

内应力重分布驱动且具有广义跳跃步长的反常扩散研究

蒲文东

成都理工大学数理学院, 四川 成都

收稿日期: 2023年11月15日; 录用日期: 2023年12月9日; 发布日期: 2023年12月20日

摘要

基于连续时间随机游走的框架, 考虑了随机等待时间由内应力重分布驱动并且具有指数截断Lévy分布的跳跃步长所导致的反常扩散现象。给出了一个广义扩散方程用于描述这种反常扩散现象, 并对其反常扩散性质进行了分析。

关键词

连续时间随机游走, 内应力重分布, 指数截断Lévy分布, 反常扩散

Research on Anomalous Diffusion Driven by Internal Stress Redistribution with Generalized Jump Length

Wendong Pu

College of Mathematics and Physics, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Nov. 15th, 2023; accepted: Dec. 9th, 2023; published: Dec. 20th, 2023

Abstract

Within the framework of a continuous-time random walk, the phenomenon of anomalous diffusion is considered, driven by random waiting time induced by internal stress redistribution and characterized by jump length with an exponentially truncated Lévy distribution. A generalized diffusion equation is provided to describe this anomalous diffusion phenomenon, and its anomalous diffusion properties are analyzed.

Keywords

Continuous-Time Random Walk, Internal Stress Redistribution, Exponentially Truncated Lévy Distribution, Anomalous Diffusion

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

扩散现象广泛存在于自然界中, 具有十分久远的研究历史。基于Fick第二定律导出的扩散方程描述了粒子在物质中的扩散行为, 在这种情况下, 粒子的均方位移与时间成线性关系。然而, 大多数情况下, 粒子扩散会受到介质异质性和复杂性的影响, 导致其扩散行为表现反常, 如溶质在岩石、土壤和其他多孔介质中扩散 [1-3]、药物在组织中的扩散 [4]、氧气在血液中的输运以及细胞内物质的传递 [5]、地下水流动 [6]、地震震源扩散 [7]等现象, 往往表现出反常扩散的动力学行为。反常扩散的特点可由粒子的均方位移与时间的关系刻画, 表现为幂律的形式: $\langle (x - x(t))^2 \rangle \propto t^\alpha$, 当指数 $\alpha < 1$ 时, 对应次扩散; 当指数 $\alpha > 1$ 时对应超扩散 [8]。

刻画反常扩散的模型有很多, 如广义分数阶扩散方程 [9]、连续时间随机游走模型 [10, 11]和广义朗之万方程 [12]。其中, 连续时间随机游走模型是通过研究大量粒子的随机运动规律来研究反常扩散的一种重要方法, 在动力学水平上提供了更一般的描述 [13]。它考虑了粒子的随机等待时间和随机跳跃步长的概率分布。基于连续时间随机游走模型, 可以描述欠扩散现象($\alpha < 1$), 其中经典的例子是跳跃步长具有高斯分布, 随机等待时间具有幂律分布。在这种情况下, 可以导出广义时间分数阶扩散方程。同时, 超扩散现象($\alpha > 1$)的经典例子是跳跃步长具有发散二阶矩的Lévy飞行或具有重尾分布持续时间的Lévy行走 [14], 等待时间服从一般的指数分布。在这种情况下, 可以

导出广义空间分数阶扩散方程。此外, 学者们还研究了双分数阶扩散方程 [15]、N-分数阶扩散方程 [16]、分布阶扩散方程 [17]、截断分数扩散方程 [18, 19]等广义扩散方程。这些广义扩散方程可以更好地描述反常扩散现象, 并在不同领域的研究中发挥重要作用。

本文基于连续时间随机游走的理论框架, 研究等待时间由内应力重分布驱动 [20]并且具有截断Lévy分布 [21]的跳跃步长所导致的反常扩散现象。通过广义分数阶导数与随机游走的记忆核在宏观极限下推导了相应的广义扩散方程, 并对其反常扩散性质进行了讨论。

2. 预备知识

(1) 分数阶导数: 具有记忆核的广义分数阶导数 [22, 23]的修正(Riemann-Liouville(R-L))形式为

$$({}_{RL}G_{\eta,t}f)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \eta(t-t')f(t') dt', \quad (1)$$

