\times R$， 都有

$$
\begin{aligned}
(S_0,V_0,0,0)&\le\left(u_1^-(x,t),u_2^-(x,t),u_3^-(x,t),u_4^-(x,t)\right)\\
&\le\left(u_1^+(x,t),u_2^+(x,t),u_3^+(x,t),u_4^+(x,t)\right)\\
&\le(k_1,k_2,k_3,k_4)
\end{aligned}
$$

通过计算， $V_i(x,t)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&V_{1t}+cV_{1\xi}=d_1D[V_1]-(\kappa+\mu)V_1-\alpha\left[\beta_w(V_4+\phi_4)+\beta_h(V_3+\phi_3)\right]V_1-\alpha\beta_wV_4\phi_1-\alpha\beta_hV_3\phi_1\\
&V_{2t}+cV_{2\xi}=d_2D[V_2]+\left[-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)-\mu\right]V_2+\psi V_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2V_4-\sigma\alpha\beta_h\phi_2V_3\\
&V_{3t}+cV_{3\xi}=d_3D[V_3]-(\gamma+\mu)V_3+\left[\sigma\alpha\beta_h\phi_2+\alpha\beta_h\phi_1+\alpha\beta_hV_1+\sigma\alpha\beta_hV_2\right]V_3\\
&\qquad+\alpha\beta_wV_4(\phi_1+V_1+\sigma\phi_2+\sigma V_2)+\alpha\beta_w\phi_4(V_1+\sigma V_2)+\alpha\beta_w\phi_3(V_1+\sigma V_2)\\
&V_{4t}+cV_{4\xi}=d_4D[V_4]+\theta V_3-\delta V_4
\end{aligned}
\tag{14}
$$

且满足初始条件 $V_i(\xi,0)=V_{i0}(\xi,0)$， $i=1,2,3,4$， $\xi\in R$ 。

易知 $V_{i0}(\xi)\in H_\omega^1(R)$， 则有 $V_i(\xi,t)\in C\left([0,+\infty),H_\omega^1(R)\right)$

引理 2 存在一个正常数 C_5 使得

$$
\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\cdot,t)\right\|_{L_\omega^2}^2+\int_0^t\mathrm{e}^{-2\nu(t-s)}\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\cdot,t)\right\|_{L_\omega^2}^2\mathrm{d}s\le C_5\mathrm{e}^{-2\nu t}\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\cdot,t)\right\|_{L_\omega^2}^2 .
$$

证. 首先将式(14)中四个等式分别乘以 $\mathrm{e}^{2\nu t}\omega(\xi)V_i(\xi,t)$， $i=1,2,3,4$， 再由 $\left\{\mathrm{e}^{2\nu s}\omega(\xi)V_i^2\right\}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}=0$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_1^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_1^2\right)_\xi-d_1\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_1\left[V_1(\xi+1,t)+V_1(\xi-1,t)\right]\\
&=\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_1^2A_1-\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\alpha\beta_w\phi_1V_1V_4-\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\alpha\beta_h\phi_1V_1V_3,\\
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_2^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_2^2\right)_\xi-d_2\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_2\left[V_2(\xi+1,t)+V_2(\xi-1,t)\right]\\
&=\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_2^2A_2+\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\psi V_1V_2-\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\sigma\alpha\beta_w\phi_2V_2V_4-\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\alpha\beta_h\phi_2V_2V_3,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_3^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_3^2\right)_\xi-d_3\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_3\left[V_3(\xi+1,t)+V_3(\xi-1,t)\right]\\
&=\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_3^2A_3+\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\left[\alpha\beta_wV_1V_3(V_4+\phi_4)+\sigma\alpha\beta_wV_2V_3(V_4+\phi_4)\right.\\
&\quad\left.+\alpha\beta_h\phi_3V_1V_3+\sigma\alpha\beta_h\phi_3V_2V_3+\alpha\beta_w\phi_1V_3V_4+\sigma\alpha\beta_w\phi_2V_3V_4\right],\\
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_4^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_4^2\right)_\xi-d_4\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_4\left[V_4(\xi+1,t)+V_4(\xi-1,t)\right]\\
&=\mathrm{e}^{2\nu t}\omega V_4^2A_4+\mathrm{e}^{2\nu t}\omega\theta V_3V_4.
\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}
&A_1(\xi,t)=\frac{c\omega'}{2\omega}+\nu-2d_1-\kappa-\mu-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h(V_3+\phi_3),\\
&A_2(\xi,t)=\frac{c\omega'}{2\omega}+\nu-2d_2-\mu-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3),\\
&A_3(\xi,t)=\frac{c\omega'}{2\omega}+\nu-2d_3-\gamma-\mu+\alpha\beta_h(V_1+\phi_1)+\sigma\alpha\beta_h(V_2+\phi_2),\\
&A_4(\xi,t)=\frac{c\omega'}{2\omega}+\nu-2d_4-\delta.
\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式 $2xy\le x^2+y^2$ 知

$$\begin{aligned}
2\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega V_iV_i(\xi\pm1,s)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s&\le\int_0^t\mathrm{e}^{2\nu s}\int_R\omega\left(V_i^2+V_i^2(\xi\mp1,s)\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&=\int_0^t\mathrm{e}^{2\nu s}\left[\int_R\omega V_i^2\mathrm{d}\xi+\int_R\omega(\xi\mp1)V_i^2\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

和

$$2\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega V_iV_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\le\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega\left(V_i^2+V_j^2\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\quad i,j=1,2,3,4.$$

