Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(12), 5147-5152**
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1212505

含参量瑕积分一致收敛的判别法及其性质

薛桃梅，赵西卿*

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月14日；发布日期：2023年12月22日

摘 要

含参量瑕积分在数学分析的多元函数积分学中有着非常重要的作用，大多数教材中对于含参量无穷积分一致收敛的判别法及其性质给出了详细的介绍及其证明，但大多数教材只给出了含参量瑕积分一致收敛的定义，然而对于大多数学生而言含参量瑕积分一致收敛性的判别及其性质是不容易易理解和掌握的，因此，本文根据课本中含参量无穷积分一致收敛的判别法及其性质的证明给出了含参量瑕积分一致收敛性判别法的定义与证明及其基本性质的定义与证明。

关键词

含参量瑕积分，一致收敛，性质

The Discriminant Method and Properties of Uniform Convergence of Parametric Defect Integral

Taomei Xue, Xiqing Zhao*

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 14th, 2023; published: Dec. 22nd, 2023

Abstract

Parametric integral plays a very important role in the integration of multiple functions in mathematical analysis. Most textbooks give a detailed introduction to the discriminant method and properties of uniform convergence of parametric infinite integral and its proof, but most textbooks only give the definition of uniform convergence of parametric integral. However, for most

*通讯作者。

文章引用: 薛桃梅, 赵西卿. 含参量瑕积分一致收敛的判别法及其性质[J]. 应用数学进展, 2023, 12(12): 5147-5152.
DOI: 10.12677/aam.2023.1212505

students, it is not easy to understand and master the identification and properties of uniform convergence of integral with parameter. Therefore, this paper gives the definition and proof of the identification and properties of uniform convergence of integral with parameter and infinite integral with parameter in the textbook.

Keywords

Parametric Defect Integral, Uniform Convergence, Property

1. 预备知识

定理 1 [1] 瑕积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ （瑕点为 $y=d$)收敛的充要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $u_1,u_2\in(d,d-\delta)$ 时，

$$\left|\int_c^{u_1} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{u_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon。$$

定理 2 [1] 积分第二中值定理的推论

假设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积。若 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y=g(x,a)\int_a^\xi f(x,y)\mathrm{d}y+g(x,b)\int_\xi^b f(x,y)\mathrm{d}y。$$

2. 含参量瑕积分一致收敛的判别

定义 1 [2] [3] 对任意的 $\varepsilon>0$，总存在某正数 $\delta<d-c$，使得当 $0<\eta_1<d-\delta$ 时，对所有的 $x\in[a,b]$ 有 $\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，则称含参量 x 的无界函数反常积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛。($y=d$ 为函数的瑕点)

定理 3 (柯西收敛准则)含参量 x 的瑕点为 d 的积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在区间 $x\in[a,b]$ 上一致收敛的充分且必要条件是：对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $0<\eta_1<\eta_2<d-\delta$ 时，对所有的 $x\in[a,b]$，有 $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$。

证明 充分性($\Leftarrow$) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<\eta_1<\eta_2<d-\delta$ 时，对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，所以 $\left|\int_c^{\eta_1} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_{\eta_1}^{c} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_c^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，根据瑕积分收敛的柯西准则知：含参量 x 的瑕点为 d 的积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 收敛，对一切 $x\in[a,b]$ 成立 $\therefore$ $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛。

由上述得，充分性成立。

必要性($\Rightarrow$)若含参量 x 的瑕点为 d 的瑕积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛，则对任给 $\varepsilon>0$，总存在 $0<\delta<d-c$，使得当 $0<\eta_1<\eta_2<d-\delta$ 时，对任意的 $x\in[a,b]$，都有

$$\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon，\left|\int_{\eta_2}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon，$$

$$\therefore\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y+\int_d^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon。$$

由上述得，必要性成立。

定理 4 (魏尔斯特拉斯 M 判别法)设有函数 $g(y)$，使得 $|f(x,y)|\le g(y)$

$x\in[a,b]$，$y\in[c,d)$，若含参量的瑕积分 $\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，则含参量 x 的瑕点为 $y=d$ 的积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛。

证明 $\because |f(x,y)|\le g(y)\quad x\in[a,b]\quad y\in[c,d)$ 总存在有

$$\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le\int_{\eta_1}^d g(y)\mathrm{d}y,$$

$$\left|\int_{\eta_2}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le\int_{\eta_2}^d g(y)\mathrm{d}y,$$

