

不含给定圈长的平面图的 DP-染色

连钟勇

浙江师范大学, 数学与计算机科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2023年2月11日; 录用日期: 2023年3月6日; 发布日期: 2023年3月14日

摘要

DP-染色的概念最初被用于证明不含长为4到8短圈的平面图是3-列表可染的, 并且这个结论解决了部分 Erdős 提出的弱化的列表染色版本的 Steinberg 猜想的部分答案, 之后, DP-染色作为列表染色的推广, 在染色的研究中受到越来越多的关注. 对于列表染色的研究持续了几十年, 平面图的 3-可选和 4-可选问题都属于 NP-困难问题, 基于此, 近些年我们开始研究在满足已知的某些构型的平面图是 3-可选或 4-可选的基础上, 探讨其是否为 DP-3-可染的或 DP-4-可染的. 在这篇文章里, 我们证明了所有不含圈长为 4, 5, 7, 10 的圈的平面图是 DP-3-可染的, 拓展了 DP-3-可染的图的范围.

关键词

S-k-染色, DP-染色, 平面图, 权转移

DP-Coloring of Planar Graph without Given Short Cycle

Zhongyong Lian

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 11th, 2023; accepted: Mar. 6th, 2023; published: Mar. 14th, 2023

Abstract

The concept of DP-coloring was initially used to prove that a planar graph without cycle of length from 4 to 8 is 3-list-coloring, and this conclusion solves the partial problems of the Steinberg conjecture of the weakened list coloring version proposed by Erdős. As a generalization of list coloring, DP-coloring has received more and more attention in the study of coloring. The research on list coloring has lasted for decades, and the 3-choosable and 4-choosable problems of planar graphs belong to NP-difficult problems. Based on this, in recent years, we have begun to study whether planar graphs satisfying some configurations are DP-3-colorable or DP-4-colorable; moreover, whether they are DP-3-colorable or DP-4-colorable. In this thesis, we prove that all planar graphs without cycles of length 4, 5, 7, 10 are DP-3-colorable, which extends the range of graphs that satisfy DP-3-colorable.

Keywords

S-k-Coloring, DP-Coloring, Planar Graph, Charge-Transfer

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

本文所考虑的图是有限的并且简单的. 如果一个图可以嵌入到欧几里得平面中, 那么称它为一个平面图. 平面图的三染色问题是图的染色理论中的一个重要课题. 经典的 Grötzsch 定理 [1] 指出: 无三角形的平面图是 3 色可染. 著名的 Steinberg 猜想为: 不含有圈长为 4 或 5 的平面图是 3 色可染的. 该猜想一直吸引着平面图三染色问题的广泛研究. 令人意外的是, Steinberg 猜想 [2] 近些年被证明不成立.

图的 DP-染色的定义 (也称为对应染色) 是由 Dvořák 和 Postle 提出的 [3], 他们用它来证明每个不含圈长度从 4 到 8 的平面图是 3-列表-可染的 (即 3-可选). 目前, 图的 DP-染色作为一个独立的染色课题受到越来越多的研究关注.

图的 DP- k -可染性强于图的列表 k -可染性, 因此很自然地考虑一些经典的列表 3-染色定理 (更

进一步, 三染色定理) 能否加强为 $DP-3$ -可染. Erdős 关于 Steinberg 猜想的弱化问题的 DP 染色版本叙述如下:

问题 1.1 求最小的正整数 k ($k \geq 5$), 使得命题“所有不含长度为 4 到 k 的圈的平面图都是 $DP-3$ -可染的”成立?

文献 [4] 和 [5] 的结果都表明上述的 k 存在并且 $k \leq 9$. 而是否 $k \leq 8$, 即“所有不含长度为 4 到 k 的圈的平面图都是 $DP-3$ -可染的”是否成立, 仍旧是一个开放性问题.