将不等式(15)关于 ξ 和 t 在 $R\times[0,t]$ 上积分，由 $V_i(\xi,t)\in H_\omega^1$ 可知，在无穷远处 $\left\{\mathrm{e}^{2\nu s}\omega V_i^2\right\}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}=0$，$i=1,2,3,4$ 从而得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2\nu s}\left\|V_4(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}&\le\left\|V_{10}(0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_1\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega}\right]V_1^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&\quad+2\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega A_1(\xi,s)V_1^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
\mathrm{e}^{2\nu s}\left\|V_2(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}&\le\left\|V_{20}(0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_2\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega}\right]V_2^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&\quad+2\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega A_2(\xi,s)V_2^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\left(\psi V_1^2+\psi V_2^2\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
\mathrm{e}^{2\nu s}\left\|V_3(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}&\le\left\|V_{30}(0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_3\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega}\right]V_3^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&\quad+2\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega A_3(\xi,s)V_3^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int_0^t\int_R\mathrm{e}^{2\nu s}\omega\Big[\big(\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\\
&\quad+\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+\alpha\beta_h\phi_3+\alpha\beta_w\phi_1+\sigma\alpha\beta_w\phi_2+\sigma\alpha\beta_h\phi_3\big)V_3^2\\
&\quad+\left(\alpha\beta_wV_4+\alpha\beta_w\phi_4+\alpha\beta_h\phi_3\right)V_1^2+\left(\alpha\beta_w\phi_1+\sigma\alpha\beta_w\phi_2\right)V_4^2\\
&\quad+\left(\sigma\alpha\beta_wV_4+\sigma\alpha\beta_w\phi_4+\sigma\alpha\beta_h\phi_3\right)V_2^2\Big]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{16}$$

$$e^{2\nu s}\left\|V_4(\xi,t)\right\|_{L^2_\omega}^2 \le \left\|V_{40}(0)\right\|_{L^2_\omega}^2 + d_4\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega}\right]V_4^2 d\xi ds$$
$$+2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega A_4(\xi,s)V_4^2 d\xi ds+\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\theta\left(V_3^2+V_4^2\right)d\xi ds$$

将(16)中不等式相加可得以下结论：

$$\sum_{i=1}^4 e^{2\nu t}\left\|V_i(\xi,t)\right\|_{L^2_\omega}^2+\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\sum_{i=1}^4 B_i^\nu(\xi,s)V_i^2 d\xi ds\le\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\xi,0)\right\|_{L^2_\omega}^2 .$$

其中

$$B_1^\nu(\xi,t)=-d_1\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_1-\psi-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h\phi_3,$$
$$B_2^\nu(\xi,t)=-d_2\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_2-\psi-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_h\phi_3,$$
$$B_3^\nu(\xi,t)=-d_3\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_3-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)$$
$$-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\theta,$$
$$B_4^\nu(\xi,t)=-d_4\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_4-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta.$$

引理 3 对任意的 $c>\max\{c^*,C_1,C_2,C_3,C_4\}$ 存在一个 $\nu>0$，$\forall(\xi,t)\in R\times R^+$，在满足下列假设条件(17)的情况下

$$\begin{aligned}&2(\kappa+\mu)>C_1\sigma_0\\&2\mu>C_2\sigma_0\\&2(\gamma+\mu)>C_3\sigma_0\\&2\delta>C_4\sigma_0\end{aligned}\tag{17}$$

使得对所有的 $(\xi,t)\in R\times R^+$ 都有 $B_i^\nu(\xi,t)\ge C_i$， $i=1,2,3,4$。

证. 分以下四种情况进行证明

Case 1 当 $\xi<\xi_0-1$ 时，

$$\omega(\xi)=e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0)},\omega(\xi-1)=e^{-\sigma_0(\xi-1-\xi_0)},\omega(\xi+1)=e^{-\sigma_0(\xi+1-\xi_0)},$$
$$\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}=-\sigma_0,\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}=e^{\sigma_0},\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}=e^{-\sigma_0}$$

此时可计算

$$B_1^0=-d_1\left(2+e^{-\sigma_0}+e^{\sigma_0}\right)-2\left[-2d_1-\frac{c\sigma_0}{2}-2(\kappa+\mu)-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)\right]$$
$$-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$\ge -D_1+C_1\sigma_0-d_1+2(\kappa+\mu)+\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+2\alpha\beta_h V_3+\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$=2(\kappa+\mu)+\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+2\alpha\beta_h V_3+\alpha\beta_h\phi_3\ge 0$$

$$B_2^0=-d_2\left(2+e^{-\sigma_0}+e^{\sigma_0}\right)-2\left[-2d_2-\frac{c\sigma_0}{2}-\mu-\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\sigma\alpha\beta_h\left(V_3+\phi_3\right)\right]$$
$$-\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$\geq -D_2+C_2\sigma_0-d_2+\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)+2\sigma\alpha\beta_hV_3+\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$=\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)+2\sigma\alpha\beta_hV_3+\sigma\alpha\beta_h\phi_3\geq 0$$

$$B_3^0=-d_3\left(2+e^{-\sigma_0}+e^{\sigma_0}\right)-2\left[-2d_3-\frac{c\sigma_0}{2}-\gamma-\mu+\sigma\alpha\beta_h\phi_2+\alpha\beta_h\left(V_1+\phi_1\right)+\sigma\alpha\beta_hV_2\right]$$
$$-\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\theta$$
$$\geq -D_3+C_3\sigma_0-d_3+2\left(\gamma+\mu\right)-2\sigma\alpha\beta_hk_1-2\sigma\alpha\beta_hk_2-\alpha\beta_wk_4-\sigma\alpha\beta_wV_4$$
$$-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_w\phi_4-\sigma\alpha\beta_w\phi_3-\theta$$
$$=2\left(\gamma+\mu\right)\geq 0$$

$$B_4^0=-d_4\left(2+e^{-\sigma_0}+e^{\sigma_0}\right)-2\left(-2d_4-\frac{c\sigma_0}{2}\right)+2\delta-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta$$
$$\geq -D_4+C_4\sigma_0-d_4+2\delta-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta$$
$$=2\delta\geq 0$$

Case 2.当 $\xi_0-1\leq\xi\leq\xi_0$ 时，$d_ie^{\sigma_0}-d_ie^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}>0$，以及 $\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}=-\sigma_0\,\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}=e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}\,\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}=e^{\sigma_0}$

