

非线性传输线中电容参数对孤子行为的影响

梁雨珂¹, 吴颀尔¹, 周 昱^{1*}, 罗文琛²

¹江苏科技大学理学院, 江苏 镇江

²中南大学物理与电子学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2022年12月15日; 录用日期: 2022年12月29日; 发布日期: 2023年2月23日

摘 要

基于同伦分析法研究了非线性传输线系统中电容参数和谐振参数对体系孤子行为的影响, 在弱非线性情况下将所得解与数值解进行对比, 验证了系统的孤子行为。在强非线性情况下, 通过考虑非线性电容表达式中各项参数的不同变化, 找出孤子半峰全宽与这些参数的关系, 表明可通过改变非线性电容表达式各项参数以及谐振参数, 调控在非线性传输线中的孤子行为, 也可以通过对谐振参数和非线性参数的调节, 改变孤子解半峰全宽, 实现对非线性传输线的非线性行为研究。

关键词

同伦分析法, 非线性传输线路, 孤子解, 谐振参数

Effect of Capacitance Parameters on Soliton Behaviors in Nonlinear Transmission Lines

Yuke Liang¹, Jieer Wu¹, Yu Zhou^{1*}, Wenchen Luo²

¹School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang Jiangsu

²School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha Hunan

Received: Dec. 15th, 2022; accepted: Dec. 29th, 2022; published: Feb. 23rd, 2023

Abstract

The influence of capacitance parameters and resonance parameters on the soliton behavior of nonlinear transmission line system is studied based on homotopy analysis method. In the weakly nonlinearity case, the obtained solution is compared with the numerical solution to verify the soliton behavior of the system while in the strongly nonlinearity case, the relationship between the

*通讯作者。

文章引用: 梁雨珂, 吴颀尔, 周昱, 罗文琛. 非线性传输线中电容参数对孤子行为的影响[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 615-625. DOI: 10.12677/aam.2023.122065

full width at half maximum of soliton solution and these parameters is found by considering the different changes of various parameters in the nonlinear capacitance expression. It shows that the behavior of soliton in the nonlinear transmission line can be controlled by changing the parameters of the nonlinear capacitance expression and the resonance parameters, and the full width at half maximum of soliton solution can also be changed by adjusting the resonance parameters and nonlinear parameters. The nonlinear behaviors of the nonlinear transmission lines could be partially understood based on our work.

Keywords

Homotopy Analysis Method, Nonlinear Transmission Lines, Soliton Solutions, Resonant Parameters

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性现象广泛存在于光纤通信等工程领域,而非线性演化方程(nonlinear evolution equations, NLEEs)是描述这些现象的有力数学工具[1] [2]。方程具有形式多样的孤子解[3] [4]且这些孤子大都在碰撞之后保持波形和波速不变,只有相位发生微小变化。对孤子的研究可以通过反散射方法[5]、达布变换[6]、变分迭代法[7]、扩展的 tanh 方法[8]、同宿检验法[9]、tanh-coth 展开法[10]、双线性法[11]、相位像理论[12]等。如用于传输射频交流电的介质具有良好非线性特性,则可以构成非线性传输线路(nonlinear transmission line, NLTL)。我们可以使用包括非线性薛定谔方程[13]、Burgers 方程[14]、Korteweg-de Vries 方程[15]、Zakharov-Kuznetsov 方程[16]等在内的各类 NLEEs 描述 NLTL 的非线性特性。NLTL 有两种设计方式,或是利用外部磁场偏置的连续线[17],或是采用集总元件作为传输线的基础,而基于集总元件的 NLTL 是包含非线性元器件的无源传输线,它主要包括非线性的电容和电感[18] [19] [20]。NLTL 中随着偏置电压的逐渐增大,电容具备非线性的同时也决定了 NLTL 的非线性效应,其中存在孤子。因在长距离传输中保持稳定的特性,使得 NLTL 中的孤子行为直接决定了 NLTL 的传输稳定性,所以对 NLTL 的孤子行为的研究具有重要意义。

目前理论上得到的一些 NLTL 的解大多只是求解了弱非线性问题,而强非线性也是一个不可忽视的问题。本文利用同伦分析法(homotopy analysis method, HAM)对强非线性 NLTL 的孤子行为进行研究,分析研究电容参数以及谐振参数对 NLTL 孤子半峰全宽的影响,并和弱非线性的情况进行对比,得到更加稳定的孤子半峰全宽图像。本文安排如下,在第 2 节简单介绍 HAM 的求解过程。在第 3 节中,利用 HAM 演算弱非线性 NLTL 方程,得到其孤子解并与其已知数值解作对比。在第 4 节我们引入强非线性项,利用 HAM 得到其孤子解。在第五节中,引入结果与讨论。

2. 同伦分析法简介

同伦分析法是科学和工程领域研究的有力工具[21] [22],它借鉴了拓扑学和微分几何中的同伦概念,利用收敛参数控制解的收敛性,再通过形变等一系列变化,让初始猜测解逐渐演化为目标方程的解。同伦分析法的简单收敛判断和近似演化过程使得同伦分析法在许多强非线性问题中体现出了独特优越性,其主要步骤如下:

