Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(2), 488-493
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122052

Hans汉斯

关于分式未定式极限的多解模式研究

瞿杏元

四川建筑职业技术学院数学教研室，四川 德阳

收稿日期：2023年1月8日；录用日期：2023年1月28日；发布日期：2023年2月9日

摘 要

高等数学以极限思想为基础，极限又以未定型极限的求解最难。求未定式的极限是高等数学中常见的题型，而洛必达法则是众多方法中最行之有效的方法。但是洛必达法则不仅仅是唯一的求解方式，洛必达法则常常与等价无穷小替换，四则运算法则，约去非零因子法，泰勒公式展开等方法结合使用，并且洛必达法则的使用也有一些限制条件。本文针对分式未定式求极限的多解模式进行研究，特别针对未定式$\frac{0}{0}$型中$\frac{0\pm 0}{0}$或者$\frac{0}{0\pm 0}$等分式未定式的求解给出了多种方式进行解答，讨论了分式未定式极限的基本求解方法，并引入了泰勒n级无穷小等价替换对其难点进行了分析，力求将培养学生能力与课程教学紧密结合。

关键词

分式未定式极限，洛必达法则，泰勒，等价替换

Study on the Multiple Solution Model of the Limit of Fractional Indefinite

Xingyuan Qu

Mathematics Teaching and Research Office of Sichuan College of Architectural Technology, Deyang Sichuan

Received: Jan. 8th, 2023; accepted: Jan. 28th, 2023; published: Feb. 9th, 2023

Abstract

Higher mathematics is based on the idea of limit, and it is the most difficult to solve the undefined limit. Finding the limit of the undefined form is a common question type in higher mathematics, and Lobita's rule is the most effective method among many methods. However, Lopida's rule is not the only solution. Lopida's rule is often used in combination with equivalent infinitesimal, equiva-

文章引用: 瞿杏元. 关于分式未定式极限的多解模式研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 488-493.
DOI: 10.12677/aam.2023.122052

lent infinity, four algorithms, reduce non-zero factors, Taylor expansion and other methods, and there are some restrictions on the use of Lopida's rule. In this paper, we study the multiple solution mode of finding the limit of the fractional infinitive. Especially for undefined $\frac{0}{0}$ type $\frac{0\pm 0}{0}$ or $\frac{0}{0\pm 0}$. The solution of the fraction infinitive gives a variety of ways to solve, the difficulties are analyzed by introducing Taylor's *n*-order infinitesimal equivalent substitution and strives to closely combine the training of students' ability with the course teaching.

Keywords

Fractional Infinitive Limit, Lopida's Rule, Taylor, Equivalent Replacement

1. 引言

极限是高等数学中最基本的概念，也是学习微积分学的基础，在微积分学中占有很重要的地位。而极限概念及其运算法则是初学高等数学的重点，也是难点。不定式极限的计算方法灵活多变，初学者在求不定式的极限时，往往只会套用洛必达法则。不可否认洛必达法则是计算不定式极限的有效方法之一，但在实际运用过程中初学者比较忽略洛必达法则的“局限性”和“使用范围”，从而导致求解出错。并且有些情况下使用洛必达法则反而会更复杂，未定式的类型有$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty}$等。其中$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$是最常见的分式未定式，本文中对$\frac{0}{0}$类型下$\frac{0\pm 0}{0}$或$\frac{0}{0\pm 0}$，分式未定式极限的计算方法结合实例探讨其多种求解方式。采用了洛必达法则[1] [2]与无穷小等价替换，四则运算法则，约去非零因子法，利用两个重要极限[3] [4]和泰勒展开公式[5]等多种方法灵活结合的求解方法。这样能较清楚地知道哪些方法更容易接受，更简单。针对函数在使用洛必达法则过于复杂，或者使用条件受限情况下引入了带皮亚诺余项的泰勒展开式，通过泰勒公式给出了泰勒 n 级无穷小等价，并针对$\frac{0}{0}$型中分子分母加减运算比如$\frac{0\pm 0}{0}$或$\frac{0}{0\pm 0}$时进行泰勒 n 级无穷小等价替换。这样能够避开洛必达法则分子或者分母加减运算无法直接对其进行等价替换的限制。

