Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(12), 5010-5017
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1212492

Hans汉斯

具有Beddington-DeAnglis发生率和饱和治疗率的SEIRS模型的研究

杨睿文

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月4日；发布日期：2023年12月13日

摘 要

本文建立了具有Beddington-DeAnglis发生率和饱和治疗率的SEIRS模型，通过构造Lyapunov函数和Dulac函数，并利用Hurwitz判据来分析无病平衡点和地方性平衡点的稳定性。可以得到，当 $R_0 < R^c < 1$ 时，无病平衡点是局部渐进稳定和全局渐进稳定的，根据平面定性理论以及Dulac函数，地方性平衡点是局部渐进稳定和全局渐进稳定的。

关键词

饱和治疗率，Lyapunov函数，平面定性理论

Study on SEIRS Model with Beddington-DeAnglis Incidence and Saturation Treatment Rate

Ruiwen Yang

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 4th, 2023; published: Dec. 13th, 2023

Abstract

This article establishes a SEIRS model with Beddington-DeAnglis incidence and saturation treatment rates. By constructing Lyapunov and Dulac functions, and using the Hurwitz criterion, the stability of disease-free and endemic equilibrium points is analyzed. It can be obtained that when $R_0 < R^c < 1$, the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable and globally asymptotically stable.

文章引用: 杨睿文. 具有 Beddington-DeAnglis 发生率和饱和治疗率的 SEIRS 模型的研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(12): 5010-5017. DOI: 10.12677/aam.2023.1212492

According to plane qualitative theory and Dulac function, the local equilibrium point is locally asymptotically stable and globally asymptotically stable.

Keywords

Saturation Treatment Rate, Lyapunov Function, Planar Qualitative Theory

1. 引言

在经典的传染病传播模型中，K-M [1]将群体分为$S(t),I(t),R(t)$三个仓室，分别表示时间t时，易感者，感染者和恢复者的个体数量。然而，对于大多数的传染病传播中，在易感者和感染者之间往往会有一个潜伏期，设$E(t)$为t时间潜伏者的个体数量，易感者感染之后会首先进入潜伏者仓室E，再进入感染者仓室，假设恢复的个体具有暂时的免疫力，易感–潜伏–感染–恢复(*SEIR*)模型可写为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-dS-h(I)S+\delta R, \\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=h(I)S-(d+\varepsilon)E, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\varepsilon E-(d+\gamma)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(d+\delta)R, \end{cases}$$

其中A是种群的出生率，d是种群的死亡率，ε是个体感染后经过潜伏期到达感染类的速率，γ是感染者的自然恢复率，δ是恢复个体失去免疫力返回易感类的速率，$h(I)S$是发生率，$h(I)$是衡量疾病传染力的函数。

发生率$g(I)S$在描述疾病传播过程中起到非常重要的作用，假定接触率与环境内人口数量成正比，N为环境内人口总数量，βN为有效接触率，其中β为有效接触率系数(或传染率系数)疾病的发生率为$\beta N\dfrac{S}{N}I=\beta SI$，这种发病率为双线性发生率，其中$h(I)=\beta I$，但是这种发生率在人口数量很大时，显然是不符合实际的，这是因为在单位时间内一个病人接触他人的数量是有限的，随后，K-M 假定接触率为一个常数，给出了标准发生率$\beta\dfrac{S}{N}I$，对于人或者某种群居动物而言，标准发生率比双线性发生率更符合实际。

Capasso 和 Serio [2]提出了一种介于双线性发生率和标准发生率之间更符合实际的饱和发生率

$$h(I)S=\frac{kIS}{1+\omega I},$$

其中kI是描述疾病的传染力，对于$h(I)$而言，当I较小时，它与I近似成正比，当I逐渐增大达到饱和时，它近似于常数$\dfrac{k}{\omega}$。

阮士贵[3]等人提出了一种广义发生率 $h(I)S=\dfrac{kI^pS}{1+\omega I^q}$，当 $p>q$ 时，为无界发生率；当 $p=q$ 时，为饱和发生率；当 $p<q$ 时，为非单调发生率。Miao [4] [5] [6] [7]等人在传染病模型中研究过 Beddington-DeAnglis 发生率 $\dfrac{\beta SI}{1+aS+bI}$，当 $a=b=0$ 时，为双线性发生率；当 $a>0,b=0$ 时，为易感者的饱和发生率；当 $a=0,b>0$ 时，为易感者的饱和发生率。因为同时考虑了易感者和感染者的双重抑制作用，相对于其他发生率更具有一般意义。张[8]等人研究了一类具有饱和发生率和饱和恢复率的 SIS 模型，其中饱和治疗函数为 $\dfrac{cI}{1+\alpha I},c>0,\alpha>0$，参数 α 描述在医疗条件有限的条件下患病者的治疗被耽误的影响。宋[9]等人建立了一种 SEIRS 斑块模型，探究了当易感个体的扩散率趋近于零时，地方病平衡点的长期行为。曹[10]等人研究了一类具有年龄结构和时滞的 SEIRS 模型，分析模型所产生的的 Hopf 分支。李[11]等人建立了一种具有 Beddington-DeAnglis 函数响应和 Holling II 函数响应的双浮游植物单浮游动物模型，利用正规形理论和中心流形定理研究了 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性。