首先构造简单同伦

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\phi(r,t;q);u_0(r,t),H(r,t),h,q] \\ & = (1-q)\mathcal{L}(\phi(r,t;q)-u_0(r,t))-qhH(r,t)N[\phi(r,t;q)] \end{aligned} \quad (1)$$

其中辅助参数 $h \neq 0$, 辅助函数 $H(r,t) \neq 0$, \mathcal{L} 为线性算子, r 和 t 分别是空间和时间变量, N 为非线性算子, $u(r,t)$ 为待求函数。这样构造的同伦比传统的同伦更加具有一般性, 辅助参数 h 和辅助函数 $H(r,t)$ 在同伦分析方法起着至关重要的作用, 他们的取值直接决定了解的收敛性和近似解的有效性。正是由于辅助参数 h 和辅助函数 $H(r,t)$ 的引入, 使得我们在选取初始猜测解 $u_0(r,t)$ 、辅助线性算子 \mathcal{L} 时拥有很大的自由。

进一步, 令同伦(1)等于零, 得到零阶形变方程

$$(1-q)\mathcal{L}(\phi(r,t;q)-u_0(r,t))=qhH(r,t)N[\phi(r,t;q)] \quad (2)$$

其中, $\phi(r,t;q)$ 是原非线性方程的解, 它与初始猜测解 $u_0(r,t)$, 辅助线性算子 \mathcal{L} 、辅助参数 h 、辅助函数 $H(r,t)$ 以及嵌入变量 $q \in [0,1]$ 的设定有关。从式(2)中可以看到, 当嵌入变量 q 从 0 连续增加到 1 的时候, $\phi(r,t;q)$ 从初始猜测解连续变化成了非线性方程的解 $u(r,t)$, 在同伦理论中, 把这种连续变化的过程称为形变。

定义 m 阶形变导数

$$u_0^{(m)}(r,t) = \left. \frac{\partial^m \phi(r,t;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3)$$

并将 $\phi(r,t;q)$ 对 q 进行泰勒展开, 令

$$u_m(r,t) = \frac{u_0^{(m)}(r,t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(r,t;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (4)$$

联立(3)和(4), 得到

$$\phi(r,t;q) = u_0(r,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r,t)q^m \quad (5)$$

当选取的初始猜测解 $u_0(r,t)$ 、辅助线性算子 \mathcal{L} 、辅助参数 h 以及辅助函数 $H(r,t)$ 都合适, 就能得到对应的级数解的表达式

$$u(r,t) = u_0(r,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r,t) \quad (6)$$

接着将零阶形变方程(2)对 q 求导 m 次, 再除以 $m!$, 并令 $q=0$, 就能得到与零阶形变方程对应的高阶形变方程

$$\mathcal{L}[u_m(r,t) - \Delta_m u_{m-1}(r,t)] = hH(r,t)R_m[u_{m-1}(r,t)] \quad (7)$$

其中 $\Delta_m = 0$ (当 $m=1$) 或 1 (当 $m>1$), 同时

$$R_m[u_{m-1}(r,t)] = \left. \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(r,t;q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (8)$$

需要注意的是, 无论 m 的取值为何, 高阶形变方程都是具有统一的线性算子 \mathcal{L} , 而且这里的 $R_m[u_{m-1}(r,t)]$ 可以通过定义的非线性算子 N 给出, 而且不难看出, 高阶形变方程的右端只与 u_{m-1} 相关, 通过对高阶形变方程的整体观察我们不难知道, 当 m 从 1 一直取到 n 的时候, 我们就能得到 $u(r,t)$ 的 n 阶近似解。

3. 弱非线性传输线中的孤子解

非线性传输线模型如图 1 所示, L 为线性电感, $C(V)$ 为非线性电容, 假定电容的耗尽层随电压不发生较大的改变, 因此可以对电容 $C(V)$ 采取线性近似, 表达式为 $C(V) = C_0(1 - \alpha V)$, 这里的 α 为线性系数, C_0 为初始电容, V 为传输电压, 它能直接反映非线性传输线路的孤子行为, 由电容电感的性质, 应用基尔霍夫电流定律得到

$$L \frac{\partial}{\partial t} \left[C(V) \frac{\partial V_m}{\partial t} \right] = V_{m+1} + V_{m-1} - 2V_m \tag{9}$$

对于式(9)的右边, 我们可以假设两个最小非线性传输单元的间距为一固定参量 δ (也就是 $x_m = m\delta$), 然后我们再把 V_m, V_{m-1}, V_{m+1} 表示成为 $V(x), V(x - \delta), V(x + \delta)$, 这样一来就把 V_m 转换成了只关于 x, t, δ 的函数, 这里的 δ 无意义, 后续我们可以通过同伦分析的方法来消去近似解中的 δ 。