2. 引入知识

2.1. 无穷小的等价替换

定理：当设 $x\to c$ 时，$f(x)$，$g(x)$，$f_1(x)$，$g_1(x)$ 都是无穷小，且 $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，且 $\lim\limits_{x\to c}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$，则

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

2.2. 洛必达法则

洛必达法则($\frac{0}{0}$型)：设$f(x)$与$g(x)$满足条件：

1) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$；

2) 在点c的某个去心领域内，$f(x)$和$g(x)$可导，且$g'(x)\neq 0$；

3) $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ (或∞)，则

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.3. 泰勒公式(带皮亚诺余项)

根据同济大学数学系编高等数学教材，有带皮亚诺余项的泰勒展开公式定理如下：

定理：设$f(x)$在含有x_0的领域内有n阶导数，则x在x_0的领域时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n \tag{1}$$

当$x_0=0$时，则式(1)变为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x)^n \tag{2}$$

式(2)称为带有皮亚诺余项的麦克劳林公式。

对函数$f(x)$进行带皮亚诺余项的n级泰勒公式展开，如公式(2)，如果当$x\to 0$时，$f(x)\to 0$，这时通过泰勒展开公式可以得到

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{3}$$

当$n=2$时，$f(x)\sim f(0)+f'(0)x$，记为泰勒2级无穷小等价；

当$n=3$时，$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$，记为泰勒3级无穷小等价；

式(3)记为泰勒n级无穷小等价。

式(3)证明如下：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x)^n}{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}\\
&=1+\lim_{x\to 0}\frac{o(x)^n}{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}\\
&=1+0=1
\end{aligned}$$

常见的函数泰勒展开公式有：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)} + o\left(x^{(2n+1)}\right) \tag{4}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{(2n+1)}}{2n+1} + o\left(x^{(2n+1)}\right) \tag{5}$$

3. 未定式$\frac{0}{0}$型多解模式研究

文献[6]中给出了同济大学数学系编的第七版的《高等数学》(上册)第 136 页的例 10。

函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$ 的多种求解方法，包含洛必达法则，等价无穷小的替换等方法，函数 $\frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$ 是属于未定式 $\frac{0}{0}$ 型中 $\frac{0-0}{0}$ 类型，针对分子或者分母中含有 0-0 型，如果直接对 0-0 中的某一项进行无穷小替换，出现为 0 的情况，则不能直接对其中某一项进行无穷小替换，例如直接使用 $\tan x \sim x$ 来直接替换就会得到分子为 $x - x = 0$，就会出错。但是这个时候我们可以使用泰勒展开公式(5)对 $\tan x$ 进行带皮亚诺余项的三级泰勒展开 $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$，根据公式(3)有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x + \frac{x^3}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{x + \frac{x^3}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3}}{x + \frac{x^3}{3}} + \lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^3\right)}{x + \frac{x^3}{3}} = 1 + 0 = 1$$

所以 $\tan x \sim x + \frac{x^3}{3}$。直接利用这个结论下列函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$ 过程如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$$

这样利用泰勒展开避免了直接出现分子或者分母为 0 的情况，求解过程清晰，并且简单容易理解，所以当遇到使用洛必达法则比较复杂情形就可以考虑使用泰勒展开公式。

下面来分析函数极限 $\frac{x^2 \sin x}{\sin x - \tan x}$ 的多种求解方式。

例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \sin x}{\sin x - \tan x}$

错误求解：直接利用 $\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$ 对分母中的 0-0 进行替换得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{0}$$