$\because$ 含参量瑕积分 $\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，且该积分与 x 的变化无关 $\therefore$ 由一致收敛的柯西准则得，$\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta<d-c$，使得当 $0<\eta_1<\eta_2<d-\delta$ 时，对所有的 $x\in[a,b]$，有

$$\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon,\quad \left|\int_{\eta_2}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\therefore\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|&=\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\eta_2}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|\\&\le\left|\int_{\eta_1}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{\eta_2}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|\\&\le\int_{\eta_1}^d g(y)\mathrm{d}y+\int_{\eta_2}^d g(y)\mathrm{d}y\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$。

由柯西收敛准则得参量 x 的无界函数反常积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

定理 5 (狄利克雷判别法)

a) 对任意的 $x\in[a,b]$ 且对一切实数 $c<u<d$，含参量正常积分 $\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上有界，即存在 $M>0$，对一切 $c<u<d$ 及 $x\in[a,b]$，有 $\left|\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le M$。

b) 对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调递增或递减函数，且当 $y\to d$ 时，对参量 x，$g(x,y)$ 是一致的收敛于 0 的。

则含参量反常积分 $\int_c^d f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 对于任意的参量 $x\in[a,b]$ 是一致收敛。

证明 由(a)得：对于 u 取值 $u=d-\eta$，那么对与所有的 $c<d-\eta<d$，对于 $\forall x\in[a,b]$，$\exists M>0$，使得 $\left|\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le M$。

由(b)得：当 $y\to d$ 时，对于参量 x，$g(x,y)$ 是一致的收敛于 0 的。所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<y-d<\delta$ 时，对一切 $x\in[a,b]$，$|g(x,y)|<\varepsilon$。

又 $\because$ 函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，利用积分第二中值定理有，对 $\forall\eta_1,\eta_2\in(d-\delta,d)$，$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)$ 使得对所有的 $x\in[a,b]$，有

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y=g(x,\eta_1)\int_{\eta_1}^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}y+g(x,\eta_2)\int_{\xi}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y\right|\\&\le|g(x,\eta_1)|\cdot\left|\int_{\eta_1}^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}y\right|+|g(x,\eta_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\\&=|g(x,\eta_1)|\cdot\left|\int_c^{\eta_1} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}y\right|+|g(x,\eta_2)|\cdot\left|\int_c^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{\eta_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\\&<\varepsilon\cdot 2M+\varepsilon\cdot 2M<\varepsilon\end{aligned}$$

所以得出含参量反常积分 $\int_c^d f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的。

定理 6 (阿贝尔判别法)

a) 含参量 x 的无界函数反常积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在一切的 $x\in[a,b]$ 上一致收敛。

b) 对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $g(x,y)$ 为关于 y 的单调递增或递减函数，且对于参量 x，$g(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上保持一致有界。

则含参量反常积分 $\int_c^d f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的。

证明令 $F(u)=\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y$，$u\in[c,d-\delta]$，由 a)得，对任意 $x\in[a,b]$，含参量瑕积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $F(u)$ 在 (a,b) 上有界，对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $g(x,y)$ 为关于 y 的单调函数，且对参量 x，$g(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界。则存在极限，

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=A,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[g(x,y)-A\right]=0$$

$$\int_c^d f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f(x,y)\left[g(x,y)-A\right]\mathrm{d}y+A\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$\therefore$ 含参量反常积分 $\int_c^d f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

3. 含参量瑕积分的性质

定理 7 [4] [5] (含参量瑕积分连续性的定义及其证明)设 $f(x,y)$ 在区间 $[a,b]\times[c,d)$ 上是连续的，若含参量瑕积分 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$ 上是一致收敛的($y=d$ 为函数的瑕点)，则 $\phi(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上是连续的。

证明 $\because\ \phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\quad x\in[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的 $\therefore$ 对 $\forall x,x+\Delta x\in[a,b]$ 有
$\left|\phi(x+\Delta x)-\phi(x)\right|=\left|\int_c^d f(x+\Delta x,y)-\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_c^d\left[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right]\mathrm{d}y\right|$

又 $\because\ f(x,y)$ 在区间 $[a,b]\times[c,d)$ 上是连续的，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|\Delta x|<\delta$ 时，有

$$\left|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\therefore\left|\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)\right|&=\left|\int_c^d f(x+\Delta x,y)\mathrm{d}y-\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|\\&=\left|\int_c^d\left[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right]\mathrm{d}y\right|\\&\le\int_c^d\left|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right|\mathrm{d}y\\&<\varepsilon(d-c)<\varepsilon\end{aligned}$$

由上述证明得 $\therefore\ \phi(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上是连续的。