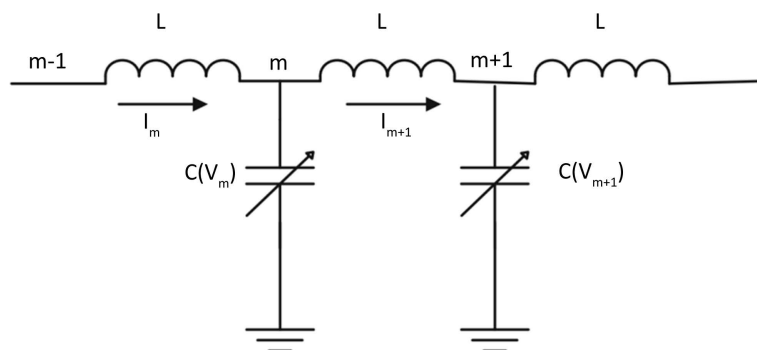


Figure 1. Cell diagram of nonlinear transmission lines
图 1. 非线性传输线细胞图

接着再对 $V(x), V(x - \delta), V(x + \delta)$ 进行泰勒展开, 这样就能得到几个连续近似的偏微分方程, 把所得微分方程代入到(9)中得到

$$l \frac{\partial}{\partial t} \left[c(V) \frac{\partial V}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \delta^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \tag{10}$$

其中 $l = \frac{L}{\delta}, c(V) = \frac{C(V)}{\delta}$, 它们分别代表了单位长度的电感和电容, 再将电容表达式代入到(10)得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{lC_0} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\delta^2}{12lC_0} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial t^2} \tag{11}$$

等式右边第一项是色散项, 第二项为非线性项, 所以我们只要保证非线性项与色散项在同一数量级上, 我们就能得到一个具有稳定传播性质的孤波。利用行波变换 $V(x, t) = V(\xi), \xi = x - vt$, 对 $V(x, t)$ 进行处理, 有

$$\frac{\delta^2}{12lC_0} V'''' + \left(\frac{1}{lC_0} - v^2 \right) V'' + \frac{\alpha v^2}{2} (V^2)'' = 0 \tag{12}$$

其中 V'', V'''' 分别是 V 对 ξ 的二次、四次导数, 对式(12)两端进行积分, 令积分常数等于 0, 得到一个非线性常微分方程

$$\frac{\delta^2 \omega^2}{12} V'' + (\omega^2 - v^2) V + \frac{\alpha v^2}{2} V^2 = 0 \tag{13}$$

其中，谐振参数 $\omega = \frac{1}{\sqrt{IC_0}}$ 。设定初始猜测解为 $V_0(\xi) = 2e^{-\xi} - e^{-2\xi}$ ，设定(2)中的辅助线性算子为 $\partial^2 V / \partial \xi^2 - V$ ，则由(13)设定非线性算子的表达式为

$$N[\varphi(\xi; q), v(q)] = \frac{\delta^2 \omega^2}{12} \frac{\partial^2 \varphi(\xi; q)}{\partial \xi^2} + [\omega^2 - v^2(q)] \varphi(\xi; q) + \frac{\alpha v^2(q)}{2} \varphi^2(\xi; q) \tag{14}$$

其中

$$\varphi(\xi; q) = V_0(\xi) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(\xi) q^m \tag{15}$$

当 q 从 0 连续变化到 1 的时候， $\varphi(\xi; q)$ 从初始猜测解 $V_0(\xi)$ 连续变化为式(13)的解 $V(\xi)$ ，同时速度参数 $v(q)$ 也连续变化为式(13)的 v ，所以我们可以利用上一节的方法得到 $V(\xi)$ 和 v 。

构造一个简单的零阶形变方程

$$(1-q)\mathcal{L}[\varphi(\xi; q) - V_0(\xi)] = qhN[\varphi(\xi; q), v(q)] \tag{16}$$

在式(16)的两边对 q 求导 m 次，再除以 $m!$ ，令 $q=0$ 得到高阶形变方程

$$\mathcal{L}[V_m(\xi) - \Delta_m V_{m-1}(\xi)] = hR_m[V_{m-1}(\xi), v_{m-1}] \tag{17}$$

$R_m[V_{m-1}(\xi), v_{m-1}]$ 的表达式如下

$$R_m[V_{m-1}(\xi), v_{m-1}] = \frac{1}{2} \alpha \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^n V_i V_{n-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1-n} v_j v_{m-1-n-j} \right) - \sum_{i=0}^{m-1} V_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} v_j + \omega^2 V_{m-1} + \frac{\omega^2 \delta^2}{12} V_{m-1}'' \tag{18}$$

由初始猜测值的设定，需要避免后续递推高阶形变项 $V_n(\xi)$ 产生发散项 $\xi e^{-\xi}$ ，需要令 $R_m[V_{m-1}(\xi), v_{m-1}]$ 中的 $e^{-\xi}$ 项系数等于 0，通过整理我们得到 $e^{-\xi}$ 项系数，解得

$$\delta = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{-\omega^2 + v_0^2}}{\omega} \tag{19}$$