此时可计算

$$B_1^0(\xi,t)=-d_1\left[2+e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}+e^{\sigma_0}\right]-2\left[-2d_1-\frac{c\sigma_0}{2}-(\kappa+\mu)-\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\alpha\beta_h\left(V_3+\phi_3\right)\right]$$
$$-\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$\geq d_1e^{-\sigma_0}+d_1\left[1-e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}\right]+C_1\sigma_0-D_1-d_1+2(\kappa+\mu)+\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)+2\alpha\beta_hV_3+\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$\geq 0$$

$$B_2^0(\xi,t)=-d_2\left[2+e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}+e^{\sigma_0}\right]-2\left[-2d_2-\frac{c\sigma_0}{2}-\mu-\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\sigma\alpha\beta_h\left(V_3+\phi_3\right)\right]$$
$$-\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$\geq d_2e^{-\sigma_0}+d_2\left[1-e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}\right]+C_2\sigma_0-D_2-d_2+2\mu+\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)+2\sigma\alpha\beta_hV_3+\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\psi$$
$$\geq 0$$

$$B_3^0(\xi,t)=-d_3\left[2+e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}+e^{\sigma_0}\right]-2\left[-2d_3-\frac{c\sigma_0}{2}-(\gamma+\mu)+\sigma\alpha\beta_h\left(V_2+\phi_2\right)+\alpha\beta_h\left(V_1+\phi_1\right)\right]$$
$$-\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\sigma\alpha\beta_w\left(V_4+\phi_4\right)-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_w\phi_3-\theta$$
$$\geq d_3e^{-\sigma_0}+d_3\left[1-e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}\right]+C_3\sigma_0-D_3-d_3+2(\gamma+\mu)-2\alpha\beta_hk_1-2\sigma\alpha\beta_hk_2$$
$$-\alpha\beta_wk_4-\sigma\alpha\beta_wk_4-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\theta$$
$$\geq 0$$

$$B_4^0(\xi,t)=-d_4\left[2+e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}+e^{\sigma_0}\right]-2\left(-2d_4-\frac{c\sigma_0}{2}-\delta\right)-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta$$
$$\geq d_4e^{-\sigma_0}+d_4\left[1-e^{\sigma_0(\xi-\xi_0)}\right]+C_4\sigma_0-D_4-d_4+2\delta-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta$$
$$\geq 0$$

Case 3.当 $\xi_0<\xi\le\xi_0+1$ 此时 $d_i e^{\sigma_0}-d_i e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}\le 0$， $\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}=0,\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}=0,\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}=e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}$

$$\begin{aligned}B_1^0(\xi,t)&=-d_1\left[-1+e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}\right]-2\left[-(\kappa+\mu)-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)\right]-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h\phi_3-\psi\\&\ge d_1\left(e^{-\sigma_0}-1\right)-D_1-d_1-\psi+2(\kappa+\mu)+2\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+2\alpha\beta_hV_3+\alpha\beta_h\phi_3\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2^0(\xi,t)&=-d_2\left[-1+e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}\right]-2\left[-\mu-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)\right]-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\psi\\&\ge d_2\left(e^{-\sigma_0}-1\right)-D_2-d_2+2\mu+\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+2\sigma\alpha\beta_hV_3+\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\psi\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_3^0(\xi,t)&=-d_3\left[-1+e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}\right]-2\left[-(\gamma+\mu)+\sigma\alpha\beta_h(V_2+\phi_2)+\alpha\beta_h(V_1+\phi_1)\right]\\&\quad-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\theta\\&\ge d_3\left(e^{-\sigma_0}-1\right)-D_3-d_3+2(\gamma+\mu)-2\alpha\beta_hk_1-2\sigma\alpha\beta_hk_2-\alpha\beta_wk_4-\sigma\alpha\beta_wk_4\\&\quad-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\theta\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_4^0(\xi,t)&=-d_4\left[-1+e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}\right]-2(-\delta)-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta\\&\ge d_4\left(e^{-\sigma_0}-1\right)-D_4-d_4+2\delta\\&\ge 0\end{aligned}$$

Case 4.当 $\xi>\xi_0+1$ 此时 $d_i e^{\sigma_0}-d_i e^{-\sigma_0(\xi-\xi_0-1)}>0$， $\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}=0,\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}=1,\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}=1$，可计算出

$$\begin{aligned}B_1^0(\xi,t)&=2(\kappa+\mu)+\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+\alpha\beta_h\phi_3+2\alpha\beta_hV_3-\psi\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2^0(\xi,t)&=2\mu+\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+\sigma\alpha\beta_h\phi_3+2\sigma\alpha\beta_hV_3-\psi\\&\ge d_2+2\mu+\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)+\sigma\alpha\beta_h\phi_3+2\sigma\alpha\beta_hV_3-C_2\sigma_0\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_3^0(\xi,t)&=2(\gamma+\mu)-2\alpha\beta_h(V_1+\phi_1)-2\sigma\alpha\beta_h(V_2+\phi_2)-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\\&\quad-\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\alpha\beta_h\phi_3-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\theta\\&\ge 2(\gamma+\mu)-C_3\sigma_0\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_4^0(\xi,t)&=2\delta-\alpha\beta_w\phi_1-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta\\&>2\delta-C_4\sigma_0\\&\ge 0\end{aligned}$$

