Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(12), 5018-5026
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1212493

基数约束优化问题的松弛正线性约束规范

王雪纯，吴　霜

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月4日；发布日期：2023年12月14日

摘　要

基数约束优化问题在投资组合和统计回归等领域都有着广泛的应用。由于基数约束优化问题带有非凸非连续的约束，所以这类问题往往是难于求解的。为了处理较难的基数约束，可以通过引入连续变量将其改写为连续的非线性规划问题。但是大多数标准的约束规范并不适用于改写后的问题，因此有必要研究基数约束优化问题的约束规范。本文给出了基数约束优化问题的一个新的约束规范并证明了该约束规范可以保证最优性条件的成立。此外，还进一步讨论了新旧约束规范之间的强弱关系。

关键词

基数约束优化问题，约束规范，KKT条件

A Relaxed Constant Positive Linear Dependence Constraint Qualification for Cardinality-Constrained Optimization Problems

Xuechun Wang, Shuang Wu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 4th, 2023; published: Dec. 14th, 2023

Abstract

Cardinality-Constrained (CC) optimization problems are widely used in many fields such as portfolio optimization and statistical regression. Such problems are difficult to deal with, because it involves a constraint that is not continuous neither convex. A classical way to deal with this diffi-

文章引用: 王雪纯, 吴霜. 基数约束优化问题的松弛正线性约束规范[J]. 应用数学进展, 2023, 12(12): 5018-5026.
DOI: 10.12677/aam.2023.1212493

cult cardinality constraint consists of introducing continuous variables and then rewriting this kind of problem as a continuous nonlinear problem. The standard constraint qualifications are usually violated for the NLP-reformulation. It is necessary to consider suitable constraint qualifications for cardinality-constrained optimization problems. In this paper, we first define a new constraint qualification for cardinality constrained problems. We show that this constraint qualification ensures optimality conditions for constrained problems. Moreover, we discuss the relations between the old and new constraint qualifications.

Keywords

Cardinality-Constrained Optimization Problems, Constraint Qualification, KKT Conditions

1. 引言

本文主要研究基数约束优化问题(cardinality constrained optimization problems，简称 CCOP)：

$$\begin{aligned}&\min_{x} f(x)\\&\text{s.t. } g_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m,\\&\quad\ \ h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p,\\&\quad\ \ \|x\|_0\le\kappa.\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中，$f,g_i,h_i:R^n\to R$ 是连续可微的，$\|x\|_0$ 表示向量 x 的非零分量的数量。

基数约束优化问题在许多方面有所应用，包括用于约束分类优化问题[1]，资产数量约束下的投资组合优化问题[2]等。由于基数约束 $\|x\|_0\le\kappa$ 的存在很难求解，所以 1996 年 Bienstock [3]提出通过引入合适的二进制变量来重新表述，使得基数约束优化问题通常可以被视为一个混合整数问题。2016 年 Oleg P. Burdakov 等人[4]将混合整数问题改写为以下形式的连续优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{x,y} f(x)\\&\text{s.t. } g_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m,\\&\quad\ \ h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p,\\&\quad\ \ e^{\mathrm{T}}y\ge n-\kappa,\\&\quad\ \ 0\le y_i\le 1,\ i=1,\cdots,n,\\&\quad\ \ x_iy_i=0,\ i=1,\cdots,n.\end{aligned}\tag{1.2}$$

文献[4]指出，问题(1.1)和问题(1.2)之间存在着非常紧密的联系：x^* 是问题(1.1)的一个解(全局极小点)当且仅当存在一个向量 y^* 使得 (x^*,y^*) 是问题(1.2)的解(全局极小点)。进一步，问题(1.1)的每个局部极小点可以推出问题(1.2)的局部极小点，在适当的条件下反过来也成立。

由于问题(1.2)不满足标准非线性规划(nonlinear program，简称 NLP)问题和带有互补约束的数学规划(mathematical programs with complementarity constraints，简称 MPCC)问题的约束规范，所以在 2016 年 Michal Cervinka 等人[5]提出了 CC-LICQ、CC-MFCQ、CC-CPLD、CC-ACQ 等约束规范并证明 CC-CPLD 强于 CC-ACQ。2021 年 Christian Kanzow 等人[6]提出了 CC-AM-正则性概念。2022 年薛梦龙等人[7]分别