普通(Caputo)形式为

$$({}_CG_{\gamma,t}f)(t) = \int_0^t \gamma(t-t') \frac{df(t')}{dt'} dt', \quad (2)$$

其中 $\eta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 为记忆核函数, 当其具有幂律形式 $\eta(t) = \gamma(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ 时, 分别退化为我们熟知的R-L分数阶导数

$${}_{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-t')^{-\alpha} f(t') dt', \quad (3)$$

和Caputo分数阶导数

$${}_CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-t')^{-\alpha} \frac{df(t')}{dt'} dt'. \quad (4)$$

同时, 我们给出Riemann-Liouville空间分数阶 [23]左侧导数

$${}_a^{RL}D_x^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-x')^{-\alpha} f(x') dx', \quad (5)$$

和右侧导数

$${}_x^{RL}D_b^\alpha f = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (x'-x)^{-\alpha} f(x') dx'. \quad (6)$$

(2) 连续时间随机游走: 假设粒子的跳跃步长 $\lambda(x)$ 与等待时间 $\varphi(t)$ 是独立的随机变量。 $\Psi(t)$ 表示截止时间 t 粒子没有发生跳跃的概率密度函数, 即生存函数, 我们有

$$\Psi(t) = \int_t^\infty \varphi(\tau) d\tau = 1 - \int_0^t \varphi(\tau) d\tau. \quad (7)$$

设 $p(x, t)$ 表述粒子在 t 时刻处于 x 处的概率密度, $j(x, t)$ 表示粒子在 t 时刻刚好到达 x 处的概率密度, 我们有如下的平衡方程

$$p(x, t) = \int_0^t j(x, t - \tau) \Psi(\tau) d\tau + p(x, 0) \Psi(t), \tag{8}$$

其中 $j(x, t)$ 满足方程

$$j(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} j(x - y, t - \tau) \lambda(y) \varphi(\tau) dy d\tau + p(x, 0) \varphi(t). \tag{9}$$

利用 $\Psi(s) = [1 - \varphi(s)]/s$ 以及卷积性质, 对方程(8)和(9)进行Fourier-Laplace变换, 可以得到 $p(x, t)$ 在Fourier-Laplace空间下描述粒子概率分布满足的Montroll-Weiss方程 [24]

$$p(k, s) = \frac{1 - \varphi(s)}{s} \frac{p(k, 0)}{1 - \lambda(k) \varphi(s)}. \tag{10}$$

其中 $p(k, s)$ 表示 $p(x, t)$ 的Fourier-Laplace变换, $\varphi(s)$ 表示 $\varphi(t)$ 的Laplace变换, $\lambda(k)$ 和 $p(k, 0)$ 分别表示 $\lambda(x)$ 和 $p(x, 0)$ 的Fourier变换。

在(10)式等号两侧同时减去 $s\varphi(s)p(k, s)$, 整理后可得

$$sp(k, s) - p(k, 0) = \frac{s\varphi(s)}{1 - \varphi(s)} [\lambda(k) - 1] p(k, s), \tag{11}$$

定义右侧记忆核

$$\eta(s) := \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}. \tag{12}$$

此时有广义等待时间

$$\varphi(s) = \frac{1}{1 + 1/\eta(s)}, \tag{13}$$

其中 $\eta(s)$ 应具有性质 [22]

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\eta(s)} = 0. \tag{14}$$

将跳跃步长的Fourier变换表示为 $\lambda(k) = e^{\Lambda(k)}$, $\Lambda(k)$ 是特征指数。在宏观极限 $k \rightarrow 0$ 时, 有 $\lambda(k) \simeq 1 + \Lambda(k)$ 。利用 $\mathcal{L}\{df(t)/dt\} = sf(s) - f(0)$ 与卷积性质对(11)式进行Fourier-Laplace逆变换可以得到修正形式的广义扩散方程

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_0^t \eta(t - t') \mathcal{F}^{-1}\{\Lambda(k) p(k, t')\} dt'. \tag{15}$$

方程的解在Fourier-Laplace空间下可以表示为

$$p(k, s) = \frac{1}{s} \frac{p(k, 0)}{1 - \eta(s) \Lambda(k)}. \tag{16}$$

类似地, 将(11)式改写为

$$\frac{1 - \varphi(s)}{s\varphi(s)} [sp(k, s) - p(k, 0)] = [\lambda(k) - 1]p(k, s), \quad (17)$$