综上即可得出当 $\nu>0$ 充分小时，总存在足够小的正常数 $C_i\ (i=1,2,3,4)$，使得 $B_i>C_i$。证毕。

进一步分别对(15)关于 ξ 进行微分得

$$
\begin{aligned}
V_{1t\xi}+cV_{1\xi\xi}&=d_1\left[V_{1\xi}(t,\xi+1)+V_{1\xi}(t,\xi-1)-2V_{1\xi}(t,\xi)\right]-V_{1\xi}\left[(\kappa+\mu)+\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\right.\\
&\quad\left.+\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)\right]-V_1\left[\alpha\beta_w(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\alpha\beta_h(V_{3\xi}+\phi_{3\xi})\right]\\
&\quad-\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_1-\alpha\beta_wV_4\phi_{1\xi}-\alpha\beta_hV_{3\xi}\phi_1-\alpha\beta_hV_3\phi_{1\xi}\\
V_{2t\xi}+cV_{2\xi\xi}&=d_2\left[V_{2\xi}(t,\xi+1)+V_{2\xi}(t,\xi-1)-2V_{2\xi}(t,\xi)\right]-V_{2\xi}\left[\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\right.\\
&\quad\left.+\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)+\mu\right]-V_2\left[\sigma\alpha\beta_w(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\sigma\alpha\beta_h(V_{3\xi}+\phi_{3\xi})\right]+\psi V_{1\xi}\\
&\quad-\sigma\alpha\beta_wV_4\phi_{2\xi}-\sigma\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_2-\sigma\alpha\beta_hV_3\phi_{2\xi}-\sigma\alpha\beta_hV_{3\xi}\phi_2\\
V_{3t\xi}+cV_{3\xi\xi}&=d_3\left[V_{3\xi}(t,\xi+1)+V_{3\xi}(t,\xi-1)-2V_{3\xi}(t,\xi)\right]+V_{3\xi}\left[-\gamma-\mu+\sigma\alpha\beta_h(V_2+\phi_2)\right.\\
&\quad\left.+\alpha\beta_h(V_1+\phi_1)\right]+V_3\left[\sigma\alpha\beta_h(V_{2\xi}+\phi_{2\xi})+\alpha\beta_h(V_{1\xi}+\phi_{1\xi})\right]+\alpha\beta_wV_4(V_{1\xi}+\phi_{1\xi})\\
&\quad+\alpha\beta_wV_1(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\sigma\alpha\beta_wV_2(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\sigma\alpha\beta_wV_4(V_{2\xi}+\phi_{2\xi})+\alpha\beta_wV_{1\xi}\phi_4\\
&\quad+\alpha\beta_hV_{1\xi}\phi_3+\alpha\beta_hV_1\phi_{3\xi}+\sigma\alpha\beta_hV_{2\xi}\phi_3+\sigma\alpha\beta_hV_2\phi_{3\xi}+\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_1+\sigma\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_2\\
V_{4t\xi}+cV_{4\xi\xi}&=d_4\left[V_{4\xi}(t,\xi+1)+V_{4\xi}(t,\xi-1)-2V_{4\xi}(t,\xi)\right]+\theta V_{3\xi}-\delta V_{4\xi}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

再将(15)两边同时乘以 $e^{2\nu t}\omega(\xi)V_{i\xi}(\xi,t)$， $i=1,2,3,4$ 得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}e^{2\nu t}\omega V_{1\xi}^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}e^{2\nu t}\omega V_{1\xi}^2\right)_\xi-d_1e^{2\nu t}\omega V_{1\xi}\left[V_{1\xi}(\xi+1,t)+V_{1\xi}(\xi-1,t)\right]\\
&=e^{2\nu t}\omega V_{1\xi}^2A_1(\xi,t)-e^{2\nu t}\omega V_{1\xi}V_1\left[\alpha\beta_w(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\alpha\beta_h(V_{3\xi}+\phi_{3\xi})\right]\\
&\quad-e^{2\nu t}\omega V_{1\xi}\left[\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_1+\alpha\beta_wV_4\phi_{1\xi}+\alpha\beta_hV_{3\xi}\phi_1+\alpha\beta_hV_3\phi_{1\xi}\right]\\
&\left(\frac{1}{2}e^{2\nu t}\omega V_{2\xi}^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}e^{2\nu t}\omega V_{2\xi}^2\right)_\xi-d_2e^{2\nu t}\omega V_{2\xi}\left[V_{2\xi}(\xi+1,t)+V_{2\xi}(\xi-1,t)\right]\\
&=e^{2\nu t}\omega V_{2\xi}^2A_2(\xi,t)-e^{2\nu t}\omega V_{2\xi}V_2\left[\sigma\alpha\beta_w(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\sigma\alpha\beta_h(V_{3\xi}+\phi_{3\xi})\right]\\
&\quad+e^{2\nu t}\omega V_{2\xi}\left[\psi V_{1\xi}-\sigma\alpha\beta_w\phi_{2\xi}V_4-\sigma\alpha\beta_w\phi_2V_{4\xi}-\sigma\alpha\beta_h\phi_{2\xi}V_3-\sigma\alpha\beta_h\phi_2V_{3\xi}\right]\\
&\left(\frac{1}{2}e^{2\nu t}\omega V_{3\xi}^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}e^{2\nu t}\omega V_{3\xi}^2\right)_\xi-d_3e^{2\nu t}\omega V_{3\xi}\left[V_{3\xi}(\xi+1,t)+V_{3\xi}(\xi-1,t)\right]\\
&=e^{2\nu t}\omega V_{3\xi}^2A_3(\xi,t)-e^{2\nu t}\omega V_{3\xi}V_3\left[\sigma\alpha\beta_h(V_{2\xi}+\phi_{2\xi})+\alpha\beta_h(V_{1\xi}+\phi_{1\xi})\right]\\
&\quad+e^{2\nu t}\omega V_{3\xi}\left[\alpha\beta_wV_{1\xi}(V_4+\phi_4)+\alpha\beta_wV_1(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\sigma\alpha\beta_wV_{2\xi}(V_4+\phi_4)\right.\\
&\quad+\alpha\beta_wV_2(V_{4\xi}+\phi_{4\xi})+\alpha\beta_hV_{1\xi}\phi_3+\alpha\beta_hV_1\phi_{3\xi}+\sigma\alpha\beta_hV_{2\xi}\phi_3+\sigma\alpha\beta_hV_2\phi_{3\xi}\\
&\quad\left.+\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_1+\alpha\beta_wV_4\phi_{1\xi}+\sigma\alpha\beta_wV_{4\xi}\phi_2+\sigma\alpha\beta_wV_4\phi_{2\xi}\right]\\
&\left(\frac{1}{2}e^{2\nu t}\omega V_{4\xi}^2\right)_t+\left(\frac{c}{2}e^{2\nu t}\omega V_{4\xi}^2\right)_\xi-d_4e^{2\nu t}\omega V_{4\xi}\left[V_{4\xi}(\xi+1,t)+V_{4\xi}(\xi-1,t)\right]\\
&=e^{2\nu t}\omega V_{4\xi}^2A_4(\xi,t)+e^{2\nu t}\omega\theta V_{3\xi}V_{4\xi}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