注：此求解方式有错，当和差替换分子或者分母之后出现差为 0 的情况，是不能直接进行替换的。

正确求解：

解法一：首先使用等价无穷小的替换 $\sin x \sim x$ 进行化简，然后使用洛必达法则对分子分母进行求导，再对分母中的 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 进行无穷小替换。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x->0}\frac{3x^2\cos^2 x}{\cos^3 x-1}=\lim_{x->0}\frac{3x^2\cos^2 x}{(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x->0}\frac{3x^2}{\cos x-1}\cdot\lim_{x->0}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos x+1}$$

$$=\lim_{x->0}\frac{3x^2}{-\frac{x^2}{2}}\cdot 3=-2$$

注：此求解方法采用了无穷小替换，洛必达法则以及极限的四则运算法则。但是方法使用的先后顺序有很大的技巧，比如如果第一步就使用洛必达法则对分子分母求导就会导致分母越来越复杂，而使得随后求解不出结果。

解法二：首先使用等价无穷小的替换 $\sin x\sim x$ 进行化简，然后对分子中 $\sin x$ 和 $\tan x$ 利用上面的泰勒展开公式(3) (4)进行三级泰勒展开得到 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$ 和 $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$，从而得到 $\sin x\sim x-\frac{x^3}{3!}$，$\tan x\sim x+\frac{x^3}{3}$。然后利用等价替换来进行替换得到结果。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\frac{x^3}{3!}-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-\frac{x^3}{2}}=-2$$

注：此求解方法采用了无穷小替换，并利用泰勒展开公式进行三级展开得到新的等价替换来替换分子得到求解。此方法只要灵活的掌握了泰勒展开公式在分式未定式中 $\frac{0\pm 0}{0}$ 或者 $\frac{0}{0\pm 0}$ 中的应用，这个方法相比较于解法一求解过程会更简单更好理解。

解法三：首先对原函数进行化简，然后利用等价无穷小替换原则和极限的四则运算法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x-1}=\lim_{x->0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}\cdot\cos x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=-2$$

解法四：首先对原函数进行化简，然后利用等价无穷小替换原则和极限的四则运算法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\tan x(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x(\cos x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2$$

注：虽然函数 $\frac{x^2\sin x}{\sin x-\tan x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 类型的未定式，但是解法三和解法四并没用采用洛必达法则，而是分析了函数能够在原基础上进行不同形式的化简，化简之后采用无穷小替换原则和极限的四则运算法则来求解。解法三和解法四虽然都是对原函数进行化简，但是如何化简，什么时候进行无穷小的替换也决定了函数求解过程的复杂难以程度。所以要熟练的掌握各类方法的用法，并能灵活地将各种方法结合使用。

4. 小结

本文通过例题探讨了利用洛必达法则，极限的四则运算法则，Taylor 公式求解，无穷小等价替换法则等来求解 $\frac{0}{0}$ 类型下分子或者分母为和差情况下的多种求解模式，针对每种求解方法都给出小结，对于较复杂的函数求极限的问题，可以采用技巧性更强、解题效率更高的利用 Taylor 公式求极限的方法，以达到快速求解复杂函数极限的目的。其他形式的未定式，经过转化若符合条件仍可使用本文得出的结论进行求解。

参考文献

[1] 同济大学数学系编. 高等数学[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 34-137.

[2] 王丽丽. 洛必达法则在解析求极限类问题中的应用[J]. 河南工程学院学报(自然科版), 2022, 34(1): 76-80. https://doi.org/10.16203/j.cnki.41-1397/n.2022.01.001

[3] 邢喜莲. 例谈未定式求极限的精讲多解模式的研究[J]. 牡丹江教育学院学报, 2022(7): 78-80.

[4] 马金玲. 浅谈数学分析中极限的求法[J]. 数学学习与研究, 2021(36): 5-7.

[5] 刘艳. 泰勒公式在函数极限计算中的方法探讨[J]. 教育教学论坛, 2020(28): 328-329.

[6] 油俊彦. 一道未定式极限例题的解法探讨[J]. 科技风, 2020(26): 62-63. https://doi.org/10.19392/j.cnki.1671-7341.202026031