定义左侧记忆核

$$\gamma(s) := \frac{1 - \varphi(s)}{s\varphi(s)}, \quad (18)$$

此时有广义等待时间

$$\varphi(s) = \frac{1}{1 + s\gamma(s)}, \quad (19)$$

在宏观极限 $k \rightarrow 0$ 下, 利用 $\mathcal{L}\{df(t)/dt\} = sf(s) - f(0)$ 与卷积性质对(17)式进行Fourier-Laplace逆变换, 可以得到普通形式的广义扩散方程

$$\int_0^t \gamma(t-t') \frac{\partial p(x, t')}{\partial t'} dt' = \mathcal{F}^{-1}\{\Lambda(k)p(k, t)\}. \quad (20)$$

注意到, 当(13)与(19)式所表示的两个等待时间相等, 即满足

$$s\gamma(s) = \frac{1}{\eta(s)}, \quad (21)$$

且满足特定的初值条件时, 得到的两种形式的广义扩散方程(15)与(20)应该是等价的 [22].

(3) Mittag-Leffler(M-L)函数: M-L函数在广义分数阶微分方程中具有重要作用, 其中三参数的M-L函数的定义由Prabhakar [25]介绍如下

$$E_{\alpha, \beta}^{\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (22)$$

这里 $(\delta)_k = \Gamma(\delta + k)/\Gamma(\delta)$ 表示向上取阶乘。当 $\delta = 1$ 时M-L函数退化为双参数形式, 当 $\delta = 1, \beta = 1$ 时, M-L函数退化为单参数形式。

三参数M-L函数的Laplace变换具有如下性质

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\delta}(\pm at^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha\delta-\beta}}{(s^{\alpha} \mp a)^{\delta}}, \quad \mathcal{R}(s) > |a|^{1/\alpha}. \quad (23)$$

此外, M-L函数还有许多推广形式, 如多项M-L函数, 定义如下

$$E_{(a_1, a_2, \dots, a_N), b}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_i \geq 0, i=1, 2, \dots, N}^{k_1 + k_2 + \dots + k_N = j} \frac{j!}{\prod_{i=1}^N (k_i!)} \frac{\prod_{i=1}^N (z_i)^{k_i}}{\Gamma(b + \sum_{i=1}^N a_i b_i)}. \quad (24)$$

3. 研究内容

为了捕捉内应力重分布过程的统计特性且研究跳跃步长为广义Lévy分布函数的耦合影响，基于连续时间随机游走的理论框架，本节讨论随机等待时间由内应力重分布驱动的具有截断Lévy分布跳跃步长的反常扩散现象。

模拟数据和实际统计数据表明内应力重分布在连续事件之间的等待时间分布具有Γ分布形式 [20, 26]，即

$$\varphi(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-t}, \tag{25}$$

此时有

$$\eta(s) = \frac{1}{(s+1)^\gamma - 1}, \tag{26}$$

利用(23)式，可以得到记忆核为

$$\eta(t) = e^{-t} t^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(t^\gamma). \tag{27}$$

假设跳跃步长为无限可分分布函数类，相应的特征函数具有Lévy-Khintchine表达 [27]，其特征函数的指数由下式给出

$$\Lambda(k) = \ln \lambda(k) = aik - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{ikx} - 1 - iku(x)] w(x) dx, \tag{28}$$

其中Λ为特征函数的指数，a为常数，σ ≥ 0，u(x)为辅助函数，其具体形式不影响积分的值，用以消除被积函数的奇性，保证积分收敛。w(x)为Lévy密度，刻画了分布的特点，满足 ∫ min{1, x²} w(x) dx < ∞。Lévy-Khintchine表达可分解为布朗运动，小的跳过程以及复合的泊松过程。当Lévy密度消失，退化为正态分布。

由于Lévy密度刻画了分布的特点，对应的Lévy密度由指数截断的Lévy过程给出时可以得到相应的特征指数 [21]，

$$\Lambda_{ET} = iak - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 - \frac{c}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \begin{cases} (1+\theta)(\lambda+ik)^\alpha + (1-\theta)(\lambda-ik)^\alpha - 2\lambda^\alpha, \\ (1+\theta)(\lambda+ik)^\alpha + (1-\theta)(\lambda-ik)^\alpha - 2\lambda^\alpha - 2ik\alpha\theta\lambda^{\alpha-1}, \end{cases} \tag{29}$$