提出了 CC-PAM-和 CC-PCAM-正则性概念。与 NLP 问题和 MPCC 问题相比，基数约束优化问题的约束规范仍然较少，所以本文提出了新的约束规范 CC-rCPLD 并给出证明，讨论了 CC-rCPLD 与 CC-ACQ 之间的强弱关系，进一步完善了约束规范之间的关系并给出完整的关系图。

文章的结构如下：第 2 章我们首先介绍一些 NLP 问题上的约束规范及约束规范之间的关系，第 3 章提出新的基数约束优化问题的约束规范 CC-rCPLD 并给出证明，第 4 章讨论基数约束优化问题上新的约束规范与现有的约束规范之间的关系，最后一章我们进行总结。

2. 基础知识

本节介绍一些基础知识，这些知识在后文中起到重要作用。我们首先回顾 NLP 问题常用的约束规范和几个锥的定义，让我们从考虑 NLP 问题开始：

$$\begin{aligned}&\min_{x} f(x)\\&\text{s.t. } g_i(x)\le 0, i=1,\cdots,m,\\&\quad\;\; h_i(x)=0, i=1,\cdots,p.\end{aligned}\tag{2.1}$$

设 S 为问题(2.1)的可行集，定义 $I_g(x)=\{i\in\{1,\cdots,m\}\mid g_i(x)=0\}$，则在 $x^*\in S$ 处的切锥定义为：

$$T_S(x^*)=\left\{d\in R^n \mid \exists\{x^k\}\subseteq S,\exists\{t_k\}\searrow 0: x^k\to x^*,\lim_{k\to\infty}\frac{x^k-x^*}{t_k}=d\right\}.$$

在 x^* 处线性化锥为：

$$L_S(x^*)=\left\{d\in R^n \mid \nabla h_j(x^*)^{\mathrm{T}} d=0(j=1,\cdots,p),\nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}} d\le 0\left(i\in I_g(x^*)\right)\right\}.$$

定义 2.1 设 x^* 是问题(2.1)的可行点。

(i) 称 LICQ 在 x^* 成立[5]：如果梯度组

$$\nabla g_i(x^*)\ \left(i\in I_g(x^*)\right),\ \nabla h_i(x^*)\ (i=1,\cdots,p)$$

是线性无关的。

(ii) 称 CPLD 在 x^* 成立[5]：如果对于任意子集 $I_1\subseteq I_g(x^*)$，$I_2\subseteq\{1,\cdots,p\}$ 使得向量

$$\nabla g_i(x^*)\ (i\in I_1),\ \nabla h_i(x^*)\ (i\in I_2)$$

是正线性相关的，则存在 x^* 的邻域 $N(x^*)$，对于任意 $x\in N(x^*)$，满足

$$\nabla g_i(x)\ (i\in I_1),\ \nabla h_i(x)\ (i\in I_2)$$

是线性相关的。

(iii) 称 RCPLD 在 x^* 成立[8]：设 $I_2\subseteq\{1,\cdots,p\}$ 使得 $\nabla h_i(x^*)(i\in I_2)$ 是 $\operatorname{span}\{\nabla h_i(x^*)\}_{i=1}^{p}$ 的一组基。存在 x^* 的邻域 $N(x^*)$ 使得

(a) 对于任意的 $x\in N(x^*)$，$\nabla h_i(x)(i=1,\cdots,p)$ 有相同的秩。

(b) 对于任意的 $I_1\subseteq I_g(x^*)$，如果

$$\nabla g_i(x^*)\ (i\in I_1),\ \nabla h_i(x^*)\ (i\in I_2)$$

是正线性相关的，则对于任意 $x\in N(x^*)$，满足

$$\nabla g_i(x)\ (i\in I_1),\ \nabla h_i(x)\ (i\in I_2)$$

是线性相关的。

(iv) 称 ACQ 在 x^* 成立[5]：$T_S\left(x^*\right)=L_S\left(x^*\right)$。

以上约束规范之间的关系见图 1：

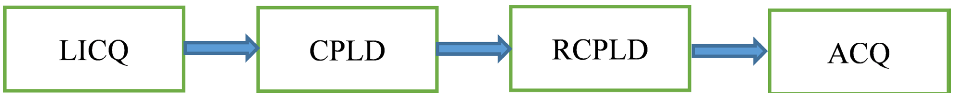

Figure 1. Relations among several constraint qualifications for nonlinear program
图 1. NLP 问题的约束规范之间的关系