故可将式(18)中的无意义小参数 δ 消去，接着利用微分方程解的性质有

$$V_n(\xi) = \Delta_m V_{n-1}(\xi) + V_n^*(\xi) + c_0 e^{-\xi} + c_1 e^{\xi} \tag{20}$$

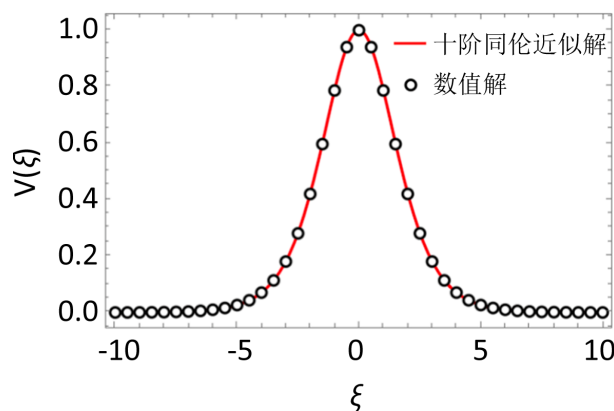


Figure 2. Red solid line: the tenth order approximate solution image obtained by homotopy analysis; Hollow dots: known numerical solutions. $\alpha = 1, \omega = 1, h = -4, \delta = \sqrt{6}$

图 2. 红色实线：同伦分析求得 10 阶近似解图像；空心圆点：已知数值解。 $\alpha = 1, \omega = 1, h = -4, \delta = \sqrt{6}$

再利用孤子解的边界条件 $V(0)=1; V'(0)=0$ 得到各高阶形变解的表达式, 最后通过求和可以给出所求的孤子解, 并且得到速度参数 v 关于收敛参数 h 的表达式。计算得知, 当 h 处于区间 $(-6, -2)$ 时, 速度参数 v 的值恒定为 $\sqrt{3}/2$, 利用同伦分析收敛参数的特性得到收敛参数 h 的收敛区间为 $(-6, -2)$ 。利用迭代依次求出高阶近似解 $V_1(\xi), V_2(\xi)$ 的形式, 进而给出 $h = -4$ 时十阶近似解, 如图 2 所示。

通过图 2 和误差图 3 可以清晰地看到我们所求的同伦分析解与已知数值解[23]有极好的吻合度, 误差小于 0.25%, 说明同伦分析法能很好应用于研究非线性传输线的弱非线性情况, 同时因其独特且简便的优势, 使得我们在整个求解过程中, 只使用了一个简单的收敛参数 h 就很好地保证了了解的收敛性。

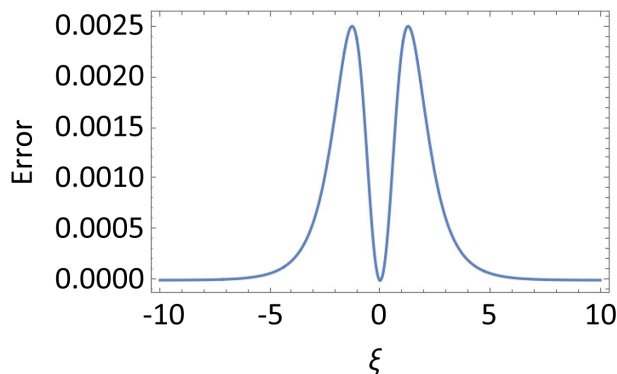


Figure 3. Absolute error graph of homotopy approximate solution and known analytical solution. $\alpha=1, \omega=1, h=-4, \delta=\sqrt{6}$

图 3. 同伦近似解与已知解析解的绝对误差图。 $\alpha=1, \omega=1, h=-4, \delta=\sqrt{6}$

经过研究我们可以发现同伦近似解的半峰全宽(full width at half maximum, FWHM)在 ω 较小的时候随 ω 的增大而逐渐振荡增加。但我们仔细推导后发现, 图像在 $\omega \in (0.6, 1.2)$ 的区间里存在不规则振荡, 说明非线性传输线中具有弱非线性效应的电容会导致非线性传输线的孤子行为不稳定。所以如要获得具有稳定性孤子行为的传输电路, 可以将强非线性效应的电容应用在传输电路中, 并期望能得到具有稳定孤

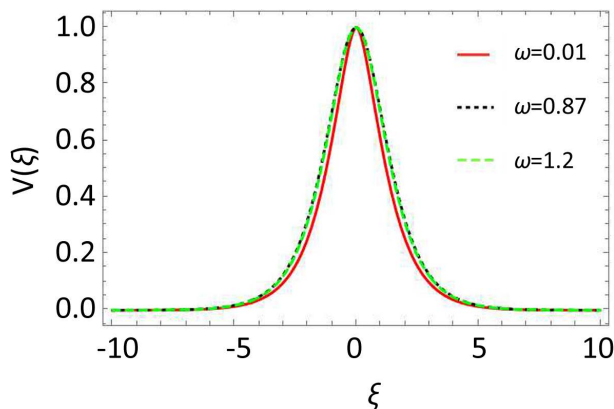


Figure 4. Two-dimensional diagram of the tenth-order homotopy approximation solution. Red dotted line: $\omega=0.01$; green solid line: $\omega=1$; black dashed line: $\omega=1.3$. $\alpha=1, h=-4, \delta=\sqrt{6}$