染色问题上已经取得了对平面图加上一些在短圈上的限制的 $DP-3$ -染色的部分成果. 例如, 不含相交的三角形也不含长为 $\{4, 5, 6, 7\}$ [6] 的圈的平面图是 $DP-3$ -可染的; 不含相邻的三角形也不含长为 $\{5, 6, 9\}$ 的圈的可平面图是 $DP-3$ -可染的; 不含长为 $\{3, 5, 6\}$ [5] 或者 $\{3, 6, 7, 8\}$ [5] 或者 $\{4, 5, 6, 9\}$ [5] 或者 $\{4, 5, 7, 9\}$ [5] 或者 $\{4, 6, 8, 9\}$ [4] 或者 $\{4, 7, 8, 9\}$ [4] 长的圈的平面图是 $DP-3$ -可染的.

在本文中, 我们研究一类不含四种长度的圈的平面图的 $DP-3$ -染色问题. 上述结果证明了一些不含 $\{4, i, j, 9\}$ 长的圈的平面图是 $DP-3$ -可染的, 其中 $4 < i < j < 9$. 本文考虑如下类似问题:

问题 1.2 对于哪些整数对 (i, j) , 其中 $4 < i < j < 10$, 不含有圈长属于 $\{4, i, j, 10\}$ 的圈的平面图都是 $DP-3$ -可染的?

到目前为止, 关于这个问题还没有已知的结果. 下面的定理是本文的主要结果, 它证实了问题 1.2 的一个情况.

定理 1.3 所有不含长为 4, 5, 7 或 10 的圈的平面图都是 $DP-3$ -可染的.

2. S -染色的基本概念

定义 2.1 假设 G 是一个图, S 是一些正整数的排列构成的集合. 若 D 是 G 的一个方向, 映射 $\sigma: E(D) \rightarrow S$ 分配给 D 的每条有向边 e 一个 S 里的排列 σ_e , 则有序对 (D, σ) 称作 G 的一个 S -标记, σ 称作 G 的一个符号配置, σ_e 称作 e 的符号. (D, σ) 也称为一个 S -标记图. 设映射 $f: V(G) \rightarrow [k] = \{1, 2, \dots, k\}$. 若对于 D 的每条有向边 $e = (x, y)$, 有 $\sigma_e(f(x)) \neq f(y)$, 则称 f 为 (D, σ) 的一个 k -染色. 如果图 G 的每一个 S -标记图都是 k -可染的, 那么称 G 是 $S-k$ -可染的. 图 G 的 S -色数是指满足 G 是 $S-k$ -可染的 k 的最小值.

Jin、Wong 和 Zhu [7] 提出了图的 $S-k$ -染色的概念. 它是许多重要染色概念的推广, 包括 k -染色、符号 k -染色、符号 Z_k -染色、 $DP-k$ -染色、群染色和增益图的染色. 特别地, 如果取 S 作为所有整数排列的集合, 那么 $S-k$ -染色等价于图的 $DP-k$ -染色.

令 S_k 表示集合 $[k] = 1, 2, \dots, k$ 上的所有排列的集合, 令 $S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, 其中 id 为恒等排列. 对于一个图的 $S-k$ -染色, 由于颜色集是 $[k]$, 所以集合 S 可以被限制在 $[k]$ 上的部分排列. 因此, $DP-k$ -染色相当于 S_k-k -染色. 因此, 定理 1.3 可以重新表述如下.

定理 2.1 所有不含长为 4, 5, 7 和 10 的圈的平面图是 S_3-3 -可染的.

给定一个 S_k -标记图 (D, σ) . 用一个符号 $s \in S_k$ 转换一个点 u 定义了另一个标号 σ' 如下:

$$\sigma'_e = \begin{cases} s \circ \sigma_e, & \text{若 } e = (u, v); \\ \sigma_e \circ s^{-1}, & \text{若 } e = (v, u); \\ \sigma_e, & \text{否则.} \end{cases}$$

如果一个 S_k -标记图可以从另一个 S_k -标记图通过一系列转换得到, 则称这两个标记图是等价转换的. 显然, 两个转换等价的 S_k -标记图具有相同的 S_k -色数. 如果一条边的符号为 id , 则称它为正边, 否则称为负边. 如果一个圈的所有边都是正的, 那么称它为全正的. 如果一个圈可以等价转换为全正的圈, 那么称这个圈为正圈; 否则称为负圈.