其中，RCPLD 强于 ACQ，可参见文章[5]。其他关系可以由各约束规范的定义直接得到。

下面我们先给出 NLP 问题的一个序列最优性条件。

定义 2.2 [9] (AKKT)我们说 $x^*\in S$ 满足 AKKT 条件，如果存在序列 $x^k\to x^*$，$\left\{\lambda^k\right\}\subseteq R^m$，$\lambda^k\ge 0$，$\left\{\mu^k\right\}\subseteq R^p$，使得

$$\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)\to 0,$$
$$\min\left\{\lambda_i^k,-g_i\left(x^k\right)\right\}\to 0,\ i=1,\cdots,m.$$

3. 基数约束优化的约束规范

为了研究基数约束优化问题的约束规范，从问题(1.2)出发，先引入下列指标集：

$$I_0\left(x\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid x_i=0\right\},\ I_{\pm}\left(x\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid x_i\ne 0\right\},\ I_g\left(x\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,m\}\mid g_i\left(x\right)=0\right\},$$
$$I_{\pm 0}\left(x,y\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid x_i\ne 0,y_i=0\right\},\ I_{0+}\left(x,y\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid x_i=0,y_i\in(0,1)\right\},$$
$$I_{01}\left(x,y\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid x_i=0,y_i=1\right\},\ I_{00}\left(x,y\right)=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid x_i=0,y_i=0\right\}.$$

为了方便后续的定义和证明，引入下列紧的非线性规划 TNLP(x^*)：

$$\begin{aligned}&\min_x f\left(x\right)\\ &\text{s.t. } g\left(x\right)\le 0,\\ &\qquad h\left(x\right)=0,\\ &\qquad x_i=0,\ i\in I_0\left(x^*\right),\end{aligned}$$

其中，g,h 与 NLP 问题的 g,h 有相同的定义。

定义 3.1 设 $\left(x^*,y^*\right)$ 是问题(1.2)的可行点，对于 $I_2\subseteq\{1,\cdots,p\}$，$\left\{\nabla h_j\left(x^*\right)\right\}_{j\in I_2}$ 是 $\text{span}\left\{\nabla h_j\left(x^*\right)\right\}_{j=1}^{p}$ 的一组基，我们称 CC-rCPLD 在 $\left(x^*,y^*\right)$ 处成立，如果存在 x^* 的邻域 $N\left(x^*\right)$ 使得

(a) 对于任意的 $x\in N\left(x^*\right)$，$\left\{\nabla h_j\left(x\right)\right\}_{j=1}^{p}$ 有相同的秩。

(b) 对于任意的 $I_1\subseteq I_g\left(x^*\right)$，$I_3\subseteq I_0\left(x^*\right)$，如果

$$\nabla g_i\left(x^*\right)\ \left(i\in I_1\right),\ \nabla h_j\left(x^*\right)\ \left(j\in I_2\right),\ e_\tau\ \left(\tau\in I_3\right)$$

是正线性相关的，则对于任意的 $x\in N\left(x^*\right)$，

$$\nabla g_i\left(x\right)\ \left(i\in I_1\right),\ \nabla h_j\left(x\right)\ \left(j\in I_2\right),\ e_\tau\ \left(\tau\in I_3\right)$$

是线性相关的。

观察可得 CC-rCPLD 的定义不依赖于指标集的特殊选择。接下来给出的引理是处理正线性相关向量的重要工具。

引理 3.2 [9] 如果 $x=\sum_{i=1}^{m+p}\alpha_i v_i$ 对于每个 i，$\{v_i\}_{i=1}^{m}$ 线性无关且对于每个 $i=m+1,\cdots,m+p$，$\alpha_i\neq 0$，则存在 $J\subseteq\{m+1,\cdots,m+p\}$ 和向量 $\bar{\alpha}_i$ 对于每个 $i\in\{1,\cdots,m\}\cup J$，使得下列条件成立：