基于以上文献，本文提出了一种具有 Beddington-DeAnglis 发生率和饱和治疗率的 SEIRS 模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-dS-\dfrac{\beta SI}{1+aS+bI}+\delta R,\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta SI}{1+aS+bI}-(d+\varepsilon)E,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\varepsilon E-(d+\gamma)I-\dfrac{cI}{1+\alpha I},\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I+\dfrac{cI}{1+\alpha I}-(d+\delta)R.\end{cases}\tag{1.1}$$

2. 解的非负性和有界性

2.1. 解的非负性

假设当 $t=t_1$ 时，S 首次穿过 t 轴，即 $\left.\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}<0$，存在 $t_1^*>t_1$，使得 $S(t_1^*)<0$，有 $S(t_1)=0$，$E(t_1)\ge 0$，$I(t_1)\ge 0$，$R(t_1)\ge 0$。而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}=A+\delta R(t_1)>0$，与假设矛盾，故 $S\ge 0$。同理可得，$E\ge 0$，$I\ge 0$，$R\ge 0$。

2.2. 解的有界性

定理 1：平面 $S+E+I+R=\dfrac{A}{d}$ 是系统的不变流形，在第一象限是吸引的。

证明：将系统(1.1)的四个方程相加，记为 $L(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$，有 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=A-dL$，显然，$L(t)=\dfrac{A}{d}$ 是系统(1.1)的一个解，且任意初始条件下 $L(t_0)\ge 0$，系统(1.1)的通解为

$$L(t)=\frac{1}{d}\left(A-\left(A-dL(t_0)\right)\mathrm{e}^{-d(t-t_0)}\right),$$

因此

$$\lim_{t\to\infty}L(t)=\frac{A}{d},$$

从而结论成立。

由定理 1 可知，对于系统(1.1)的任意解 $\left(S(t),E(t),I(t),R(t)\right)$，当 t 足够大时，有 $S(t)<\frac{A}{d}$，$E(t)<\frac{A}{d}$，$I(t)<\frac{A}{d}$，$R(t)<\frac{A}{d}$。

3. 基本再生数

由系统容易得到无病平衡点 $E_0=\left(\frac{A}{d},0,0,0\right)$，基本再生数是刻画一个传染病传播的重要的阈值。

根据下一代矩阵方法[12]，可以得到

$$N=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta SI}{1+aS+bI}\\0\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}(d+\varepsilon)E\\(d+\gamma)I+\dfrac{cI}{1+\alpha I}-\varepsilon E\end{pmatrix},$$

有

$$F=\begin{pmatrix}0&\dfrac{\beta S+a\beta S^2}{(1+aS+bI)^2}\\0&0\end{pmatrix},V=\begin{pmatrix}d+\varepsilon&0\\-\varepsilon&d+\gamma+\dfrac{c}{(1+\alpha I)^2}\end{pmatrix},$$

可得

$$\rho\left(FV^{-1}\right)=\frac{\beta\varepsilon A}{(d+aA)(d+\varepsilon)(d+\gamma+c)},$$

即，基本再生数 $R_0=\dfrac{\beta\varepsilon A}{(d+aA)(d+\varepsilon)(d+\gamma+c)}$。

4. 稳定性分析

4.1. 无病平衡点的稳定性

为了证明无病平衡点 E_0 的全局稳定性，首先在 $R_0<1$ 下无病平衡点局部渐进稳定，再通过构造 Lyapunov 函数证明平衡点全局渐进稳定。

系统(1.1)在 E_0 处的 Jacobin 矩阵为

$$J_{(E_0)}=\begin{pmatrix}-d&0&-\dfrac{\beta\frac{A}{d}+\beta a\left(\frac{A}{d}\right)^2}{\left(1+a\frac{A}{d}\right)^2}&\delta\\0&-(d+\varepsilon)&\dfrac{\beta\frac{A}{d}+\beta a\left(\frac{A}{d}\right)^2}{\left(1+a\frac{A}{d}\right)^2}&0\\0&\varepsilon&-(d+\gamma+c)&0\\0&0&\gamma+c&-(d+\delta)\end{pmatrix},$$