2.1. 符号及其定义

我们记 G 为不含长为4, 5, 7, 10的圈的连通平面图(给定平面嵌入)的集合.

定义 2.2 令 C 为图 $G \in G$ 中的一个圈. 如果 C 内部的一个顶点 v 有三个邻点 v_1, v_2, v_3 在 C 上, 那么 $G[\{vv_1, vv_2, vv_3\}]$ 称为 C 的一个爪型. 如果一个14-圈没有爪型, 那么称它为一个好圈; 否则称它为一个坏圈.

一个圈 C 被它的爪型所划分成的每个小圈被称为室. 设 c_i 为一个室的长度. 我们进一步称之为 (c_1, c_2, c_3) -爪型. 如图 1:

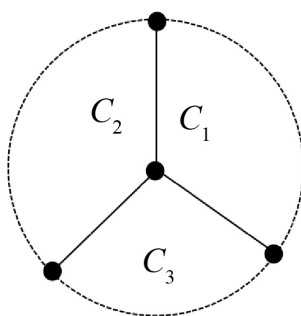


Figure 1. (c_1, c_2, c_3) -claw

图 1. (c_1, c_2, c_3) -爪型

根据坏圈的定义, 我们可以很容易地得出以下引理.

引理 2.2 如果 C 是 G 中图的一个坏圈, 那么 $|C| = 13$, 并且 C 有一个 $(3, 8, 8)$ -爪型.

本节的其余部分是定理2.1的证明所需的其他符号.

在一个平面图 G 上, 如果一个顶点位于无界定的面的边界上, 则我们称它为外部的; 否则它是内部的. 对于一个圈 C , 令 $int(C)$ 和 $ext(C)$ 分别表示 C 的内部和外部的顶点集合. 如果一个面的所有点都是内部的(外部的), 那么这个我们称这个面是内部的(外部的). 一个圈 C 如果满足 $int(C)$ 和 $ext(C)$ 都非空, 则我们称这个圈为分离圈.

如果两个面有共同的边, 则我们称它们是相邻的. 路径 P 或圈 C 的长度, 我们用 $|P|$ 或 $|C|$ 表示, 它们分别为 P 与 C 的边数. 我们用 $d(f)$ 表示一个平面图的面 f 的大小. 设 k 为一个正整数. k -顶点 (分别地, k^+ -顶点和 k^- -顶点) 表示的是一个满足 $d(v) = k$ 的顶点(分别地有, $d(v) \geq k$ 和 $d(v) \leq k$). 相类似的概念被应用于路径, 圈和面, 其中 $d(v)$ 分别被 $|P|$, $|C|$ 和 $d(f)$ 取代. 如果 v 与 P 的一个末端顶点相邻, 则我们称路径 P 和一个顶点 $v \in V(P)$ 相邻. k -串是一条包含 k 个2度点的路径, 并且它与2度点不相邻. 设 d_1, d_2, d_3 是三个整数, 它们满足 $3 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3$. 一个 (d_1, d_2, d_3) -面是一个包含顶点 v_1, v_2, v_3 的3-面, 其中对于每一个 $i \in \{1, 2, 3\}$, v_i 是一个内部的, 度为 d_i 的点.

设 $p = u_1u_2u_3u_4$ 为平面图的一条路. 如果 p 的所有点都是度为3的内点, 并且满足以下条件其中的一条, 那么称 p 是一条好路:

1. 路径 p 不属于某个面的边界, 且边 u_1u_2 和 u_3u_4 均关联一个正的三角形 $[u_2u_1v]$ 和 $[u_3u_4w]$.
2. 路径 p 属于某个面的边界, 且边 u_1u_2 关联一个正的三角形.

一个 A -点是一个3-内点, 并且它属于一个内部的3-面; 一个 B -点是一个4-内点, 并且它和两个3-面相关; 一个 C -点是一个内点, 并且它既不是 A -点, 也不是 B -点; 一个 D -点是一个外点, 如果它和一个三角形 T 相关, 我们将这个点记为 D_1 -点, 特别地, 如果三角形 T 有一条边在未界定的面的边界上并且它有一个3-内点, 那么我们称三角形 T 为特殊三角形.