(a) $x=\sum_{i\in\{1,\cdots,m\}\cup J}\bar{\alpha}_i v_i$；

(b) $\alpha_i\bar{\alpha}_i>0$，$\forall i\in J$；

(c) $\{v_i\}_{i\in\{1,\cdots,m\}\cup J}$ 是线性无关的。

我们现在要证明 CC-rCPLD 是问题(1.2)的约束规范，在证明之前，我们给出 TNLP（x^*)上的 AKKT 条件。

定义 3.3 (AKKT)设 x^* 是 TNLP (x^*)上的可行点，我们说 AKKT 条件成立，如果存在序列 $x^k\to x^*$，$\{\lambda^k\}\subseteq R^m$，$\lambda^k\geq 0$，$\{\mu^k\}\subseteq R^p$，$\{\gamma^k\}\subseteq R^n$ 使得

$$\begin{aligned}&\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)+\sum_{\tau=1}^{n}\gamma_\tau^k e_\tau\to 0,\\&\lambda_i^k=0,\ i\notin I_g\left(x^*\right),\\&\gamma_\tau^k=0,\ \tau\in I_{\pm}\left(x^*\right).\end{aligned}$$

下面我们想证明 CC-rCPLD 在 $\left(x^*,y^*\right)$ 处是问题(1.2)的一个约束规范，我们首先证明，如果 CC-rCPLD 对于 TNLP (x^*)，在可行点 x^* 处成立，使得 AKKT 条件也成立，则 x^* 是 TNLP (x^*)的一个 KKT 点。

定理 3.4 设 x^* 是 TNLP (x^*)上的可行点，使得 AKKT 条件成立，如果在 x^* 点处满足 CC-rCPLD，则 x^* 是 TNLP (x^*)的一个 KKT 点。

证明：由 AKKT 的定义，存在序列 $\varepsilon_k\to 0$，$x^k\to x^*$，$\lambda_i^k\geq 0,\forall i\in I_g\left(x^*\right)$，$\mu_j^k\in R^p$，$\gamma_\tau^k\in R^n$，使得对于任意 k，$\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)+\sum_{\tau=1}^{n}\gamma_\tau^k e_\tau=\varepsilon_k$。考虑指标集 $I_2\subseteq\{1,\cdots,p\}$ 使得 $\left\{\nabla h_j\left(x^*\right)\right\}_{j\in I_2}$ 是 $\operatorname{span}\left\{\nabla h_j\left(x^*\right)\right\}_{j=1}^{p}$ 的一组基。则对于充分大的 k，$\left\{\nabla h_j\left(x^k\right)\right\}_{j\in I_2}$ 是线性无关的。CC-rCPLD 的等式约束梯度的秩是恒定的，因此存在一个序列 $\left\{\bar{\mu}^k\right\}\subseteq R^{|I_2|}$，使得 $\sum_{j=1}^{p}\mu_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)=\sum_{j\in I_2}\bar{\mu}_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)$。因此，我们可以得到

$$\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j\in I_2}\bar{\mu}_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)+\sum_{\tau=1}^{n}\gamma_\tau^k e_\tau=\varepsilon_k.$$

应用引理 3.2 可得子集 $I_{1,k}\subseteq I_g\left(x^*\right),I_{3,k}\subseteq I_0\left(x^*\right)$ 和乘子 $\tilde{\lambda}_i^k\geq 0$，$\tilde{\mu}_j^k\in R^{|I_2|}$，$\tilde{\gamma}_\tau^k\in R^{I_{3,k}}$，使得：

$$\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i\in I_{1,k}}\tilde{\lambda}_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j\in I_2}\tilde{\mu}_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)+\sum_{\tau\in I_{3,k}}\tilde{\gamma}_\tau^k e_\tau=\varepsilon_k. \tag{3.1}$$