图 4. 10 阶同伦近似解二维图。红色点线: $\omega=0.01$; 绿色实线: $\omega=1$; 黑色虚线: $\omega=1.3$ 。 $\alpha=1, h=-4, \delta=\sqrt{6}$

子行为的传输线路。

为更好地分析弱非线性传输线的孤子行为特性，我们在图 4 画出了十阶同伦近似解随谐振参数 ω 变化的图像，表明相关变量之间的演化关系。

4. 强非线性传输线中的孤子解

除部分小电流情况外，NLTL 的激励电压往往会增加到足以改变非线性电容中耗尽层厚度的强度，使得电容呈现较强的非线性特性，因此，对于强非线性的电容情况下 NLTL 的研究也具有重要意义。将非线性电容表达式修正为形如 $C(V) = C_0(1 + \alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3)$ ，这里 α 为线性系数， β 和 γ 是非线性系数，将表达式代入(11)并利用行波变换 $V(x, t) = V(\xi), \xi = x - vt$ ，对 $V(x, t)$ 进行处理，有

$$(\alpha + 2\beta V + 3\gamma V^2)v^2(V')^2 = -(1 + \alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3)v^2V'' + \omega^2V'' + \frac{\delta^2\omega^2}{12}V'''' \quad (21)$$

其中 V', V'', V'''' 分别是 V 对 ξ 的一次、二次、四次导数，谐振参数 ω 表达式同前。设定初始猜测解为 $V_0(\xi) = 2e^{-\xi} - e^{-2\xi}$ ，设线性算子为 $\partial^4 V / \partial \xi^4 - V$ ，并且设定非线性算子表达式为

$$\begin{aligned} N[\varphi(\xi; q), v(q)] &= (\alpha + 2\beta\varphi(\xi; q) + 3\gamma\varphi^2(\xi; q))v^2(q) \left(\frac{\partial\varphi(\xi; q)}{\partial\xi} \right)^2 \\ &+ (1 + \alpha\varphi(\xi; q) + \beta\varphi^2(\xi; q) + \gamma\varphi^3(\xi; q))v^2(q) \frac{\partial^2\varphi(\xi; q)}{\partial\xi^2} \\ &- \omega^2 \frac{\partial^2\varphi(\xi; q)}{\partial\xi^2} - \frac{\delta^2\omega^2}{12} \frac{\partial^4\varphi(\xi; q)}{\partial\xi^4} \end{aligned} \quad (22)$$

这里的 $\varphi(\xi; q)$ 仍然具有式(15)的性质，我们依照式(16)到式(20)的方法，得 $R_m[V_{m-1}(\xi), v_{m-1}]$ 的表达式形如

$$\begin{aligned} R_m[V_{m-1}(\xi), v_{m-1}] &= \alpha \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} \sum_{k=0}^j V'_{j-k} V'_k + 2\beta \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} \sum_{k=0}^j V'_{j-k} \sum_{l=0}^k V'_{k-l} V_l \\ &+ 3\gamma \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} \sum_{k=0}^j V'_{j-k} \sum_{l=0}^k V'_{k-l} \sum_{q=0}^l V_{l-q} V_q + \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v''_{i-j} v_j \\ &+ \alpha \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} \sum_{k=0}^j V_{j-k} V''_k + \beta \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} \sum_{k=0}^j V_{j-k} \sum_{l=0}^k V_{k-l} V''_l \\ &+ \gamma \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} \sum_{k=0}^j V_{j-k} \sum_{l=0}^k V_{k-l} \sum_{q=0}^l V_{l-q} V''_q - \omega^2 V''_{m-1} + \omega^2 V''''_{m-1} \\ &- \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i} \sum_{j=0}^i v_{i-j} V''''_j \end{aligned} \quad (23)$$

同样通过迭代的方法求出速度参数 v 关于收敛参数 h 的表达式，可得收敛参数 h 的收敛范围是 $(-12, 4)$ 。

通过令 $h = -5$ ，解出同伦近似解如图 5 所示，形式上这明显是一个孤子。

此外，为了直观看清孤子的半峰全宽与谐振参数以及非线性电容各参数的变化情况，我们给出半峰全宽随谐振参数变化图 6，以及半峰全宽随谐振参数以及电容系数的变化图 7 和图 8。

