Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(2), 582-589
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122061

4阶Hessenberg符号模式矩阵允许代数正

焦 旸，田 岩*

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年1月19日；录用日期：2023年2月14日；发布日期：2023年2月22日

摘 要

符号模式矩阵是组合矩阵论的一个重要研究热点，它在经济学、生物学、社会学等领域中具有广泛的应用。符号模式矩阵允许代数正是组合矩阵论中非常重要的问题，本文将考虑Hessenberg符号模式矩阵，通过对4阶Hessenberg符号模式矩阵的研究，给出4阶Hessenberg符号模式矩阵允许代数正的必要条件。4阶Hessenberg符号模式矩阵允许代数正的研究方法为其他特殊符号模式矩阵允许代数正的研究提供一定的思路和方法。

关键词

符号模式矩阵，Hessenberg符号模式矩阵，允许代数正

4-Order Hessenberg Sign Pattern Matrices That Allow Algebraic Positivity

Yang Jiao, Yan Tian*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 19th, 2023; accepted: Feb. 14th, 2023; published: Feb. 22nd, 2023

Abstract

The sign pattern matrix is an important research hotspot of combinatorial matrix theory. It is widely used in economics, biology, sociology and other fields. Sign pattern matrices that allow algebraic positivity are a very important problem in combinatorial matrix theory. In this paper, we consider the Hessenberg sign pattern matrices. Through the study of Hessenberg sign pattern matrices with order 4, we give necessary conditions of 4-order Hessenberg sign pattern matrices that allow algebraic positivity. The research method of 4-order Hessenberg sign pattern matrices that allow algebraic positivity provides some ideas and methods for the research of other special sign

*通讯作者。

文章引用: 焦旸, 田岩. 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 582-589.
DOI: 10.12677/aam.2023.122061

pattern matrices that allow algebraic positivity.

Keywords

Sign Pattern Matrix, Hessenberg Sign Pattern Matrix, Allow Algebraic Positivity

1. 引言

在组合矩阵论中，符号模式矩阵是一个十分活跃的研究课题，它在社会学、经济学、化学、计算机科学等众多领域中具有广泛的实际应用背景。1987 年，C. Eschenbach 引出并研究了符号模式允许和要求某种实矩阵的性质，C. Eschenbach，F. Hall 和李忠善等人对符号模式矩阵的很多性质都进行了研究[1]-[6]。2016 年，Steve Kirkland [7]等人首次提出了代数正矩阵的概念：对于实方阵 A，如果存在实系数多项式 f 使得 $f(A)$ 是正矩阵，那么 A 称为代数正矩阵。除此之外，他们也提出了符号模式矩阵要求代数正和允许代数正这两个重要问题。2019 年，Sunil Das [8]等人刻画了星符号模式矩阵和三对角符号模式矩阵要求代数正。2022 年，Biswas A，Kundu S [9]刻画了所有 3 阶对称的符号模式矩阵要求代数正。2021 年，Sunil Das [10]给出了 5 阶树符号模式矩阵要求代数正的等价刻画。2022 年，Sunil Das [11]给出从低阶代数正矩阵构造高阶代数正矩阵的方法。迄今为止，符号模式矩阵要求代数正和允许代数正仍是组合矩阵论中的两个非常重要的问题。很多学者和专家关于符号模式矩阵的研究已经取得了大量丰硕的成果，但是还有很多问题亟待解决，例如，n 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正的充分必要条件，但是研究的难度较大。因此，本文研究 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵。首先，证明 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵不可约；然后，根据 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵中除对角线以外元素的正负号个数进行分类，给出 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正的必要条件。