定理 8 (含参量瑕积分可微性的定义及其证明)设 $f(x,y)$ 与 $f_x(x,y)$ 在区域 $[a,b]\times[c,d)$ 上连续，若含参量瑕积分 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$ 上是收敛的($y=d$ 为函数的瑕点)，$\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的，则 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可微的，并且可以得出 $\phi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 。

证明 由定理知，要证 $\phi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$ ，即证明 $\left|\phi'(x)-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$ ，因为 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是收敛的，且 $f(x,y)$ 在区域 $[a,b]\times[c,d)$ 上是连续的

$$\therefore\phi'(x)=\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}=\frac{\int_c^d f(x+\Delta x,y)\mathrm{d}y-\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y}{\Delta x}=\int_c^d\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y$$

$$\because \left|\phi'(x)-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{\phi'(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right|$$
$$= \left|\int_c^d \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right|$$
$$\le \int_c^d \left|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right|\mathrm{d}y$$

$\because$ $f_x(x,y)$ 在区域 $[a,b]\times[c,d)$ 上是连续的，$\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的，$\therefore$ $\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|\Delta x|<\delta$ 时，有

$$\left|\int_c^d f_x(x+\Delta x,y)\mathrm{d}y-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right| \le \int_c^d \left|f_x(x+\Delta x,y)-f_x(x,y)\right|\mathrm{d}y<\varepsilon$$

$$\therefore \left|\phi'(x)-\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon \quad \therefore \phi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y。$$

由上述证明得出 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可微的，且 $\phi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$。

定理 9 (含参量瑕积分可积性的定义及其证明)若 $f(x,y)$ 在区域 $[a,b]\times[c,d)$ 上是连续的，若含参量瑕积分 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的，($y=d$ 为函数的瑕点)，则 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是可积的，并且还可以得出 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$。

证明 由上述条件可知 $f(x,y)$ 在区域 $[a,b]\times[c,d)$ 上是连续的，含参量瑕积分 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的，所以由含参量瑕积分的连续性的定义可知 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，又因为连续必可积，所以 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是可积的，对任意的一个分割 *T*，它们总是把 $[a,b]$ 分成 n 个区间 $\Delta x_i=[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$ 且 $x_0=a, x_n=b$ 在每一个区间内任意取一点 ξ_i 则由定积分的分割，近似求和，取极限思想进而有

$$\sum_{i=1}^n \phi(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\int_c^d f(\xi_i,y)\mathrm{d}y\Delta x_i=\int_c^d\sum_{i=1}^n f(\xi_i,y)\Delta x_i\mathrm{d}y$$

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n \phi(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to 0}\int_c^d\sum_{i=1}^n f(\xi_i,y)\Delta x_i\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,y)\Delta x_i\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

所以得到 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$。

由上述证明得出 $\phi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上是可积的，并且还可以得出 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$。

4. 总结

本文给出了含参量暇积分一致收敛的判别法，如：柯西准则、魏尔特拉斯 M 判别法、狄利克雷判别法等等，并且给出了含参量瑕积分性质，如：连续性，可微性和可积性。本文所给出的证明方法及思路都是易于大部分学生理解和掌握的。通过对含参量暇积分一致收敛的判别法及其性质的总结，使我们能较快的掌握这些理论知识，提高在实际问题中解题的速度和效率以及提高我们在其他领域的应用。因此研究其一致收敛性及其性质也是非常具有研究的价值和方向的。

含参量瑕积分是数学分析中的一个重点、难点，本文所做的这些还远远不能解决瑕积分中许许多多复杂多变的问题，而且证明它们的方法也有很多，本人也会继续努力，希望在以后的学习与科研中能够更深入地研究瑕积分，使得含参量瑕积分的基本知识以及应用越来越完善。

基金项目

陕西省“十四五”教育科学规划2022年度课题，大中小学数学课程思政教学与实效研究(SGH22Y1334)；延安大学2023年度研究生一流课程建设项目，“中学数学教学设计与实施”(YSZ202211)。

参考文献

[1] 华东师大数学系. 数学分析(上册) [M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 华东师大数学系. 数学分析(下册) [M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[3] 李彩霞. 含参量瑕积分的相关性质[J]. 现代职业育, 2020(10): 194-195.

[4] 李君士. 含参量无界函数非正常积分一致收敛性的几个判别定理[J]. 九江师专学报, 2000(5): 1-5. https://doi.org/10.19717/j.cnki.jjus.2000.05.001

[5] 伊磊, 王瑛, 梁君. 关于含参变量瑕积分分析性质的探讨[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版), 2007(1): 17-19.