且 $\left\{\nabla g_i\left(x^k\right),\nabla h_j\left(x^k\right),e_\tau\mid i\in I_{1,k},j\in I_2,\tau\in I_{3,k}\right\}$ 线性无关。我们将考虑一个子序列使得 $I_{1,k},I_{3,k}$ 对于每个 k 都与集合 I_1,I_3 相同。假设 $\left\{\left(\tilde{\lambda}^k,\tilde{\mu}^k,\tilde{\gamma}^k\right)\right\}$ 是无界的，可令 $\frac{\left(\tilde{\lambda}^k,\tilde{\mu}^k,\tilde{\gamma}^k\right)}{\left\|\left(\tilde{\lambda}^k,\tilde{\mu}^k,\tilde{\gamma}^k\right)\right\|_2}\to\left(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{\gamma}\right)\neq 0,\tilde{\lambda}\geq 0$，(3.1)两边同时除以 $\left\|\left(\tilde{\lambda}^k,\tilde{\mu}^k,\tilde{\gamma}^k\right)\right\|_2$ 并取极限，可得：

$$\sum_{i\in I_1}\tilde{\lambda}_i\nabla g_i\left(x^*\right)+\sum_{j\in I_2}\tilde{\mu}_j\nabla h_j\left(x^*\right)+\sum_{\tau\in I_3}\tilde{\gamma}_\tau e_\tau=0.$$

因此在 x^* 点处 $\left\{\nabla g_i\left(x^*\right),\nabla h_j\left(x^*\right),e_\tau \mid i\in I_1,j\in I_2,\tau\in I_3\right\}$ 是线性相关的，由于在 x^* 的邻域中，$\left\{\nabla g_i\left(x^k\right),\nabla h_j\left(x^k\right),e_\tau \mid i\in I_1,j\in I_2,\tau\in I_3\right\}$ 是线性无关的，所以这违背了 CC-rCPLD 定义，因此 $\left\|\left(\tilde{\lambda}^k,\tilde{\mu}^k,\tilde{\gamma}^k\right)\right\|_2$ 是有界序列。对一个适当的子序列取极限，使得 $\lambda^k\to\lambda^*,\mu^k\to\mu^*,\gamma^k\to\gamma^*$ 我们有：

$$\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i\left(x^*\right)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j\left(x^*\right)+\sum_{\tau=1}^{n}\gamma_\tau^*e_\tau=0.$$

对于任意的 k，$\lambda_i^k\ge 0$，对于任意的 $i\notin I_g\left(x^*\right)$，$\lambda_i^k=0$，故当 k 充分大时，可以得到 $\lambda_i^*=0,\forall i\notin I_g\left(x^*\right)$，根据 AKKT 的定义，明显可以得到 $\gamma_\tau^*=0,\forall\tau\in I_\pm\left(x^*\right)$ 这可证得 x^* 是 TNLP (x^*)的一个 KKT 点。

定理 3.5 设 x^* 是 TNLP (x^*)上的局部极小点，则 x^* 是 TNLP (x^*)上的 AKKT 点。

证明：由于 x^* 是 TNLP (x^*)上的局部极小点，故存在 $\varepsilon>0$，使得 x^* 是下列问题唯一的全局极小点。

$$\begin{aligned}&\min f\left(x\right)+\frac{1}{2}\left\|x-x^*\right\|^2\\&\text{s.t. } g\left(x\right)\le 0,\\&\quad\ h\left(x\right)=0,\\&\quad\ x_i=0,\ i\in I_0\left(x^*\right),\\&\quad\ \left\|x-x^*\right\|\le\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.2}$$

设 $p\left(x\right)=\left\|g\left(x\right)_+\right\|^2+\left\|h\left(x\right)\right\|^2+\sum_{i\in I_0\left(x^*\right)}x_i^2$。我们定义罚问题，

$$\begin{aligned}&\min\ f\left(x\right)+\frac{1}{2}\left\|x-x^*\right\|^2+\frac{\delta_k}{2}p\left(x\right)\\&\text{s.t. }\ \left\|x-x^*\right\|\le\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中，$0<\delta_k\to+\infty$，由于问题(3.3)的目标函数是连续可微的且可行集是紧致的。因此必存在一个全局极小点，不妨设为 x^k，因为 $\left\{x^k\right\}$ 是有界的，所以一定存在一个收敛子列，不失一般性，假设 $x^k\to\overline{x}$，下面证明 $\overline{x}=x^*$。

因为 x^k 是问题(3.3)的全局极小点，所以

$$f\left(x^k\right)+\frac{1}{2}\left\|x^k-x^*\right\|^2+\frac{\delta_k}{2}p\left(x^k\right)\le f\left(x^*\right).\tag{3.4}$$