在图 7 中，我们发现了当保持平方非线性系数 β 和立方非线性系数 γ 为定值，随着线性系数 α 的增加，曲线的极大值和极小值都在增加。

仔细研究发现, 当保持 α 以及非线性系数中的一个参量为定值时, 任意一个非线性系数的增加导致曲线的极大值和极小值都减小, 如图 8 所示。以上行为说明对于 NLTL 中孤子解的半峰全宽, 非线性电容中的线性系数和非线性系数的效果是相互制约的, 所以如果需要得到特定的 NLTL 孤子解, 是可以通过对非线性电容里的非线性项系数和线性项系数的控制来实现。

不难发现 NLTL 中的孤子半峰全宽是与电容参数和谐振参数有直接联系, 而孤子的半峰全宽直接决定了 NLTL 作为射频电路的功率特性, 孤子宽度越窄, 说明 NLTL 的输出功率越集中, 滤波效应也越好。在实际应用中, 初始电容与电感值往往确定, 所以我们可以利用上图中的极值, 通过改变电容的参数, 得到期望效果的 NLTL。

强非线性电容表达式表明电容与电压的正相关, 这与弱非线性电容中电容与电压呈负相关不同, 从图 6 中可以看到, 当线性系数 $\alpha=1$ 时, 极小值等于 2.882 是小于 3 的, 而对比弱非线性中孤子半高宽的

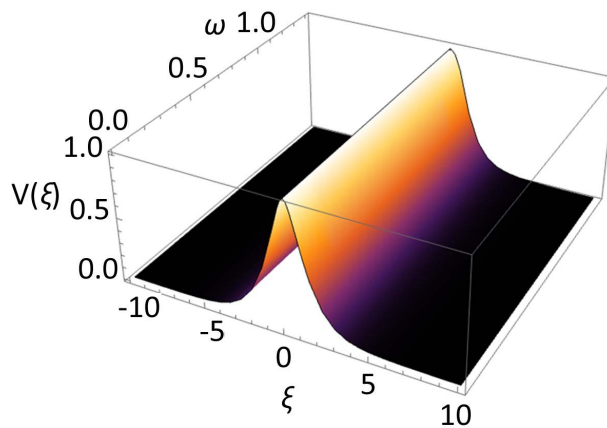


Figure 5. Three-dimensional diagram of the fourth order homotopy approximate solution with ω for a strongly nonlinear transmission line. $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1.2, h=-5$

图 5. 强非线性传输线路的 4 阶同伦近似解随 ω 变化的三维图。 $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1.2, h=-5$

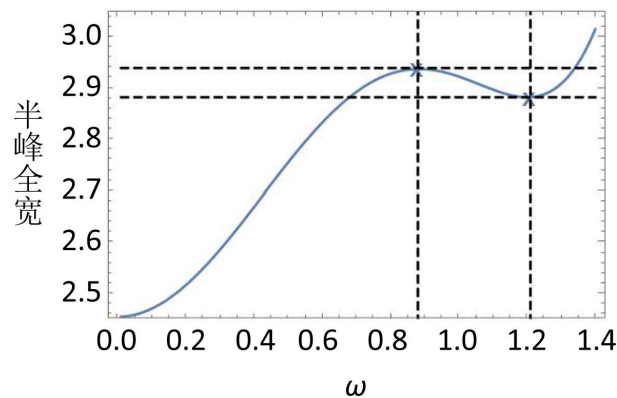


Figure 6. Full width at half maximum varies with ω . The intersection points of dashed lines in the figure are maximum coordinates $(0.876, 2.93789)$ and minimum coordinates $(1.194, 2.88284)$ respectively. $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1.2, h=-5$

图 6. 半峰全宽随 ω 的变化图像。图中虚线交叉点分别是极大值坐标 $(0.876, 2.93789)$ 和极小值坐标 $(1.194, 2.88284)$ 。 $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1.2, h=-5$

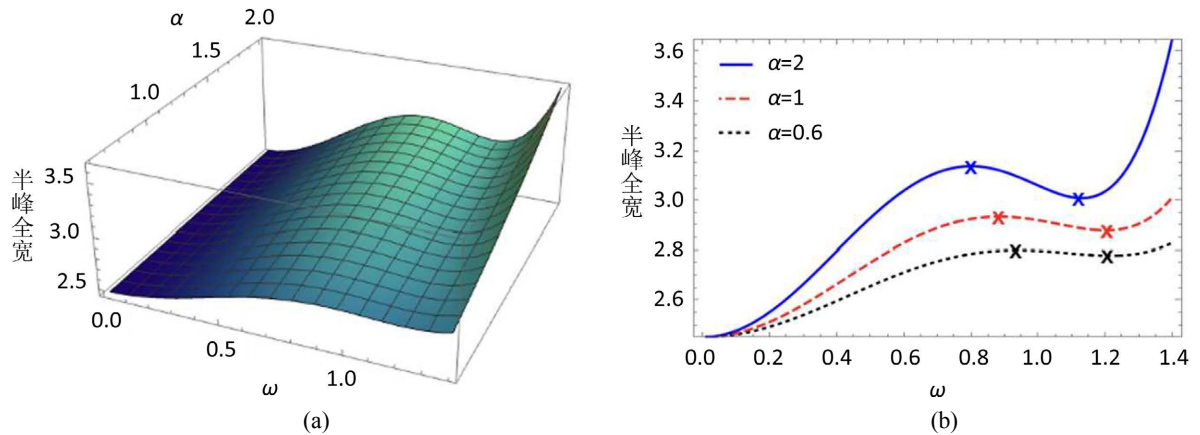


Figure 7. (a) The full width at half maximum changing with ω and α . (b) When $\alpha=0.6, \alpha=1, \alpha=2$, the change image of the full width at half maximum with ω , and the extreme value of each line has been marked in the figure. $\beta=1, \gamma=1, h=-5$

