Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(3), 873-878
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123089

Hans汉斯

基于五阶WENO格式的时间分数阶Burgers方程的多重网格方法

白慧冉*，魏英岚

长沙理工大学，数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2023年2月8日；录用日期：2023年3月4日；发布日期：2023年3月13日

摘 要

我们研究一种求解时间分数阶Burgers方程的多重网格方法。离散化过程中，时间分数阶导数采用L_1公式逼近，对流项运用Lax-Friedrichs通量近似计算。在数值实验中，在不同的γ取值下进行了有效的数值实验，结果证明该方法可以很好地模拟间断。

关键词

时间分数阶Burgers方程，多重网格法，五阶WENO格式

Multigrid Method for Time Fractional Burgers Equation Based on Fifth-Order WENO Scheme

Huiran Bai*, Yinglan Wei

Mathematical and Statistical Institute, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Feb. 8th, 2023; accepted: Mar. 4th, 2023; published: Mar. 13th, 2023

Abstract

We investigate a multigrid method for solving time-fractional Burgers equations. In the discretization process, the fractional derivative of time is approximated by the L_1 formula, and the convective term is calculated by Lax-Friedrichs flux approximation. In the numerical experiments, the

*通讯作者。

文章引用: 白慧冉, 魏英岚. 基于五阶 WENO 格式的时间分数阶 Burgers 方程的多重网格方法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 873-878. DOI: 10.12677/aam.2023.123089

effective numerical experiments are carried out under different values of γ, and the results show that the method can simulate the discontinuity well.

Keywords

Time Fractional Burgers Equation, Multiple Grid Method, Fifth Order WENO Scheme

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文考虑如下时间分数阶 Burgers 方程[1]：

$$\frac{\partial^{\gamma} u(x,t)}{\partial t^{\gamma}}+2u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0 \tag{1}$$

其中 $a\le x\le b, 0<t\le T$ 。

满足初始条件

$$u(x,0)=g(x), a\le x\le b$$

以及合适的边界条件，其中 $\gamma\in(0,1)$， $g(x)$ 为给定函数，

$$\frac{\partial^{\gamma} u(x,t)}{\partial t^{\gamma}}=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau$$

为 γ 阶 Caputo 分数阶导数， $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数。

近十年来，许多学者运用不同的数值方法对粘性时间分数阶 Burgers 方程进行了求解，例如，Duangpan 运用了有限积分法结合移位 Chebyshev 多项式[2]，Akram 等提出了有限差分格式[3]，Esen 和 Tasbozan 提出了三次 b 样条有限元搭配方法[4]等等。

2. 有限体积法离散

设 N,M 是两个正整数，定义空间步长 $h=(b-a)/N$ ，空间网格节点 $x_i=a+ih$ ，其中 $i=0,1,\cdots,N$ ；定义空间半节点 $x_{i+\frac{1}{2}}=a+(i+1/2)h\ (i=-1,0,1,\cdots,N)$，得到 $N+1$ 个有限体单元 $\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ $i=0,1,\cdots,N$ 。定义时间步长 $\Delta t=T/M$ ，时间网格节点 $t_k=k\Delta t$ ，其中 $k=0,1,\cdots,M$ 。对于函数 $\mathbb{F}$ ，使用如下简写形式：

$$\mathbb{F}_{i+\frac{1}{2},n}=\mathbb{F}\left(x_{i+\frac{1}{2}},t_n\right), \mathbb{F}_{i+\frac{1}{2}}=\mathbb{F}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

在 $t=t_n$ 处计算式(1)并在单元 $\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ 上对方程进行积分，得到

$$h\frac{\partial^{\gamma}\bar{u}_i(t_n)}{\partial t^{\gamma}}+\left(f(u)_{i+\frac{1}{2},n}-f(u)_{i-\frac{1}{2},n}\right)=0, i=0,1,\cdots,N \tag{2}$$

其中 $\bar{u}_i(t)=\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t)\mathrm{d}x/h$ 表示 $u(x,t)$ 在区间 $\left(x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ 上的平均值。

令 U_i^n 表示 $\bar{u}_i(t_n)$ 的数值近似，对式(2)的等式左端第一项运用 L_1 公式逼近[5]，取 $a_k=(k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}$：

$$h\frac{\partial^\gamma \bar{u}_i(t_n)}{\partial t^\gamma}\bigg|_{t_n}\approx\frac{h\Delta t^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\left(U_i^n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_i^k-a_{n-1}U_i^0\right). \tag{3}$$