不等式两边同时除以 δ_k 并取极限，可得 $p\left(\overline{x}\right)\le 0$。因此，$\overline{x}$ 是问题(3.2)的可行点。因为 $p\left(x^k\right)\ge 0$，所以根据问题(3.4)可得

$$f\left(x^k\right)+\frac{1}{2}\left\|x^k-x^*\right\|^2\le f\left(x^*\right).$$

不等式两边同时取极限可得 $f\left(\overline{x}\right)+\frac{1}{2}\left\|\overline{x}-x^*\right\|^2\le f\left(x^*\right)$。由于 x^* 是问题(3.2)的唯一全局极小点，所以一定存在 $\overline{x}=x^*$，即 $x^k\to x^*$。

根据问题(3.3)的必要最优性条件可得

$$\nabla f\left(x^k\right)+\nabla g\left(x^k\right)\left(\delta_k g\left(x^k\right)_+\right)+\nabla h\left(x^k\right)\left(\delta_k h\left(x^k\right)\right)+\sum_{i\in I_0\left(x^*\right)}\delta_k x_i^k e_i=x^*-x^k.$$

定义 $\lambda^k=\delta_k g\left(x^k\right)_+,\mu^k=\delta_k h\left(x^k\right),\gamma_i^k=\delta_k x_i^k,i\in I_0\left(x^*\right)$。有下列式子成立

$$\nabla f\left(x^k\right)+\nabla g\left(x^k\right)\lambda^k+\nabla h\left(x^k\right)\mu^k+\gamma^k\to 0.$$

对于所有的 $i\notin I_g\left(x^*\right)$，有 $g_i\left(x^*\right)<0$，则对于充分大的 k，$g_i\left(x^k\right)<0$，因此 $\lambda_i^k=0$。同时，根据 γ^k 的定义，显然 $\gamma_i^k=0,\forall i\in I_\pm\left(x^*\right)$。即 x^* 是 TNLP (x^*)上的 AKKT 点。

推论 3.6 设 x^* 是 TNLP (x^*)的局部极小点且 CC-rCPLD 在点 x^* 处成立，那么 x^* 是 TNLP (x^*)的 KKT 点。

根据推论 3.6 可知，TNLP (x^*)的 CC-rCPLD 在 x^* 点处成立，因此问题(1.2)的相应的约束规范在 $\left(x^*,y^*\right)$ 点处成立。值得注意的是，CC-rCPLD 的定义只依赖于 x^*，所以可以直接看作基数约束优化问题(1.1)的约束规范[5]。

4. 基数约束优化约束规范之间的关系

为了研究基数约束优化问题的约束规范之间的关系，我们首先回顾现有的基数约束优化问题的约束规范。

定义 4.1 [5] 设 $\left(x^*,y^*\right)$ 是问题(1.2)的可行点，则 $\left(x^*,y^*\right)$ 满足

(i) CC-LICQ：梯度组

$$\nabla g_i\left(x^*\right)\ \left(i\in I_g\left(x^*\right)\right),\ \nabla h_i\left(x^*\right)\ \left(i=1,\cdots,p\right),\ e_i\ \left(i\in I_0\left(x^*\right)\right)$$

是线性无关的。

(ii) CC-CPLD：对任意子集 $I_1\subseteq I_g\left(x^*\right),I_2\subseteq\{1,\cdots,p\},I_3\subseteq I_0\left(x^*\right)$，

$$\nabla g_i\left(x^*\right)\ \left(i\in I_1\right),\ \nabla h_i\left(x^*\right)\ \left(i\in I_2\right),\ e_i\ \left(i\in I_3\right)$$

是正线性相关的，存在 x^* 的邻域 $N\left(x^*\right)$，对于 $x\in N\left(x^*\right)$，

$$\nabla g_i\left(x\right)\ \left(i\in I_1\right),\ \nabla h_i\left(x\right)\ \left(i\in I_2\right),\ e_i\ \left(i\in I_3\right)$$