图 7. (a) 半峰全宽随 ω 和 α 的变化图像。(b) 当 $\alpha=0.6, \alpha=1, \alpha=2$ 时, 半峰全宽随 ω 的变化图像, 各线条的极值在图中已标出。 $\beta=1, \gamma=1, h=-5$

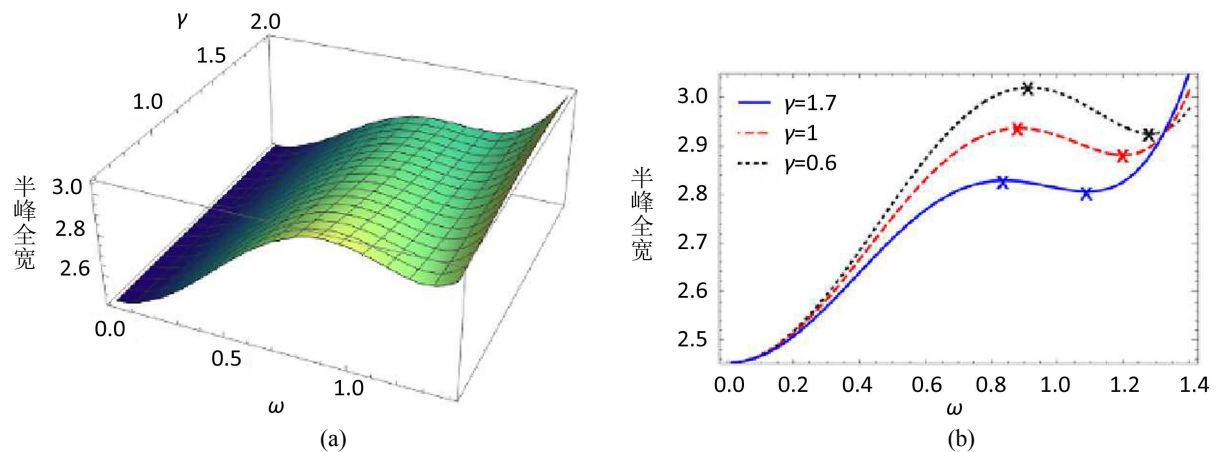


Figure 8. (a) The full width at half maximum changing with ω and γ . (b) When $\gamma=0.6, \gamma=1, \gamma=1.7$, the change image of the full width at half maximum with ω , and the extreme value of each line has been marked in the figure. $\alpha=1, \beta=1, h=-5$

图 8. (a) 半峰全宽随 ω 和 γ 的变化图像。(b) 当 $\gamma=0.6, \gamma=1, \gamma=1.7$ 时, 半峰全宽随 ω 的变化图像, 各线条的极值在图中已标出。 $\alpha=1, \beta=1, h=-5$

值, 我们演算的结果大于 3, 故不难发现, 强非线性的 NLTL 相较于弱非线性 NLTL 具有更好的窄带宽孤子。这也就意味着如果要实现让 NLTL 具有较强窄带效应的孤子行为, 那么增加 NLTL 中非线性电容的非线性效应是一个行之有效的手段。综上所述, 说明了电容与电压正相关情况下, 所得的半峰全宽变化图比负相关情况下的更加稳定, 同时, 正相关所得的孤子具有比负相关更窄的带宽, 证明了电容与电压正相关的非线性电容更加适合 NLTL。

5. 总结

找到三次及更高次项的非线性电容如何影响非线性传输线的孤子行为有重要意义。本文在针对具有三次非线性项的非线性电容各项参数及谐振参数影响非线性传输线的孤子窄带效应的研究中, 利用同伦分析法求解出了非线性传输线中的孤子解的问题, 得出了一系列关于孤子半峰全宽与电容参数和谐振参

数的变化关系。由于同伦分析法简单的收敛判断和无需依赖小参数的特性,使得我们求出的孤子解具有良好的收敛特性,本文的研究对于研究非线性传输线的孤子行为具有普遍意义,可以对相关领域的研究提供参考。