引理 4 对任意的正实数 C_6，成立估计式

$$
\sum_{i=1}^4 e^{2\nu t}\left\|V_{i\xi}(\cdot,t)\right\|_{L_\omega^2}^2+\int_0^t\int_R e^{-2\nu(t-s)}\omega\sum_{i=1}^4\left\|V_{i\xi}(\cdot,s)\right\|_{L_\omega^2}^2ds\le C_6e^{-2\nu t}\sum_{i=1}^4\left\|V_{i\xi}(\cdot,0)\right\|_{L_\omega^2}^2
$$

证. 再次利用 Cauchy-Schwarz 不等式从而得到

$$2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega V_{i\xi}V_{i\xi}(\xi\pm1,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \le \int_0^t e^{2\nu s}\int_R \omega\left(V_{i\xi}^2+V_{i\xi}^2(\xi\pm1,s)\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^t e^{2\nu s}\left[\int_R \omega V_{i\xi}^2\mathrm{d}\xi+\int_R \omega(\xi\mp1)V_{i\xi}^2\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}s.$$

以及

$$2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega V_{i\xi}V_{j\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \le \int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left(V_{i\xi}^2+V_{j\xi}^2\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\ i,j=1,2,3,4.$$

由 $V_i\in H_\omega^2$ 可知 $\left\{e^{2\nu s}\omega V_{i\xi}^2\right\}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}=0$，所以在 $R\times[0,t]$ 上关于 ξ 和 t 积分可得

$$\begin{aligned}
e^{2\nu t}\left\|V_{1\xi}(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}^2 \le{}& \left\|V_{1\xi}(\xi,0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_1\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]V_{1\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega A_1(\xi,s)V_{1\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\\
e^{2\nu t}\left\|V_{2\xi}(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}^2 \le{}& \left\|V_{2\xi}(\xi,0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]V_{2\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega A_2(\xi,s)V_{2\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\psi\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega(\xi)V_{1\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\\
e^{2\nu t}\left\|V_{3\xi}(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}^2 \le{}& \left\|V_{3\xi}(\xi,0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_3\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]V_{3\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega A_3(\xi,s)V_{3\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)+\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\right]V_{1\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)+\sigma\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\right]V_{2\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[\alpha\beta_w(V_1+\sigma\phi_1)+\alpha\beta_w(V_2+\phi_2)\right]V_{4\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[\sigma\alpha\beta_h V_3\phi_{2\xi}+\alpha\beta_h V_3\phi_{1\xi}+\alpha\beta_w V_1\phi_{4\xi}+\sigma\alpha\beta_w V_2\phi_{4\xi}\right.\\
&\left.+\alpha\beta_h V_1\phi_{3\xi}+\sigma\alpha\beta_h V_2\phi_{3\xi}+\alpha\beta_w V_4\phi_{1\xi}+\sigma\alpha\beta_w V_4\phi_{2\xi}\right]V_{3\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\\
e^{2\nu t}\left\|V_{4\xi}(\xi,t)\right\|_{L_\omega^2}^2 \le{}& \left\|V_{4\xi}(\xi,0)\right\|_{L_\omega^2}^2+d_4\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]V_{4\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\omega A_4(\xi,s)V_{4\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int_0^t\int_R e^{2\nu s}\theta\omega(\xi)V_{3\xi}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{20}$$

将(20)中不等式相加得

$$\begin{aligned}H(\xi,t)={}&\sigma\alpha\beta_h\phi_{2\xi}V_3V_{3\xi}+\alpha\beta_h\phi_{1\xi}V_3V_{3\xi}+\alpha\beta_w\phi_{4\xi}V_1V_{3\xi}+\sigma\alpha\beta_w\phi_{4\xi}V_2V_{3\xi}+\alpha\beta_h\phi_{3\xi}V_1V_{3\xi}\\&+\sigma\alpha\beta_h\phi_{3\xi}V_2V_{3\xi}+\alpha\beta_w\phi_{1\xi}V_4V_{3\xi}+\sigma\alpha\beta_w\phi_{2\xi}V_4V_{3\xi}.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
Q_1^\nu(\xi,t)&=-d_1\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_1-\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)-\psi,\\
Q_2^\nu(\xi,t)&=-d_2\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_2-\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)-\sigma\alpha\beta_w\phi_4-\alpha\beta_h(V_2+\phi_2)-\psi,\\
Q_3^\nu(\xi,t)&=-d_3\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_3-\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)-\alpha\beta_w(V_4+\phi_4)\\
&\quad-\sigma\alpha\beta_h(V_3+\phi_3)-\alpha\beta_w(V_1+\sigma\phi_1)-\alpha\beta_w\phi_4-\sigma\alpha\beta_w V_4-\sigma\alpha\beta_w\phi_2-\theta,\\
Q_4^\nu(\xi,t)&=-d_4\left[2+\frac{\omega(\xi+1)}{\omega(\xi)}+\frac{\omega(\xi-1)}{\omega(\xi)}\right]-2A_4-\alpha\beta_h(V_1+\phi_1)-\sigma\alpha\beta_w(V_2+\phi_2)-\theta.
\end{aligned}$$