其中(2)式中的通量近似为

$$f(u)_{i+\frac{1}{2},n}\approx F\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-},U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}\right) \tag{4}$$

$$f(u)_{i-\frac{1}{2},n}\approx F\left(U_{i-\frac{1}{2}}^{n,-},U_{i-\frac{1}{2}}^{n,+}\right) \tag{5}$$

结合式(2)、(3)、(4)及(5)，可以得到最终的离散形式为

$$\frac{h\Delta t^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\left(U_i^n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_i^k-a_{n-1}U_i^0\right)+F\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-},U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}\right)-F\left(U_{i-\frac{1}{2}}^{n,-},U_{i-\frac{1}{2}}^{n,+}\right)=0. \tag{6}$$

(6)式中的 $F\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-},U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}\right)$ 是 Lax-Friedrichs 通量，即

$$F\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-},U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}\right)=\frac{f\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}\right)+f\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}\right)}{2}-\frac{\gamma}{2}\left(U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}-U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}\right). \tag{7}$$

其中，取 γ 为 $\gamma=\kappa\max_w\left|f'(w)\right|$，$U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}$，$U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 分别表示在节点 $x_{i+1/2}$ 上的左近似与右近似，对于左近似和右近似，在下一节中将详细阐述。

3. 5 阶 WENO 格式

对于上一节中的左近似与右近似：$U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}$，$U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$，我们用 5 阶 WENO 格式重构近似计算，该算法是将 $U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}$ 和 $U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 分别利用一系列偏左、右侧的点值重构得到的。经典的五阶 WENO 格式如图 1 所示。

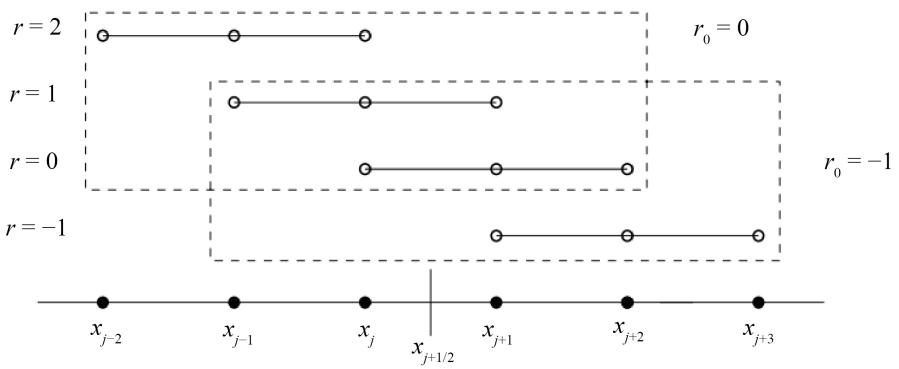

Figure 1. The model of the fifth-order WENO scheme
图 1. 5 阶 WENO 示意图

$U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}$ 是利用图 1 一系列偏左侧的点重构得到的(即图 1 中的 $r_0=0$)，$U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 是利用图 1 一系列偏右侧的点重构得到的(即图 1 中的 $r_0=-1$)，这里 r_0 表示 r 的初始点。为了简化描述，在不引起混淆的情况下，省去 $U_{i+\frac{1}{2}}^{n,-}$ 和 $U_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 的上标“+”，“−”和“n”。$U_{i+\frac{1}{2}}$ 的五阶 WENO 重构可表示为：

$$U_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{r=r_0}^{2+r_0}\omega_r^{r_0}U_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} \tag{8}$$

(8)式中的 $U_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ 可写为 $U_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}=\sum_{j=0}^{2}c_{jr}^{3}\bar{U}_{i-r+j}$，非线性权重 $\omega_r^{r_0}$ 为

$$\omega_r^{r_0}=\frac{\sigma_r}{\sum_{s=0}^{2}\sigma_s},\sigma_r=\frac{d_r^{r_0}}{\left(\varepsilon+\beta_r\right)^2} \tag{9}$$

其中，$\varepsilon\ll 1$，通常取 $\varepsilon=10^{-6}$，$d_r^{r_0}$ 是线性权重。上述中系数 c_{jr}^{3} 和 $d_r^{r_0}$ 的选取可参见文献[6]。