3. 定理2.1的证明

定理 3.1 令 (D, σ) 是一个图 $G \in G$ 的 S_3 -标记图. 如果 G 的无界定面 f_0 的边界是个好圈, 那么 $(D[V(f_0)], \sigma)$ 的任意3-染色可以延拓到 (D, σ) , 即可以扩展到 (D, σ) 的一个3-染色.

从定理3.1可以推导出定理2.1. 假设存在非 S_3 -3-可染的图 $G \in G$. 故 G 有非3-可染的 S_3 -标号图 (D, σ) . 我们知道围长至少为5的平面图是 DP -3-可染的, 因此 D 有3-圈 C . 任取 C 的一个3-染色 ϕ . 由引理2.2, 我们知道 C 是好圈. 那么, 由定理3.1, 我们可以将 ϕ 延拓到 $(ext(C), \sigma)$ 和 $(int(C), \sigma)$.

我们将用反证法来证明定理3.1. 令 G 是定理3.1的一个极小反例, 它满足 $\sigma(G) = |V(G)| + |E(G)|$ 取最小值. 我们可以假设 f_0 的边界 U 是一个好圈, ϕ_0 是 $(D[V(f_0)], \sigma)$ 的一个3-染色, 但是该染色不能延拓到整个 (D, σ) .

3.1. 结构性质

引理 3.2 G 不含分离的好圈.

证明: 如果 C 是 G 的分离好圈, 那么由 (D, σ) 的极小性, 我们可以将 ϕ_0 延拓到 $(D - int(C), \sigma)$, 然后将 C 的染色延拓到 $(int(C), \sigma)$. 这样 ϕ_0 就延拓到整个 (D, σ) 上, 这与我们的假设矛盾.

引理 3.3 G 是二连通的.

证明: 否则, 我们可以假设 D 有一个块 B 和一个割点 $v \in V(B)$. 通过 (D, σ) 的极小性, 我们可以将 ϕ_0 延拓到 $(D - V(B - v), \sigma)$. 令 f 为 B 的包含点 v 的一个面, 并且 $d(f)$ 取到最小值. 如果 $d(f) \leq 12$, 那么由引理2.2, 我们可以推断出 f 的边界是一个好圈. 因此, 由 (D, σ) 的极小性, v 的染色可延拓

到 (f, σ) , 并进一步延拓到 (B, σ) . 此外, 如果 $d(f) \geq 13$, 那么 v 在 f 边界上的两个邻点之间插入一条 f 内部的有向边 e , 得到一个3-面 T . 显然, $B + e \in G$. 类似的, 由 (D, σ) 的极小性, 我们可以延拓 v 的染色到 (T, σ) 并且进一步延拓到 $(B + e, \sigma)$ 上. 在上述两种情况下, (D, σ) 的最终染色都是由 ϕ_0 延拓得到, 这与我们定理的假设矛盾.

引理 3.4 G 的内点的度至少为3.

证明: 如果 G 中存在一个度最高为2的内点 v , 那么我们可以通过 (D, σ) 的极小性将 ϕ_0 延拓到 $(D - v, \sigma)$, 并且很显然可以进一步延拓到 (D, σ) .

备注 3.5 如果 (D, σ') 是一个 S_3 -标记图, 并且它转换等价于 (D, σ) , 那么 (D, σ') 也是定理3.1的一个极小反例.

引理 3.6 (D, σ) 不含负的 $(3, 3, 3)$ -面.

证明: 假设该引理不成立, $v_1v_2v_3$ 是一个在 G 中的负的 $(3, 3, 3)$ -面, 并且对于 $i \in [3]$, $u_i \in N(v_i)$ 并且 $u_i \neq v_i$. 由备注 3.5, 我们可以假设 $u_1v_1v_2u_2$ 和 $v_1v_3u_3$ 的边均为正的. 由题意, v_2v_3 为负边. 由于 (D, σ) 的极小性, $(D - \{v_1, v_2, v_3\}, \sigma)$ 有一个 3-染色 ϕ , 那么我们可以通过以下方式将染色 ϕ_0 延拓到 G .