利用和引理 4 相同的方法可以得出如下引理(此处省略证明)：

引理 5 当 $v>0$ 充分小时，存在一个正常数 $C_j, j=7,8,9,10$ 使得对所有的 $(\xi,t)\in R\times R^+$，都有 $Q_i^v(\xi,t)\ge C_j, i=1,2,3,4$。

引理 6 对任意的 $c>\max\{c_{\min},C_1,C_2,C_3,C_4\}$，存在一个 v_0 和一个正常数 C_{11} 使得

$$\sum_{i=1}^4\left\|V_{i\xi}(\cdot,t)\right\|_{L_\omega^2}^2+\int_0^t \mathrm{e}^{2v(t-s)}\sum_{i=1}^4\left\|V_{i\xi}(\cdot,s)\right\|_{L_\omega^2}^2\mathrm{d}s\le C_{11}\mathrm{e}^{-2vt}\sum_{i=1}^4\left\|V_{i\xi}(\cdot,0)\right\|_{L_\omega^2}^2$$

再对不等式(15)右边的最后一项进行估计。利用行波解 $(\phi_1(\xi),\phi_2(\xi),\phi_3(\xi),\phi_4(\xi))$ 的性质，可知对任意的 $\xi\in R$，$(\phi_1'(\xi),\phi_2'(\xi),\phi_3'(\xi),\phi_4'(\xi))$ 都是有界的。由 Young-不等式 $2xy\le\frac{1}{\eta}x^2+\eta y^2$，当 $\eta>0$ 时，存在一个正常数 $C_{12}>0$，有：

$$\left|H(\xi,t)\right|\le C_{12}(V_1+V_2+V_3+V_4)\left|V_{3\xi}\right|\le C_{12}\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^4 V_i^2(\xi,s)+\eta V_{3\xi}^2$$

则

$$\int_0^t\int_R \mathrm{e}^{2vs}\omega(\xi)H(\xi,s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\le C_{12}\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\cdot,0)\right\|_{L_\omega^2}^2+C_{12}\eta\int_0^t \mathrm{e}^{2vs}\sum_{i=1}^4\left\|V_{i\xi}(\cdot,s)\right\|_{L_\omega^2}^2\mathrm{d}s$$

结合上述结论，容易得到以下一致先验估计。

引理 7 对任意 $c>c^*$，存在一个正常数 C_{13} 和 v_1，$\forall t>0$，使得

$$\left\|V_i(\cdot,t)\right\|_{H_\omega^2}\le C_{13}\mathrm{e}^{-v_1t}\left(\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\cdot,0)\right\|_{H_\omega^1}^2\right)^{\frac{1}{2}}, i=1,2,3,4.$$

由标准的 Sobolev 嵌入不等式，对充分大的 $\bar{\xi}\gg1$，$H_\omega^1(R)\mapsto H^1(R)\mapsto C(R)$。但是对于任意区间 $I=(-\infty,\bar{\xi}]$，可得 $H_\omega^1(I)\mapsto C(I)$。于是可得下面的 L^∞ 估计。

引理 8 当 $t\ge0$ 时，对充分大的 $\bar{\xi}\gg1$，$\forall\xi\in I=(-\infty,\bar{\xi}]$ 存在正常数 C_{14}，使得

$$\sup\left|V_i(\xi,t)\right|\le C_{14}\mathrm{e}^{-v_1t}\left(\sum_{i=1}^4\left\|V_i(\cdot,0)\right\|_{H_\omega^1}^2\right)^{\frac{1}{2}}, i=1,2,3,4$$

为了将引理 8 所得到的结论扩展到整个区间 $(-\infty,\infty)$ 上的估计，故需要证明在 $\xi\to\infty$ 处 $V_i(\xi,t)$ 的收敛性。

引理 9 对所有的 $t\ge0$，总存在一个正常数 $C_{15}>0$，使得 $\lim_{\xi\to\infty}V_i(\xi,t)\le C_{15}\mathrm{e}^{-v_2t}, i=1,2,3,4$。

证. 首先易知 $V_{i\xi}(\infty,t)=0$，以及 $d_iD(V_i)(t,\infty)=0$，再基于 $V_i(t,\infty)$ 的有界性，当 $\xi\to\infty$ 时，由上述不等式变为

$$\begin{aligned}
V_{1t}\le&\left[d_1-\alpha\beta_wV_4(t,\infty)-\alpha\beta_w\phi_4-\alpha\beta_hV_3(t,\infty)-\alpha\beta_h\phi_3-\kappa-\mu\right]V_1(t,\infty)\\
&-\alpha\beta_w\phi_1V_4(t,\infty)-\alpha\beta_h\phi_1V_3(t,\infty)\\
V_{2t}\le&\left[d_2-\sigma\alpha\beta_wV_4(t,\infty)-\sigma\alpha\beta_w\phi_4-\sigma\alpha\beta_hV_3(t,\infty)-\sigma\alpha\beta_h\phi_3-\mu\right]V_2(t,\infty)\\
&+\psi V_1(t,\infty)-\sigma\alpha\beta_w\phi_2V_4(t,\infty)-\sigma\alpha\beta_h\phi_2V_3(t,\infty)\\
V_{3t}\le&\left[d_3+\alpha\beta_hV_1(t,\infty)+\alpha\beta_h\phi_1+\sigma\alpha\beta_hV_2(t,\infty)+\sigma\alpha\beta_h\phi_2-(\gamma+\mu)\right]V_3(t,\infty)\\
&+\alpha\beta_wV_1(t,\infty)V_4(t,\infty)+\alpha\beta_w\phi_4V_1(t,\infty)+\alpha\beta_w\phi_1V_4(t,\infty)+\sigma\alpha\beta_wV_2(t,\infty)V_4(t,\infty)\\
&+\sigma\alpha\beta_w\phi_2V_4(t,\infty)+\alpha\beta_h\phi_3V_1(t,\infty)+\sigma\alpha\beta_h\phi_3V_2(t,\infty)+\sigma\alpha\beta_w\phi_4V_2(t,\infty)\\
V_{4t}\le&(d_4-\delta)V_4(t,\infty)+\theta V_3(t,\infty)
\end{aligned}\tag{21}$$