致 谢

感谢徐扬、朴圣斌和单可的有益讨论。

基金项目

本文受到国家自然科学基金项目号 11804396 的资助。

参考文献

- [1] Liu, J.G., Osman, M.S., Zhu, W.H., *et al.* (2019) Different Complex Wave Structures Described by the Hirota Equation with Variable Coefficients in Inhomogeneous Optical Fibers. *Applied Physics B*, **125**, 175. <https://doi.org/10.1007/s00340-019-7287-8>
- [2] Osman, M.S. (2019) New Analytical Study of Water Waves Described by Coupled Fractional Variant Boussinesq Equation in Fluid Dynamics. *Pramana—Journal of Physics*, **93**, 26. <https://doi.org/10.1007/s12043-019-1785-4>
- [3] Hirota, R., Hu, X.B. and Tang, X.Y. (2003) A Vector Potential KdV Equation and Vector Ito Equation: Soliton Solutions, Bilinear Bäcklund Transformations and Lax Pairs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **288**, 326-348. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.046>
- [4] Wadati, M. (1975) Wave Propagation in Nonlinear Lattice. I. *Journal of the Physical Society of Japan*, **38**, 673-680. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.38.673>
- [5] Sullivan, J.M., Twardowski, M.S., Ronald, J., *et al.* (2013) Measuring Optical Backscattering in Water. In: *Light Scattering Reviews*, Vol. 7, Springer, Berlin, 189-224. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21907-8_6
- [6] Zeng, Y. and Dai, H. (2001) Constructing N-Soliton Solution for the mKdV Equation through Constrained Flows. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**, L657. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/46/103>
- [7] Inc, M. (2007) An Approximate Solitary Wave Solution with Compact Support for the Modified KdV Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **184**, 631-637. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.062>
- [8] Wazwaz, A.M. (2007) The Extended Tanh Method for Abundant Solitary Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1131-1142. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.09.013>
- [9] Guo, Y.F., Dai, Z.D. and Li, D. (2009) New Exact Periodic Solitary-Wave Solution of MKdV Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 3821-3824. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.09.011>
- [10] Parkes, E.J. (2010) Observations on the Tanh-Coth Expansion Method for Finding Solutions to Nonlinear Evolution Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 1749-1754. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.11.037>
- [11] Zhang, J., Zhang, D. and Shen, Q. (2011) Bilinear Approach for a Symmetry Constraint of the Modified KdV Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 4494-4500. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.10.030>
- [12] Yin, J.L., Xing, Q.Q. and Tian, L.X. (2014) Complex Dynamical Behaviors of Compact Solitary Waves in the Perturbed mKdV Equation. *Chinese Physics B*, **23**, Article ID: 080201. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/23/8/080201>
- [13] Fukushima, K., Wadati, M. and Narahara, Y. (1980) Envelope Soliton in a New Nonlinear Transmission Line. *Journal of the Physical Society of Japan*, **49**, 1593-1597. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.49.1593>
- [14] Benton, E.R. and Platzman, G.W. (1972) A Table of Solutions of the One-Dimensional Burgers Equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**, 195-212. <https://doi.org/10.1090/qam/306736>
- [15] Kumar, H. and El-Ganaini, S. (2020) Traveling and Localized Solitary Wave Solutions of the Nonlinear Electrical Transmission Line Model Equation. *The European Physical Journal Plus*, **135**, 1-25. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00750-9>
- [16] Duan, W.-S., *et al.* (2002) Weakly Two-Dimensional Solitary Waves on Coupled Nonlinear Transmission Lines. *Chinese Physics Letters*, **19**, 1231. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/19/9/304>
- [17] French, D.M. and Hoff, B.W. (2014) Spatially Dispersive Ferrite Nonlinear Transmission Line with Axial Bias. *IEEE Transactions on Plasma Science*, **42**, 3387-3390. <https://doi.org/10.1109/TPS.2014.2348492>
- [18] Kuek, N.S., Liew, A.C., Schamiloglu, E., *et al.* (2013) Pulsed RF Oscillations on a Nonlinear Capacitive Transmission Line. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, **20**, 1129-1135.

<https://doi.org/10.1109/TDEI.2013.6571427>

- [19] French, D.M., Lau, Y.Y. and Gilgenbach, R.M. (2010) High Power Nonlinear Transmission Lines with Nonlinear Inductance. 2010 *IEEE International Power Modulator and High Voltage Conference*, Atlanta, 23-27 May 2010, 598-599. <https://doi.org/10.1109/IPMHVC.2010.5958429>
- [20] Kuek, N.S., Liew, A.C., Schamiloglu, E., *et al.* (2014) RF Pulse Generator Based on a Nonlinear Hybrid Line. *IEEE Transactions on Plasma Science*, **42**, 3268-3273. <https://doi.org/10.1109/TPS.2014.2302139>
- [21] Liao, S. (2004) On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **147**, 499-513. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00790-7](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00790-7)
- [22] 廖世俊, 刘曾. 同伦分析方法进展综述[J]. *力学进展*, 2019, 49(1): 237-273.
- [23] Afshari, E. and Hajimiri, A. (2005) Nonlinear Transmission Lines for Pulse Shaping in Silicon. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, **40**, 744-752. <https://doi.org/10.1109/JSSC.2005.843639>