若 $\exists i \in \{2, 3\}$, $\phi_0(u_1) \neq \phi_0(u_i)$, 不失一般性, 设 $i = 2$, 那么我们用颜色 $\phi_0(u_1)$ 去染 v_2 , 接着我们再按照 $v_3 \rightarrow v_1$ 的顺序将剩下的点染好, 则整个图 G 就染好了. 所以, $\phi_0(u_1), \phi_0(u_2), \phi_0(u_3)$ 必染同一颜色, 不妨设为颜色 1. 因为 v_2v_3 为负边, 所以其两端点颜色同时染成 2 或者同时染成 3, 必有一种情况与该边符号不冲突. 最后, v_1 还有一个可用颜色.

引理 3.7 对于任意给定满足 $3 \leq k \leq 14$ 的整数 k 和满足 $t \geq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ 的整数 t , 图 G 的任意 k -面 (f_0 除外) 的边界都不包含 t -串.

证明: 反证法. 假设 G 有一个面 f , 它的边界 C 包含了一个 t -串 L . 令 $D' = D - V(L)$ 并且 $U' = U \cup C - V(L)$. 我们首先将 ϕ_0 延拓到 $U \cup C$. 我们注意到 U' 是 D' 里无界定面的边界, 并且 $|D'| = |D| - |V(L)| + (|C| - 2 - |V(L)|) \leq |D| + k - 2 - 2\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \leq |D|$. 因此, U' 得到的染色可以延拓到 (D', σ) . 这与我们的假设 ϕ_0 不能延拓到 (D, σ) 矛盾.

引理 3.8 (D, σ) 不包含两个相交的 $(3, 3, 4)$ -面.

证明: 否则, 我们设 $[uvw]$ 和 $[wxy]$ 是相交于点 w 处的两个 $(3, 3, 4)$ -面. 由于 G 不含有 4 圈, 所以这两个 3-面不相邻, 因此, w 必定是度为 4 的点. 设 u', v', x', y' 分别是 u, v, x, y 的剩下那个邻点 (即不在这两个 3-面上的邻点). 通过备注 3.5, 我们可以选择 (D, σ) , 使 $u'uvwv'$ 和 $x'wxyy'$ 上的边都为正的. 我们不妨假设 u', x' 不包含在同一个面上. 通过从 (D, σ) 中删除点 u, v, w, x, y 并且将点 u' 与点 x' 进行一个粘点的操作, 我们得到一个新图 (D', σ') . 记 D' 的底图为 G' . 我们将证明染色 ϕ_0 可以延拓到 (D', σ') 上, 即满足定理的归纳条件.

首先, 需要验证上述图操作不会产生新的 k -圈 ($k \leq 10$), 故 $G' \in G$. 如果产生一个新的 k -圈, 那么这个 k -圈对应的是图 G 里的一条 u' 和 x' 之间的 k -路径, 它与路径 $u'uwxx'$ 组合形成一个 $(k + 4)$ -圈, 我们记这个圈为 C . 根据图的平面性, 点 v 和点 y 其中一个位于 C 内, 另一个位于 C 外. 因此, C 是一个分离的好圈, 这与引理 3.2 相矛盾.

其次, 需要验证染色 ϕ_0 在 D' 中仍正常. 对于上述图操作, 只需排除两种情况: 1) 点 u' 和 x' 均是 G 的外点; 2) u' 和 x' 其中一个为外点, 且另一个为内点但有一个邻点为外点. 对于情况1, U 被 u', x' 划分成了两条路径 P_1 和 P_2 . 由于 $|V(f_0)| \leq 14$, 那么 P_1 或者 P_2 中的一条路与路径 $u'uwxx'$ 相结合是一个 11^- -圈. 显然, 该圈是好圈且分离了点 v 和点 y , 这与引理3.2相矛盾. 对于情况2, 不妨假设 u' 是 G 的一个内点. 记 u'' 是 u' 的一个在 U 上的邻点. 注意到 $u'', x' \in V(U)$, 通过类似于情况1的讨论可得矛盾.