将不等式(21)相加可得

$$\begin{aligned}&V_{1t}+V_{2t}+V_{3t}+V_{4t}-(\kappa+\mu-d_1-\psi)V_1(t,\infty)-(\mu-d_2)V_2(t,\infty)\\&=-(\gamma+\mu-\theta-d_3)V_3(t,\infty)-(\delta-d_4)V_4(t,\infty)\\&\le -K\left[V_1(t,\infty)+V_2(t,\infty)+V_3(t,\infty)+V_4(t,\infty)\right]\end{aligned}$$

其中 $K=\min\{\kappa+\mu-d_1-\psi,\gamma+\mu-\theta-d_3,\delta-d_4\}>0$，在 $[0,t]$ 上积分，存在一个常数 $\tilde{C}$ 使得 $V_{1t}+V_{2t}+V_{3t}+V_{4t}\le \tilde{C}e^{-\nu_2 t}$。

因此，必存在一个正常数 C_{16} 使得

$$\lim_{\xi\to\infty}V_i(\xi,t)\le C_{16}e^{-\nu_2 t},i=1,2,3,4$$

结合引理 8 和引理 9，可证明出当 $\xi\in R$ 时，$V_i(\xi,t)$ 的 L^∞ 收敛性。

因此，可得结论

$$\lim_{\xi\to\infty}V_i(\xi,t)\le Ce^{-\hat{\nu}t},i=1,2,3,4$$

其中 $0<\hat{\nu}<\min\{\nu_1,\nu_2\}$。

第二步.证明 $u_i^-(x,t)$ 收敛到 $\phi_i(x+ct),i=1,2,3,4$。

用类似于第一步的方法即可马上证明出第二步的结论，故此省略。

第三步.证明 $u_i(x,t)$ 收敛到 $\phi_i(x+ct),i=1,2,3,4$。

由挤压原理，易得以下结论：

引理 10 存在一些正常数 C，有

$$\sup_{x\in R}\left\|u_i(x,t)-\phi_i(x+ct)\right\|\le Ce^{-\nu t},t\ge 0$$

4. 总结

本文研究一类离散扩散霍乱传染病模型行波解的稳定性问题，是 liao 和 Yang 在文章[32]中对霍乱模型行波解的存在性进行研究之后，作进一步延续。本文主要证明模型的大波速行波解是关于时间 t 的全局指数渐近稳定的，即行波解能保持稳定不受外界环境的干扰。这些有效的理论结果不仅对霍乱传染病模型适用，还可以推广到所有的水源性传染病模型行波解的研究中。而小波速行波解的稳定性研究以及在非拟单调情况下的稳定性，都将是以后的工作重点之一。

基金项目

重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2020jcyj-msxmX0394)。

参考文献

[1] Wang, Z.C. and Wu, J. (2010) Traveling Waves of a Diffusive Kermack—McKendrick Epidemic Model with Nonlocal Delayed Transmission. *Proceedings Mathematical physical and Engineering Sciences*, **2113**, 237-261. https://doi.org/10.1098/rspa.2009.0377

[2] Xu, Z. and Guo, T. (2019) Traveling Waves in a Diffusive Epidemic Model with Criss-Cross Mechanism. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **6**, 2892-2908. https://doi.org/10.1002/mma.5559

[3] Li, Y., Li, W.T. and Lin, G. (2015) Traveling Waves of a Delayed Diffusive SIR Epidemic Model. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **3**, 1001-1022. https://doi.org/10.3934/cpaa.2015.14.1001

[4] Wang, X.S., Wang, H. and Wu, J. (2012) Traveling Waves of Diffusive Predator-Prey Systems: Disease Outbreak Propagation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **9**, 3303-3324. https://doi.org/10.3934/dcds.2012.32.3303

[5] Qiao, S.X., Yang, F.Y. and Li, W.T. (2019) Traveling Waves of a Nonlocal Dispersal SEIR Model with Standard Incidence. *Nonlinear Analysis*: *Real World Application*, **49**, 196-216. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.03.003

[6] Tian, B. and Yuan, R. (2017) Traveling Waves for a Diffusive SEIR Epidemic Model with Non-Local Reaction and with Standard Incidences. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **50**, 432-449. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.05.040

[7] Zhang, S.P., Yang, Y.R. and Zhou, Y.H. (2018) Traveling Waves in a Delayed SIR Model with Nonlocal Dispersal and Nonlinear Incidence. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article ID: 011513. https://doi.org/10.1063/1.5021761

[8] Li, Y., Li, W.T. and Yang, F.Y. (2014) Traveling Waves for a Nonlocal Dispersal SIR Model with Delay and External Supplies. *Applied Mathematics and Computation*, **247**, 723-740. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.09.072

[9] Mei, M., Lin, C.K., Lin, C.T. and So, J.W.H. (2009) Traveling Wavefronts for Time-Delayed Reaction-Diffusion Equation: 11 Nonlocal Nonlinearity. *Differential Equations*, **247**, 511-529. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.12.020

[10] Yang, Y.R., Li, W.T. and Wu, S.L. (2013) Stability of Traveling Waves in a Monostable Delayed System without Quasi-Monotonicity. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **14**, 1511-1526. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.10.015

[11] Yang, Y.R., Li, W.T. and Wu, S.L. (2011) Exponential Stability of Traveling Fronts in a Diffusion Epidemic System with Delay. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **12**, 1223-1234. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.09.017

[12] Hsu, C.H., Wang, T.S. and Yu, Z.X. (2018) Existence and Exponential Stability of Traveling Waves for Delayed Reaction-Diffusion Systems. *Nonlinearity*, **31**, 838-863. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa99a1