是线性相关的。

为了表述 CC-ACQ 的定义[5]，我们需要引入几个概念。根据问题(1.2)的结构，我们首先引入 CC-线性化锥：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Z^{CC}\left(x^*,y^*\right)=\Big\{d=\left(d_x,d_y\right)\mid &\nabla g_i\left(x^*\right)^{\mathrm{T}}d_x\le 0,\ i\in I_g\left(x^*\right),\\ &\nabla h_i\left(x^*\right)^{\mathrm{T}}d_x=0,\ i=1,\cdots,p,\\ &e^{\mathrm{T}}d_y\ge 0\text{ 若 }e^{\mathrm{T}}y^*=n-\kappa,\\ &e_i^{\mathrm{T}}d_y=0,\ i\in I_{\pm 0}\left(x^*,y^*\right),\\ &e_i^{\mathrm{T}}d_y\ge 0,\ i\in I_{00}\left(x^*,y^*\right),\\ &e_i^{\mathrm{T}}d_y\le 0,\ i\in I_{01}\left(x^*,y^*\right),\\ &e_i^{\mathrm{T}}d_x=0,\ i\in I_{01}\left(x^*,y^*\right),\\ &e_i^{\mathrm{T}}d_x=0,\ i\in I_{0+}\left(x^*,y^*\right),\\ &\left(e_i^{\mathrm{T}}d_x\right)\left(e_i^{\mathrm{T}}d_y\right)=0,\ i\in I_{00}\left(x^*,y^*\right)\Big\}.\end{aligned}$$

设 $\left(x^*,y^*\right)$ 是问题(1.2)的可行点，对于一个任意的子集 $I\subseteq I_{00}\left(x^*,y^*\right)$，我们定义限制可行集

$$
\begin{aligned}
Z_I = \Big\{(x,y) \mid & g_i(x) \le 0,\ i=1,\cdots,m, \\
& h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p, \\
& e^{\mathrm{T}} y \ge n-\kappa, \\
& x_i=0,\ y_i\in[0,1],\ i\in I_{0+}(x^*,y^*)\cup I_{01}(x^*,y^*)\cup I, \\
& y_i=0,\ i\in I_{\pm 0}(x^*,y^*)\cup\big(I_{00}(x^*,y^*)\setminus I\big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

命题 4.2 设 (x^*,y^*) 是问题(1.2)的可行点。则 CC-线性化锥满足：

$$\mathcal{L}_Z^{CC}(x^*,y^*)=\bigcup_{I\subseteq I_{00}(x^*,y^*)}\mathcal{L}_{Z_I}(x^*,y^*).$$

定义 4.3 设 (x^*,y^*) 是问题(1.2)的可行点。如果 $\mathcal{T}_Z(x^*,y^*)=\mathcal{L}_Z^{CC}(x^*,y^*)$，则 CC-ACQ 在 (x^*,y^*) 处成立。

为了研究 CC-rCPLD 与 CC-ACQ 之间的强弱关系，我们先给出下列引理的证明。

引理 4.4 设 (x^*,y^*) 是问题(1.2)的可行点，并且假设 CC-rCPLD 在 (x^*,y^*) 处成立。则对于任意的 $I\subseteq I_{00}(x^*,y^*)$，标准的 RCPLD 在任何一个限制集 Z_I 上都满足。

证明：在这里我们只需要考虑 RCPLD 定义的第(ii)条，考虑一个固定点集 $I\subseteq I_{00}(x^*,y^*)$。相应的可行集 Z_I 的约束取决于 x 或者 y。因为所有取决于 y 的约束都是线性的，在文章[5]中得知，它们满足 CPLD，因此也满足 RCPLD。因此，充分说明标准的 RCPLD 约束规范成立只取决于 x。我们可以仅限于通过对 x 变量求偏导而产生梯度向量，此时针对 y 求梯度为 0。这意味着不得不说明对于所有的子集 $I_1\subseteq I_g(x^*)$，$I_2\subseteq\{1,\cdots,p\}$， $I_3\subseteq I_{0+}(x^*,y^*)\cup I_{01}(x^*,y^*)\cup I$ ，如果梯度组 $\nabla g_i(x^*)(i\in I_1),\nabla h_j(x^*)(j\in I_2),e_\tau(\tau\in I_3)$ 是正线性相关的，则存在 x^* 的邻域 $N(x^*)$，对于任意的 $x\in N(x^*)$，$\nabla g_i(x)(i\in I_1),\nabla h_j(x)(j\in I_2),e_\tau(\tau\in I_3)$，是线性相关的。特别地，$I_3$ 在这里可被当作 I_0 的子集，所以结论可由 CC-rCPLD 概念立即得出。