光滑指示因子 β_r 可以表示为：

$$\begin{cases}\beta_0=\frac{13}{12}\left(\bar{U}_i-2\bar{U}_{i+1}+\bar{U}_{i+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3\bar{U}_i-4\bar{U}_{i+1}+\bar{U}_{i+2}\right)^2,\\ \beta_1=\frac{13}{12}\left(\bar{U}_{i-1}-2\bar{U}_i+\bar{U}_{i+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\bar{U}_{i-1}-\bar{U}_{i+1}\right)^2,\\ \beta_2=\frac{13}{12}\left(\bar{U}_{i-2}-2\bar{U}_{i-1}+\bar{U}_i\right)^2+\frac{1}{4}\left(\bar{U}_{i-2}-4\bar{U}_{i-1}+3\bar{U}_i\right)^2.\end{cases}$$

4. 多重网格方法

本文使用多重网格迭代方法，由于空间系统是强非线性的，我们将使用非线性多重网格方法——FAS 多重网格方法[7]。

假设三个正整数 $N,N_0,level$ 满足式：

$$N=N_0\times 2^{level-1}$$

构建一个空间网格体系 $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{level}$，假设最细网格 Γ_1 的网格大小为 $h_1=h$，对于 $k=2,3,\cdots,level$，Γ_k 的网格大小为 $h_k=2^{k-1}h$，其中 $N_k=N/2^{k-1}$ 表示 Γ_k 的网格数量，下文中与 Γ_k 有关的量以上标 h_k 的形式书写，例如 U^{h_k}。

在每一层网格上，对问题采用如下不动点迭代方法求解：

$$\left(\frac{h_k\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\lambda^{h_k}h_k\right)\hat{V}_i^{h_k}=r_i^{h_k}+\lambda^{h_k}h_k\tilde{V}_i^{h_k}-\left(F\left(\tilde{V}_{i+\frac{1}{2}}^{h_k,-},\tilde{V}_{i+\frac{1}{2}}^{h_k,+}\right)-F\left(\tilde{V}_{i-\frac{1}{2}}^{h_k,-},\tilde{V}_{i-\frac{1}{2}}^{h_k,+}\right)\right), \tag{10}$$

其中 $r_i^{h_k}=\frac{h_k\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1}-a_{n-k}\right)\tilde{V}_i^k+a_{n-1}\tilde{V}_i^0\right)$，$\hat{V}^{h_k}$ 和 $\tilde{V}^{h_k}$ 分别为一次迭代过程中的新近似解和旧近似解，λ^{h_k} 为一个能够保证迭代方法收敛性的合适的正数。

下面提出求解方程的两层多重网格迭代方法，我们定义延拓和限制算子来实现相邻网格之间的数据传输，其中，延拓算子定义为 I_{2h}^{h}，即

$$U^h=I_{2h}^{h}U^{2h}$$

定义为：

$$\begin{cases} U_{2i}^{h} = U_{i}^{2h} \\ U_{2i+1}^{h} = \frac{1}{2}\left(U_{i}^{2h} + U_{i+1}^{2h}\right) \end{cases}$$

限制算子定义为 I_h^{2h}，即

$$U^{2h} = I_h^{2h} U^h$$

定义为：

$$U_i^{2h} = \frac{1}{4}\left(U_{2i-1}^{h} + 2U_{2i}^{h} + U_{2i+1}^{h}\right)$$

以下提出求解方程的多重网格迭代方法步骤：

步 1：在细网格上运用(8)式计算离散方程 $A\left(u^h\right) = f^h$，一般迭代次数为 2~3 次；

步 2：细网格上的残差和近似解均限制到粗网格上，并求解细网格上离散方程:

$$A^{2h}\left(u^{2h}\right) = A^{2h}\left(I_h^{2h}\bar{u}^h\right) + I_h^{2h}\left(f^h - A^h\left(\bar{u}^h\right)\right) = f^{2h}$$

步 3：作粗网格修正：

$$\bar{\bar{u}}^h \leftarrow \bar{u}^h + I_{2h}^{h}\left(\bar{\bar{u}}^{2h} - \bar{u}^{2h}\right).$$

5. 数值实验

算例 1　令计算域为 $[a,b]\times(0,T] = [-1,3]\times(0,0.2]$，初始条件为 $u(x,0) = -\sin(\pi x)$，边值条件为 $u(a) = u(b) = 0$，取 $N = 256$，$M = 100$，当 $\gamma = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$ 时方程(1)的数值解如下图 2：