它的特征方程为

$$\left(\lambda+d\right)\left(\lambda+d+\delta\right)\left(\left(\lambda+d+\varepsilon\right)\left(\lambda+d+\gamma+c\right)-\frac{\beta\varepsilon A}{d+aA}\right)=0,$$

整理得

$$\left(\lambda+d\right)\left(\lambda+d+\delta\right)\left(\lambda^2+\left(2d+\varepsilon+\gamma+c\right)\lambda+\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+c\right)-\frac{\beta\varepsilon A}{d+aA}\right)=0,$$

得到特征值 $\lambda_1=-d<0$，$\lambda_2=-\left(d+\delta\right)<0$。

由根与系数的关系可得

$$\lambda_3+\lambda_4=-\left(2d+\varepsilon+\gamma+c\right)<0,$$

$$\lambda_3\cdot\lambda_4=\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+c\right)-\frac{\beta\varepsilon A}{d+aA}=\frac{\left(d+aA\right)\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+c\right)\left(1-R_0\right)}{d+aA},$$

当 $R_0<1$ 时，$\lambda_3\cdot\lambda_4>0$，即 $\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$，$\lambda_3<0$，$\lambda_4<0$，无病平衡点 E_0 局部渐进稳定。

设 $R_0<R^c<1$，其中 $R^c=\dfrac{\beta\varepsilon A}{d\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+\dfrac{c}{1+\dfrac{A}{d}\alpha}\right)}$，构造 Lyapunov 函数 $V=\varepsilon E+\left(d+\varepsilon\right)I$，易知 V 是正定的。

对 V 求全导得

$$\begin{aligned}
\dot{V}&=\varepsilon\dot{E}+\left(d+\varepsilon\right)\dot{I}\\
&=\varepsilon\left[\frac{\beta SI}{1+aS+bI}-\left(d+\varepsilon\right)E\right]+\left(d+\varepsilon\right)\left(\varepsilon E-\left(d+\gamma\right)I-\frac{cI}{1+\alpha I}\right)\\
&=\frac{\varepsilon\beta SI}{1+aS+bI}-\left(d+\varepsilon\right)\left(\left(d+\gamma\right)I+\frac{cI}{1+\alpha I}\right)\\
&=\left(\frac{\varepsilon\beta S}{1+aS+bI}-\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+\frac{c}{1+\alpha I}\right)\right)I\\
&\le\left(\varepsilon\beta S-\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+\frac{c}{1+\alpha I}\right)\right)I\\
&\le\left(\varepsilon\beta\frac{A}{d}-\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+\frac{c}{1+\frac{A}{d}\alpha}\right)\right)I\\
&=\left(R^C-1\right)\left(d+\varepsilon\right)\left(d+\gamma+\frac{c}{1+\frac{A}{d}\alpha}\right)I
\end{aligned}$$

故，当 $R_0<R^c<1$ 时，无病平衡点全局渐进稳定。

4.2. 地方病平衡点的稳定性

由定理 1 可知，系统的极限集在平面 $S+E+I+R=\dfrac{A}{d}$，因此，我们研究以下简化系统来讨论地方病平衡点的稳定性：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A - ds - \dfrac{\beta SI}{1+aS+bI} + \delta\left(\dfrac{d}{A} - S - E - I\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\beta SI}{1+aS+bI} - (d+\varepsilon)E, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \varepsilon E - (d+\gamma)I - \dfrac{cI}{1+\alpha I}, \end{cases} \tag{4.1}$$

存在正平衡点 $E^* = (S^*, E^*, I^*)$，系统(4.1)在 E^* 处的 Jacobin 矩阵为

$$J_{(E^*)} = \begin{pmatrix} -d - \dfrac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2} & -\delta & -\dfrac{\beta S^* + b\beta S^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2} - \delta \\ \dfrac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2} & -(d+\varepsilon) & \dfrac{\beta S^* + b\beta S^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2} \\ 0 & \varepsilon & -(d+\gamma) - \dfrac{c}{(1+\alpha I^*)^2} \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^3 - tr(A)\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda - |A| = 0,$$

其中

$$tr(A) = -d - \frac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2} - (d+\varepsilon) - (d+\gamma) - \frac{c}{(1+\alpha I^*)^2}$$

$$A_{11} = (d+\varepsilon)\left((d+\gamma) + \frac{c}{(1+\alpha I^*)^2}\right) - \frac{\beta S^* + b\beta S^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2}\varepsilon$$

$$A_{22} = \left(d + \frac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2}\right)\left((d+\gamma) + \frac{c}{(1+\alpha I^*)^2}\right) > 0$$

$$A_{33} = \left(d + \frac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2}\right)(d+\varepsilon) + \frac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2}\delta > 0$$

$$A_{21} = \left((d+\gamma)\frac{c}{(1+\alpha I^*)^2}\right)\delta + \left(\frac{\beta S^* + b\beta S^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2} + \delta\right)\varepsilon > 0$$

$$|A| = \left(-d - \frac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2}\right)A_{11} - \frac{\beta I^* + b\beta I^{*2}}{(1+aS^*+bI^*)^2}A_{21}$$