2. 预备知识

符号模式矩阵是指所有元素都取自集合 $\{+,-,0\}$ 的矩阵。对于实矩阵 $A=(a_{ij})$，以 a_{ij} 的符号为元素组成的符号模式矩阵称为 A 的符号模式矩阵。对于任意符号模式矩阵 A，所有与 A 的符号相同的实矩阵组成的集合称为 A 所决定的定性矩阵类，记为 $Q(A)$。所有元素都是正实数的矩阵称为正矩阵，即矩阵中每个元素都大于零，记作 $A>0$。设 A 是实方阵，如果存在一个实系数多项式 f 使得 $f(A)>0$，那么称 A 是代数正矩阵。设 A 是符号模式矩阵，如果 $Q(A)$ 中任意矩阵都是代数正矩阵，那么称符号模式矩阵 A 是要求代数正的。设 A 是符号模式矩阵，如果 $Q(A)$ 中存在代数正矩阵，那么称符号模式矩阵 A 允许代数正。设 V 是有限集合，$E\subseteq V^2$，则集合对 $D=(V,E)$ 称为一个有向图。V 中的元素称为顶点。E 中元素称为弧。D 中首尾相连的一串弧称为有向路径。若存在一条从 a 到 b 的有向路径，也存在一条从 b 到 a 的有向路径，则称有向图 $D=(V,E)$ 的两个顶点 a 和 b 强连通[12]。

本文中 $A_{(i,j)}$ 表示矩阵(或符号模式矩阵) A 的第 i 行 j 列元素。本文讨论的矩阵都是实方阵。R 表示是实数域。$*$ 取自集合 $\{+,-,0\}$。

3. 主要结论

这部分考虑 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，证明 Hessenberg 符号模式矩阵不可约，按除对角线外元

素的取值情况进行分类讨论，给出 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正的必要条件。

首先，给出 Hessenberg 符号模式矩阵的概念。

定义 3.1 符号模式矩阵 A 形如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{(i-1,i)},A_{(i,1)}\in\{+,-\}(i=2,3,\cdots,n)$，$A_{(i,i)}\in\{+,-,0\}(i=1,2,\cdots,n)$，其余位置的元素都为 0，称 A 是 Hessenberg 符号模式矩阵。

其次，证明 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵不可约。

引理 3.1 [13]方阵 A 不可约当且仅当其有向图 $D(A)$ 强连通。

引理 3.2 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵 A 不可约。

证明 设 A 是 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，则

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & & & a_{44} \end{pmatrix}.$$

由 $A_{(1,2)}A_{(2,3)}A_{(3,4)}A_{(4,1)}\neq 0$，故 A 的有向图 $D(A)$ 中任意两个顶点 $i\neq j\in\{1,2,3,4\}$ 之间都存在有向路径，则 $D(A)$ 强连通。由引理 3.1 可知，A 不可约。

设 A 是 n 阶符号模式矩阵，取 A 中+的元素，其余元素用 0 替代，记为 A_+，取 A 中−的元素，其余元素用 0 替代，记为 A_-，则 $B_A=A_+-A_-^{\mathrm{T}}$。

引理 3.3 设 A 是 4 阶 Hessenberg 符号模式，如果 A 允许代数正，则 $A_{(3,4)}A_{(4,1)}>0$。

证明 设 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵 A 允许代数正，则令 $Q(A)$ 中存在矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ c_2 & 0 & a_3 & b_3 \\ c_3 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix},$$

是代数正矩阵。由([9]，定理 3)可知，$M-a_4I$ 是代数正矩阵。由([7]，定理 12)可知，$M-a_4I$ 的每行和每列都含有正数或负数，所以 $b_3c_3>0$，因此 $A_{(3,4)}A_{(4,1)}>0$。

定理 3.4 设 A 是 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵。若 A 允许代数正，则 A 或−A 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ - & + & - & 0 \\ - & 0 & + & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix},\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ + & + & - & 0 \\ - & 0 & + & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix},\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ - & + & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & - & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & + & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 & 0 \\ + & - & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ - & + & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & - & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

证明 设 4 阶 Hessenberg 符号模式 A 允许代数正，则由引理 3.3 可知，$A_{(4,1)}A_{(3,4)}>0$。不妨设 $A_{(4,1)}=A_{(3,4)}=+$。

当 A 中除对角线外有 2 个+，则 A 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

由([7]，定理 12]可知，A 的每行和每列含有+或−，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ - & + & - & 0 \\ - & 0 & + & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

当 A 中除对角线外含有 3 个+，则 A 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

若 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A=\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & + & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

则有向图 $D(B_A)$ 中顶点 2 到顶点 $i\in\{1,3,4\}$ 不存在有向路径，故 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

若 $A=\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵

$$A=\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ + & + & - & 0 \\ - & 0 & + & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

若 $A=\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵

$$A=\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ - & + & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & - & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

若 $A=\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & + & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

则有向图 $D(B_A)$ 中顶点 $i\in\{1,2,4\}$ 到 3 不存在有向路径，则 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