参数满足 0 < α ≤ 2, c > 0, -1 ≤ θ ≤ 1, 以及 λ ≥ 0。

此时有

$$\mathcal{F}^{-1}\{\Lambda_{ET} p(k, t)\} = -V \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + c D_x^{\alpha, \lambda} p(x, t) - \nu p(x, t). \tag{30}$$

其中 $D_x^{\alpha, \lambda}$ 是α阶λ-截断分数阶导数，定义为

$$D_x^{\alpha, \lambda} = l e^{-\lambda x} {}_{-\infty} D_x^\alpha e^{\lambda x} + r e^{\lambda x} {}_x D_\infty^\alpha e^{-\lambda x}, \tag{31}$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时, $V = a$, 当 $1 < \alpha < 2$ 时, $V = a - \xi$, 以及

$$\xi = -\frac{c\alpha\theta\lambda^{\alpha-1}}{\cos(\alpha\pi/2)}, \quad \nu = -\frac{c\lambda^\alpha}{\cos(\alpha\pi/2)}. \quad (32)$$

将(27)和(30)式代入(15)式, 可以得到由内应力重分布驱动的具有指数截断Lévy分布跳跃步长在宏观极限下对应的广义扩散方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{-(t-t')} (t-t')^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}((t-t')^\gamma) \\ &\times \left\{ -V \frac{\partial p(x,t')}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x,t')}{\partial x^2} + cD_x^{\alpha,\lambda} p(x,t') - \nu p(x,t') \right\} dt'. \end{aligned} \quad (33)$$

为了对其反常扩散性质进行研究, 我们可以计算粒子位移的统计特性。利用 [21]

$$\langle x^n(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (-i)^n \frac{\partial^n p(k,s)}{\partial k^n} \right\} \Big|_{k=0}, \quad (34)$$

我们可以计算其一阶矩为

$$\langle x(t) \rangle = VL^{-1} \left\{ \frac{s^{-1}}{(1+s)^\gamma - 1} \right\} = Ve^{-t^\gamma} E_{\gamma,\gamma+1}(t^\gamma), \quad (35)$$

二阶矩为

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= 2\chi \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{-1}}{(1+s)^\gamma - 1} \right\} + 2V^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{-1}}{[(1+s)^\gamma - 1]^2} \right\} \\ &= 2\chi e^{-t^\gamma} E_{\gamma,\gamma+1}(t^\gamma) + 2V^2 e^{-t^{2\gamma}} E_{\gamma,2\gamma+1}^2(t^\gamma), \end{aligned} \quad (36)$$

均方位移为

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \\ &= 2\chi e^{-t^\gamma} E_{\gamma,\gamma+1}(t^\gamma) + V^2 e^{-t^{2\gamma}} \left\{ 2E_{\gamma,2\gamma+1}^2(t^\gamma) - e^{-t} \{E_{\gamma,\gamma+1}(t^\gamma)\}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\chi = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{c\alpha|\alpha-1|}{2|\cos(\alpha\pi/2)|\lambda^{2-\alpha}}. \quad (38)$$

图 1 给出了不同截断指数 λ 下等待时间由内应力重分布驱动, 跳跃步长服从指数截断Lévy分布时均方位移随时间的演变行为。可以看出在短时间下, 表现为欠扩散, 在长时间下, 表现为正常扩散。随着截断指数趋于0, 扩散速度将趋于无穷, 当截断指数等于0时, 均方位移将发散。这一变化体现了内应力重分布所对应记忆核的记忆效应随时间变化的影响, 同时也反应了这种等待时间与跳跃步长下耦合影响的作用。

注意到, 方程(33)给出了具有修正形式分数阶导数的由内应力重分布驱动且具有广义跳跃步长的广义扩散方程, 根据两类记忆核之间的等价关系(21), 可以类似得到普通形式的广义扩散方程。

当(29)式中的截断强度 $c = 0$,且 $a = 0$ 时, 跳跃步长退化为一一般的高斯分布, 此时方程退化到仅由内应力重分布驱动的广义扩散方程 [20]。