在这里我们假设 $A_{11} > 0$，有 $|A| > 0$。根据霍尔维茨定理[13]，我们得到特征值都有负实部，即地方性平衡点局部渐进稳定。

令

DOI: 10.12677/aam.2023.1212492

$$M(S,E,I)=A-ds-\frac{\beta SI}{1+aS+bI}+\delta\left(\frac{d}{A}-S-E-I\right),$$
$$N(S,E,I)=\frac{\beta SI}{1+aS+bI}-(d+\varepsilon)E,$$
$$P(S,E,I)=\varepsilon E-(d+\gamma)I-\frac{cI}{1+\alpha I},$$

选取 $B(S,E,I)=\frac{1+\alpha I}{EI}$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}S}+\frac{\mathrm{d}(BE)}{\mathrm{d}E}+\frac{\mathrm{d}(BI)}{\mathrm{d}I}&=-\frac{(1+\alpha I)d}{EI}-\frac{\beta(1+\alpha I)(1+bI)E}{(1+aS+bI)^2E^2}-\frac{\delta(1+\alpha I)}{EI}\\&\quad-\frac{\beta(1+\alpha I)S}{E^2(1+aS+bI)}-\frac{\varepsilon}{I^2}-\frac{(d+\gamma)\alpha}{E}\\&<0\end{aligned}$$

由平面定性理论可知，系统(4.1)无闭轨[13]，所以，地方性平衡点在 D 内全局渐进稳定。

5. 结论

本文建立了具有 Beddington-DeAnglis 发生率和饱和治疗率的 SEIRS 模型，通过构造 Lyapunov 函数，当 $R_0<R^c<1$ 时，无病平衡点是局部渐进稳定和全局渐进稳定的。利用 Hurwitz 判据和平面定性理论，通过构造 Dulac 函数，地方病平衡点是局部渐进稳定和全局渐进稳定的。虽然饱和治疗率对系统动力学特性没有影响，但影响基本再生数，进而影响平衡点稳定性，通过增加饱和治疗率，使得系统的基本再生数降低，减少了易感者感染的风险。

参考文献

[1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] Capasso, V. and Serio, G. (1978) A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, **42**, 43-61. https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90006-8

[3] Lu, M., Huang, J.C., Ruan, S.G. and Yu, P. (2019) Bifurcation Analysis of an SIRS Epidemic Model with a Generalized Nonmonotone and Saturated Incidence Rate. *Journal of Differential Equations*, **267**, 1859-1898. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.03.005

[4] Miao, A., Wang, X.Y., Zhang, T.Q., *et al*. (2017) Dynamical Analysis of a Stochastic SIS Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate and Double Epidemic Hypothesis. *Advances in Difference Equations*, **2017**, Article No. 226. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1289-9

[5] Li, J.J., Zhi, X. and Fu, C. (2016) The Stability of an SEIRS Model with Beddington-DeAngelis Incidence, Vertical Transmission and Time Delay. *Journal of Anhui Normal University*, **39**, 26-32.

[6] Chen, Y. and Zhao, W.C. (2020) Asymptotic Behavior and Threshold of a Stochastic SIQS Epidemic Model with Vertical Transmission and Beddington-DeAngelis Incidence. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 353. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02815-6

[7] Lin, Y.G., Wang, L.B. and Dong, X.W. (2019) Long-Time Behavior of a Regime-Switching SIRS Epidemic Model with Degenerate Diffusion. *Physica A*, **529**, 121-551. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.121551

[8] Zhang, X. and Liu, X.N. (2008) Backward Bifuncation of Epidemic Model with Saturated Treatment Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **348**, 433-433. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.07.042

[9] Yin, S.S., Wu, J.H. and Song, P.F. (2023) Analysis of a Heterogeneous SEIRS Patch Model with Asymmetric Mobility Kernel. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **20**, 13434-13456. https://doi.org/10.3934/mbe.2023599

[10] You, X.M. and Li, X. (2021) Stability and Bifurcation for a Delayed Diffusive Two-Zooplankton One-Phytoplankton Model with Two Different Functions. *Complexity*, **2021**, Article ID: 55601571. https://doi.org/10.1155/2021/5560157

[11] Cao, H., Han, M.M., Yang, J.Y., Liu, L.L. and Li H.Y. (2023) Hopf Bifurcation of an Seirs Model with Age Structure and Time Delay. *Journal of Biological Systems*, **31**, 245-269. https://doi.org/10.1142/S0218339023500122

[12] Dreessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6

[13] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.