当 A 中除对角线外含有 4 个+，则 A 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

若 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵

$$A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ - & 0 & + & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 & 0 \\ + & - & - & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

若 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵 A 符合。

若 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A=\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ + & + & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

则有向图 $D(B_A)$ 中顶点 2 到顶点 $i\in\{1,3,4\}$ 不存在有向路径，则 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

若 $A=\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵

$$A=\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 \\ - & + & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & - & + \\ + & 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

若 $A=\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A=\begin{pmatrix} * & 0 & + & 0 \\ + & * & + & 0 \\ 0 & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

则有向图 $D(B_A)$ 中顶点 $i\in\{1,3,4\}$ 到 2 不存在有向路径，则 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

若 $A=\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A=\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & + & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

则有向图 $D(B_A)$ 中顶点 1 到 $i\in\{2,3,4\}$ 不存在有向路径，则 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

当 A 中除对角线外有含 5 个+，则 A 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

若 $A = \begin{pmatrix} * & - & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

因为有向图 $D(B_A)$ 中顶点 1 到顶点 $i \in \{2,3,4\}$ 不存在有向路径，所以 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

若 $A = \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则

$$B_A = \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & + & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

因为有向图 $D(B_A)$ 中顶点 $i \in \{1,2,4\}$ 到顶点 3 不存在有向路径，所以 $D(B_A)$ 不强连通。由引理 3.1 可知，B_A 可约。又因为 A 不可约，由([9]，定理 4)可知，A 不是允许代数正，产生矛盾。

若 $A = \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ - & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵 A 符合。

若 $A = \begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ - & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$，则根据([7]，定理 12)，$A$ 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵 A 符合。

当 A 中除对角线外含有 6 个+，则 A 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 & 0 \\ + & * & + & 0 \\ + & 0 & * & + \\ + & 0 & 0 & * \end{pmatrix}。$$

根据([7]，定理 12)，A 的每行和每列都含有一个+或−，所以符号模式矩阵 A 符合。

当 $A_{(4,1)} = A_{(3,4)} = -$ 时，$-A$ 的形式与上面所得符号模式相同。

4. 结论

本文主要通过对 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵的研究，给出 4 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正必要条件。本文的研究方法为特殊符号模式矩阵允许代数正的研究提供一定的思路和方法。

基金项目

辽宁省教育厅青年项目(LQ2020021)。

参考文献

[1] Shan, H. and Shao, J. (2004) Matrices with Totally Signed Powers. *Linear Algebra and Its Applications*, **376**, 215-224. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00643-8

[2] Shao, J. (1999) On Sign Inconsistent Linear Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **296**, 245-257. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00130-5

[3] Shao, J. (2000) On the Digraphs of Sign Solvable Linear Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **33**, 115-126. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00107-5

[4] Shao, J. and Ren, L. (2004) Some Properties of Matrices with Signed Null Spaces. *Discrete Mathematics*, **279**, 423-435. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00286-3

[5] Shao, J. and Shan, H. (2002) The Solution of a Problem on Matrices Having Signed Generalized Inverses. *Linear Algebra and Its Applications*, **345**, 43-70. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(01)00452-9

[6] Shao, J. and Shan, H. (2005) The Determinantal Regions of Complex Sign Pattern Matrices and Ray Pattern Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **395**, 211-228. https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.08.023

[7] Kirkland, S., Qiao, P. and Zhan, X. (2016) Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **504**, 14-26. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.049

[8] Das, S. and Bandopadhyay, S. (2019) On Some Sign Patterns of Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **562**, 91-122. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.10.007

[9] Biswas, A. and Kundu, S. (2022) On Algebraically Positive Matrices with Associated Sign Patterns. *Resonance*, **27**, 1211-1235. https://doi.org/10.1007/s12045-022-1415-1

[10] Das, S. (2021) Classifications of Some Algebraically Positive, Diagonalizable and Stable Matrices with Their Sign Patterns. Department of Mathematics Indian Institute of Technology, Guwahati.

[11] Das S. (2022) Sign Patterns That Allow Algebraic Positivity. *Linear Algebra and Its Applications*, **653**, 151-182. https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.08.007

[12] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[13] Brualdi, R.A. and Ryser, H.J. (1991) Combinatorial Matrix Theory. Cambridge University Press, New York, 55. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325708