定理 4.5 设 (x^*,y^*) 是问题(1.2)的可行点，并且假设 CC-rCPLD 成立。则 CC-ACQ 在 (x^*,y^*) 处成立。

证明：因为 CC-rCPLD 在 (x^*,y^*) 处成立，由引理 4.4，对于任意的 $I\subseteq I_{00}(x^*,y^*)$，标准的 RCPLD 在任何一个限制集 Z_I 上都满足。对于每个限制集 Z_I，标准的 RCPLD 意味着标准的 ACQ。再由文章([5]，引理 3.9)，可以得到 CC-ACQ 在 (x^*,y^*) 处成立。

由定义可直接得到 CC-CPLD 强于 CC-rCPLD，结合定理 4.5，可以得到基数约束优化问题的约束规范之间的关系，见图 2：

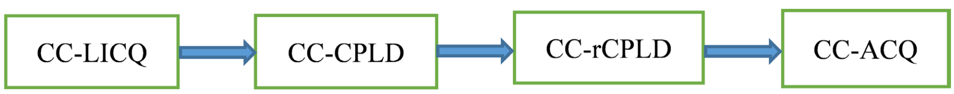

Figure 2. Relations among several constraint qualifications for Cardinality-constrained optimization problems
图 2. 基数约束优化问题的约束规范之间的关系

5. 总结

本文主要研究基数约束优化问题，提出了一个新的约束规范，即 CC-rCPLD，基于转化后的连续优化问题，证明了 CC-rCPLD 是基数约束优化问题的约束规范。同时进一步完善了基数约束优化问题的约束规范之间的关系，并给出关系图。根据改写后的基数约束优化问题的特殊结构，对比 NLP 问题和 MPCC 问题，有可能得到更弱的约束规范，这是未来值得研究的一个有趣的话题。

参考文献

[1] Wang, Y.Q. and Shen, Z.J. (2021) Constrained Assortment Optimization Problem under the Multilevel Nested Logit

Model. *Production and Operations Management*, **30**, 3467-3480. https://doi.org/10.1111/poms.13443

[2] Ahmadi, A. and Ardakani, H.D. (2017) A Multistage Stochastic Programming Framework for Cardinality Constrained Portfolio Optimization. *Optimization*, **7**, 359-377. https://doi.org/10.3934/naco.2017023

[3] Bienstock, D. (1996) Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems. *Mathematics Programming*, **74**, 121-140. https://doi.org/10.1007/BF02592208

[4] Burdakov, O.P., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2013) Mathematical Problems with Cardinality Constraints: Reformulation by Complementarity Type Conditions and a Regularization Method. *SIAM Journal on Optimization*, **26**, 397-425. https://doi.org/10.1137/140978077

[5] Červinka, M., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2016) Constraint Qualifications and Optimality Conditions for Optimization Problems with Cardinality Constraints. *Optimization*, **160**, 353-377. https://doi.org/10.1007/s10107-016-0986-6

[6] Kanzow, C., Raharja, A.B. and Schwartz, A. (2021) Sequential Optimality Conditions for Cardinality-Constrained Optimization Problems with Applications. *Computational Optimization and Applications*, **80**, 185-211. https://doi.org/10.1007/s10589-021-00298-z

[7] Xue, M.L. and Pang, L.P. (2022) A Strong Sequential Optimality Condition for Cardinality-Constrained Optimization Problems. *Numercial Algorithms*, **92**, 1875-1904. https://doi.org/10.1007/s11075-022-01371-2

[8] Andreani, R., Haeser, G., Schuverdt, M.L. and Silva, P.J.S. (2012) A Relaxed Constant Positive Linear Dependence Constraint Qualification and Applications. *Optimization*, **135**, 255-273. https://doi.org/10.1007/s10107-011-0456-0

[9] Andreani, R., Haeser, G. and Martínez, J.M. (2011) On Sequential Optimality Conditions for Smooth Constrained Optimization. *Optimization*, **60**, 627-641. https://doi.org/10.1080/02331930903578700