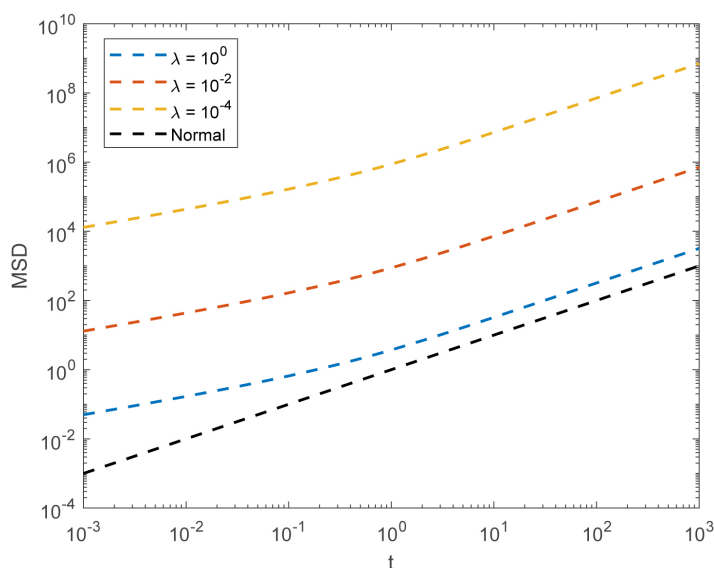


Figure 1. The evolution of mean squared displacement over time when the waiting time follows a gamma distribution with different truncation parameters λ and the jump length follows a truncated exponential Lévy distribution. Here, $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $a = 0.5$, $\sigma = 1$, and $c = 1$

图 1. 不同截断指数 λ 下等待时间服从 Γ 分布, 跳跃步长服从指数截断Lévy分布时均方位移随时间的演变行为。其中 $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $a = 0.5$, $\sigma = 1$, $c = 1$

4. 结论

反常扩散现象广泛存在于具有异质性和复杂性的介质中, 其特点表现为均方位移与时间的非线性关系, 如溶质在岩石、土壤和其他多孔介质中扩散、药物在组织中的扩散、氧气在血液中的输运以及细胞内物质的传递、地下水流动、地震震源扩散等现象, 往往表现出反常扩散的动力学行为。宏观极限下的具有分数阶导数的广义扩散方程为刻画这些反常扩散现象提供了更准确的物质传输模型, 在实际工程中具有重要的研究意义。本文基于连续时间随机游走理论框架, 探讨了随机等待时间由内应力重分布驱动的反常扩散, 其中随机跳跃步长服从指数截断Lévy分布。我们回顾了连续时间随机游走理论的基本原理, 并利用积分变换得到了Montroll-Weiss 方程, 描述了粒子概率在Fourier-Laplace 空间中的行为。通过Montroll-Weiss 方程和广义分数阶导数的定义, 我们推导了相应的具有时间空间分数阶导数的广义扩散方程, 并对其反常扩散特性进行了研究, 揭示了内应力重分布和指数截断Lévy分布跳跃步长之间的耦合影响。

参考文献

- [1] Sahimi, M. (2011) Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock: From Classical Methods to Modern Approaches. John Wiley & Sons, Hoboken.