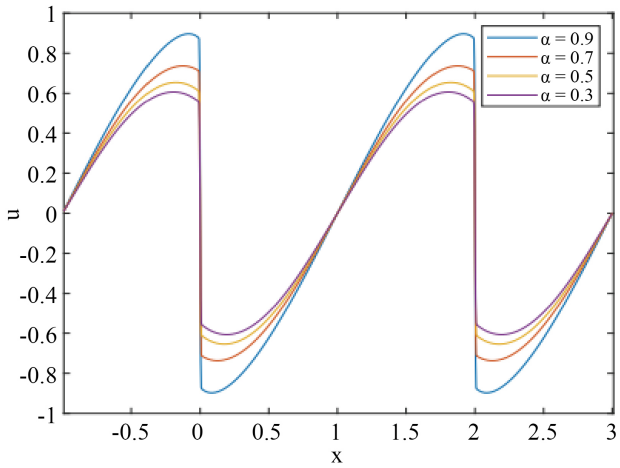

Figure 2. Numerical results of example 1
图 2. 算例 1 的数值结果

算例 2　令计算域为 $[a,b]\times(0,T] = [-1,2]\times(0,0.2]$，初始条件为 $u(x,0) = \begin{cases} 0, x \ge 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$，边值条件为 $u(a) = 1, u(b) = 0$，取 $N = 256, M = 128$，当 $\gamma = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$ 时方程(1)的数值解如下图 3：

根据图 2 和图 3，我们可以看出：算例 1 中的初始条件是连续函数，随着时间的推进，数值解演化成激波；算例 2 中的初始条件是分段函数，然而随着时间的推进，数值解演化成稀疏波。

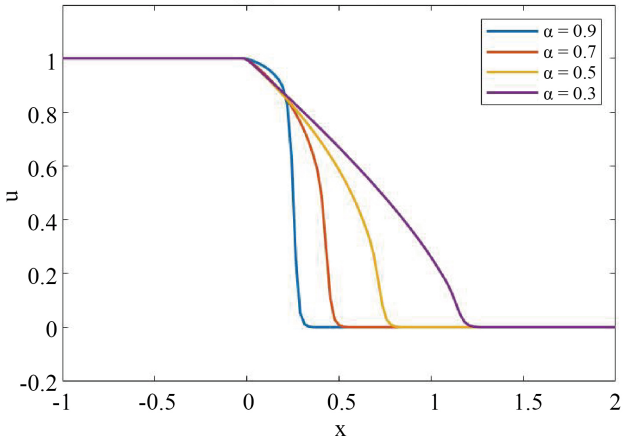

Figure 3. Numerical results of example 2
图 3. 算例 2 的数值结果

6. 总结

本文运用多重网格迭代方法求解时间分数阶 Burgers 方程，对于对流项中的通量，我们运用 Lax-Friedrichs 通量近似计算，并对于通量中的左近似和右近似采用 5 阶 WENO 格式重构近似。文中计算了两个算例在 $\gamma = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$ 时方程的数值解，可以看出该方法模拟间断的效果很好。

参考文献

[1] Chen, L., Lü, S. and Xu, T. (2021) Fourier Spectral Approximation for Time Fractional Burgers Equation with Non-smooth Solutions. *Applied Numerical Mathematics*, **169**, 164-178. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.05.022

[2] Duangpan, A., Boonklurb, R. and Treeyaprasert, T. (2019) Finite Integration Method with Shifted Chebyshev Polynomials for Solving Time-Fractional Burgers' Equations. *Mathematics*, **7**, 1201. https://doi.org/10.3390/math7121201

[3] Akram, T., Abbas, M., Riaz, M.B., *et al.* (2020) An Efficient Numerical Technique for Solving Time Fractional Burgers Equation. *Alexandria Engineering Journal*, **59**, 2201-2220. https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.01.048

[4] Esen, A., Bulut, F. and Oruç, Ö. (2016) A Unified Approach for the Numerical Solution of Time Fractional Burgers' Type Equations. *The European Physical Journal Plus*, **131**, 1-13. https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16116-5

[5] Langlands, T.A.M. and Henry, B.I. (2005) The Accuracy and Stability of an Implicit Solution Method for the Fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **205**, 719-736. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.11.025

[6] Hesthaven, J.S. (2017) Numerical Methods for Conservation Laws: From Analysis to Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611975109

[7] Briggs, W.L., Henson, V.E. and McCormick, S.F. (2000) A Multigrid Tutorial. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898719505