[13] Li, M.Q. and Weng, P.X. (2018) Nonlinear Stability of Traveling Waves for a Multi-Type SIS Epidemic Model. *International Journal of Bio-Mathematics*, **11**, Article ID: 1850003. https://doi.org/10.1142/S1793524518500031

[14] Su, S. and Zhang, G.B. (2020) Global Stability of Traveling Waves for Delay Reaction-Diffusion Systems without Quasi-Monotonicity. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 46, 1-18 https://doi.org/10.58997/ejde.2020.46

[15] Zhang, G.B., Li, Y. and Feng, Z.S. (2018) Exponential Stability of Traveling Waves in a Non-Local Dispersal Epidemic Model with Delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **344**, 47-72. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.05.018

[16] Wu, S.L., Li, W.T. and Liu, S.Y. (2009) Asymptotic Stability of Traveling Wave Fronts in Non-Local Reaction Diffusion Equations with Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **360**, 439-458. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.06.061

[17] Wu, S.L. and Chen, G.S. (2017) Uniqueness and Exponential Stability of Traveling Wave Fronts for a Multi-Type SIS Nonlocal Epidemic Model. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **36**, 267-277. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.02.001

[18] Yang, Y.R. and Liu, L. (2016) Stability of Traveling Waves in a Population Dynamics Model with Spatiotemporal Delay. *Nonlinear Analysis*, **132**, 183-195. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.11.006

[19] Yang, Z.X. and Zhang, G.B, (2018) Stability of Non-Monotone Traveling Waves for a Discrete Diffusion Equation with Monostable Convolution Type Nonlinearity. *Science China Mathematics*, **61**, 1789-1806. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9175-2

[20] Hsu, C.H. and Lin, J.J. (2019) Stability of Traveling Wave Solutions for a Spatially Discrete SIS Epidemic Model. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **70**, Article No. 62. https://doi.org/10.1007/s00033-019-1107-1

[21] Su, S. and Zhang, G.B. (2018) Stability of Traveling Wavefronts for a Three-Component Lotka-Volterra Competition System on a Lattice. *Electronic Journal of Differential Equations*, **57**, 1-16.

[22] Zhao, H.Q., Weng, P.X. and Liu, S.Y. (2014) Uniqueness and Stability of Traveling Wave Fronts for an Age-Structured Population Model in a 2D Lattice Strip. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**, 507-519. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.06.032

[23] Su, T. and Zhang, G.B. (2020) Global Stability of Non-Monotone Noncritical Traveling Waves for a Discrete Diffusion Equation with a Convolution Type Nonlinearity. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **24**, 937-957. https://doi.org/10.11650/tjm/190901

[24] Su, T. and Zhang, G.B. (2020) Invasion Traveling Waves for a Discrete Diffusive Ratio-Dependent Predator-Prey Model. *Acta Mathematica Scientia*, **40**, 1459-1476. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0517-7

[25] Tian, G., Zhang, G.B. and Yang, Z.X. (2017) Stability of Nonmonotone Critical Traveling Waves for Spatially Discrete Reaction-Diffusion Equations with Time Delay. *Turkish Journal of Mathematics*, **41**, 655-680. https://doi.org/10.3906/mat-1601-19

[26] Codeço, C.T. (2001) Endemic and Epidemic Dynamics of Cholera: The Role of the Aquatic Reservoir. *BMC Infectious Diseases*, **1**, Article No. 1. https://doi.org/10.1186/1471-2334-1-1

[27] Hartley, D.M., Morris, J.G. and Smith, D.L. (2006) Hyperinfectivity: A Critical Element in the Ability of *V. Cholerae*

to Cause Epidemics. *PLOS Medicine*, **3**, e7. https://doi.org/10.1371/journal.pmed.0030007

[28] Mukandavire, Z., Liao, S., Wang, J., Gaff, H., Smith, D.L. and Morris, J.G. (2011) Estimating the Reproductive Numbers for the 2008-2009 Cholera Outbreaks in Zimbabwe. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **21**, 8767-8772. https://doi.org/10.1073/pnas.1019712108

[29] Tien, J.H. and Earn, D.J.D. (2010) Multiple Transmission Pathways and Disease Dynamics in a Waterborne Pathogen Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, **6**, 1506-1533. https://doi.org/10.1007/s11538-010-9507-6

[30] Shuai, Z. and Driessche, P.V.D. (2011) Global Dynamics of Cholera Models with Differential Infectivity. *Mathematical Biosciences*, **2**, 118-126. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.09.003

[31] Kong, J.D., Davis, W. and Wang, H. (2014) Dynamics of a Cholera Transmission Model with Immunological Threshold and Natural Phage Control in Reservoir. *Bulletin of Mathematical Biology*, **8**, 2025-2051. https://doi.org/10.1007/s11538-014-9996-9

[32] Liao, S. and Yang, W. (2019) Cholera Model Incorporating Media Coverage with Multiple Delays. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 419-439. https://doi.org/10.1002/mma.5175

[33] Liao, S. and Wang, J. (2011) Stability Analysis and Application of a Mathematical Cholera Model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **8**, 733-752. https://doi.org/10.3934/mbe.2011.8.733

[34] Sun, G.Q., Xie, J.H., Huang, S.H., Jin, Z., Li, M.T. and Liu, L. (2017) Transmission Dynamics of Cholera: Mathematical Modeling and Control Strategies. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **45**, 235-244. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.10.007

[35] Song, H.F. and Zhang, Y.X. (2019) Traveling Waves for a Diffusive SIRB Epidemic Model with Multiple Transmission Pathways. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation*s, No. 86, 1-19. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.86

[36] Lin, J., Andreasen, V. and Casagrandi, R. (2003) Traveling Waves in a Model of Influenza A Drift. *Journal of Theoretical Biology*, **222**, 437-445. https://doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00056-0

[37] Ducrot, A. and Magal, P. (2009) Traveling Wave Solutions for an Infection-Age Structured Model with Diffusion. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. *Section A*: *Mathematics*, **139**, 459-482. https://doi.org/10.1017/S0308210507000455