- [2] 王景瑞, 赵建世, 胡诗若. 地下水溶质反常运移的分数阶对流扩散模型研究进展[J]. 中国环境科学, 2022, 42(12): 5845-5855.
- [3] Yan, H., Xie, H., Nikolaev, P., *et al.* (2023) Analytical Model for Steady-State Solute Diffusion in Non-Isothermal Fractured Porous Media. *Journal of Hydrology*, **616**, Article 128872. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.128872>
- [4] Jiang, C., Cui, C., Li, L., *et al.* (2014) The Anomalous Diffusion of a Tumor Invading with Different Surrounding Tissues. *PLOS ONE*, **9**, e109784. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0109784>
- [5] Morales-Delgado, V.F., Gómez-Aguilar, J.F., Saad, K.M., *et al.* (2019) Analytic Solution for Oxygen Diffusion from Capillary to Tissues Involving External Force Effects: A Fractional Calculus Approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **523**, 48-65. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.02.018>
- [6] 魏文杰, 陈文龙, 戴晓彬, 等. 生物大分子介质中的反常扩散动力学理论[J]. 化学学报, 2023, 81(8): 967-978.
- [7] Huc, M. and Main, I.G. (2003) Anomalous Stress Diffusion in Earthquake Triggering: Correlation Length, Time Dependence, and Directionality. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **108**, Article 2324. <https://doi.org/10.1029/2001JB001645>
- [8] 包景东. 分数布朗运动和反常扩散[J]. 物理学进展, 2005(4): 359-367.
- [9] 庞国飞, 陈文, 张晓棣, 等. 复杂介质中扩散和耗散行为的分数阶导数唯象建模[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(11): 1117-1134.
- [10] Roman, H.E. and Alemany, P.A. (1994) Continuous-Time Random Walks and the Fractional Diffusion Equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **27**, 3407. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/10/017>
- [11] 林方, 包景东. 基于连续时间无规行走模型研究反常扩散[J]. 物理学报, 2008(2): 696-702.
- [12] Porra, J.M., Wang, K.G. and Masoliver, J. (1996) Generalized Langevin Equations: Anomalous Diffusion and Probability Distributions. *Physical Review E*, **53**, 5872-5881. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.5872>
- [13] 陈文. 反常扩散的分数阶微分方程和统计模型[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [14] Blumen, A., Zumofen, G. and Klafter, J. (1989) Transport Aspects in Anomalous Diffusion: Lévy Walks. *Physical Review A*, **40**, 3964-3973. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.3964>
- [15] Liu, J., Zhu, Y., He, P., *et al.* (2017) Transient Bi-Fractional Diffusion: Space-Time Coupling Inducing the Coexistence of Two Fractional Diffusions. *The European Physical Journal B*, **90**, Article No. 70. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80060-5>
- [16] Cecconi, F., Banavar, J.R. and Maritan, A. (2000) Scaling Behavior in a Nonlocal and Non-linear Diffusion Equation. *Physical Review E*, **62**, R5879-R5882. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.R5879>

- [17] Chechkin, A., Sokolov, I.M. and Klafter, J. (2012) Natural and Modified Forms of Distributed-Order Fractional Diffusion Equations. In: Klafter, J., Lim, S.C. and Metzler, R., Eds., *Fractional Dynamics: Recent Advances*, World Scientific Publishing, 107-127.
https://doi.org/10.1142/9789814340595_0005
- [18] Liemert, A. and Kienle, A. (2015) Fundamental Solution of the Tempered Fractional Diffusion Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **56**, Article 113504.
<https://doi.org/10.1063/1.4935475>
- [19] Sabzikar, F., Meerschaert, M.M. and Chen, J. (2015) Tempered Fractional Calculus. *Journal of Computational Physics*, **293**, 14-28. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.04.024>
- [20] Cleland, J. and Williams, M.A.K. (2021) Anomalous Diffusion Driven by the Redistribution of Internal Stresses. *Physical Review E*, **104**, Article 014123.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.014123>
- [21] Cartea, A. and del-Castillo-Negrete, D. (2007) Fluid Limit of the Continuous-Time Random Walk with General Lévy Jump Distribution Functions. *Physical Review E*, **76**, Article 041105.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.041105>
- [22] Sandev, T., Metzler, R. and Chechkin, A. (2018) From Continuous Time Random Walks to the Generalized Diffusion Equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **21**, 10-28.
<https://doi.org/10.1515/fca-2018-0002>
- [23] Podlubny, I. (1998) Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Elsevier, Amsterdam.
- [24] Montroll, E.W. and Weiss, G.H. (1965) Random Walks on Lattices. II. *Journal of Mathematical Physics*, **6**, 167-181. <https://doi.org/10.1063/1.1704269>
- [25] Prabhakar, T.R. (1971) A Singular Integral Equation with a Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernel. *Yokohama Mathematical Journal*, **19**, 7-15.
- [26] Lin, H., Lu, C., Wang, H.Y., *et al.* (2020) Non-Trivial Avalanches Triggered by Shear Banding in Compression of Metallic Glass Foams. *Proceedings of the Royal Society A*, **476**, Article 20200186. <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0186>
- [27] Ken-Iti, S. (1999) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press, Cambridge.