我们还需要验证的是 U 是 G' 的一个好圈. 假设与之相反地, U 是 G' 的一个坏圈, 也就是说, U 包含了一个爪型, 记为 H . 因为 $G' \in G$, 由引理2.2, H 为 U 的 $(3, 8, 8)$ -爪. 记 t 为粘合 u' 和 x' 得到的点. 因为 u' 和 x' 不同时为外点, 故 t 在 H 上, 那么与 t 关联的 H 的两个室均为新产生. 显然, 这两个室至少有一个圈长为8, 即上述图操作新产生一个8-圈, 矛盾.

由 (D, σ) 的极小性, ϕ_0 可延拓到 (D', σ') 并且如下操作对剩余点染色, 更进一步地延拓到 (D, σ) 上: 将点 w 染上和点 u' 同样的颜色, 那么我们可以将点 v 和 u 依次染好, 点 y 和 x 也可依次染好.

我们得出结论 ϕ_0 可以延拓到整个 (D, σ) , 这与我们的假设矛盾.

引理 3.9 G 不包含好路.

证明: 反证. 假设 G 有一条好路 $p = u_1u_2u_3u_4$.

情况 1: 边 u_1u_2 和 u_3u_4 分别被包含于正的三角形 $[u_2u_1v]$ 与 $[u_3u_4w]$ 中.

令 u_0 和 u_5 分别为 u_1 和 u_4 的于结构外的邻点. 通过转换, 我们可以选择与点 u_1, u_2, u_3 或 u_4 相关联的边均为正边. 接着, 我们删去 p 上所有的点并且在 u_0 和 u_5 之间添加一条正边. 这样从 (D, σ) 得到一个新的 S_3 -标号平面图, 记作 (D', σ') . 我们将证明染色 ϕ_0 可以延拓到 (D', σ') 上, 即满足定理的归纳条件.

首先, 验证上述图操作不会产生新的 k -圈($k \leq 10$), 故 $D' \in G$. 否则, 将该 k -圈上的边 u_0u_5 用路径 $u_0u_1 \dots u_5$ 替换可以得到一个 $(k+4)$ -圈, 记作 C . 这里要注意的是点 v, w 不可能是圈 C 上的点. 否则的话, 不妨假设 $v \in V(C)$, 那么圈 C 的两个弦 vu_1 和 vu_2 将圈 C 划分成了一个3-圈和一个 11^+ -圈以及一个 8^+ -圈, 这与事实 $|C| \leq 14$ 矛盾. 因此, 对于点 v 和 w , 一个位于圈 C 的内部, 另外一个位于圈 C 的外部. 故 C 是一个分离好圈, 矛盾.

其次, 验证染色 ϕ_0 在 D' 中仍正常. 对于上述图操作, 只需验证点 u_0 和 u_5 不均是 G 的外点. 否则, u_0 和 u_5 将 U 划分成两条路径 P_1 和 P_2 . 总存在其中一条路径和新边 u_0u_5 组成一个 8^- -圈, 该圈是新产生的, 矛盾.

最后, 验证 U 在 D' 中也是好圈. 反证, 令 H 是 D' 中的 U 的一个爪型. 由于 D 没有爪型, 容易推出 u_0, u_5 和爪型有关. 因此我们不妨假设 u_0 是一个内点并且 u_0 有三个在 U 上的邻点, 其中包括 u_5 . 记 u', u'' 为另外两个邻点. 由于 $|V(U)| \leq 14$, 那么 u', u'', u_5 将 $V(U)$ 分成了三条路径, 其中至少有一条以 u_5 为端点的路径其长度至多为8. 上述图操作将产生一个新的 9^- -圈, 矛盾.

由于 G 的极小性, 染色 ϕ_0 可以延拓到 (G', σ') , 并通过如下染色进一步延拓到 (G, σ) : 记 ϕ 为 G' 得到的染色. 如果 $\phi(u_0) \neq \phi(v)$ 并且 $\phi(u_5) \neq \phi(w)$, 那么我们将 u_0 的颜色染给 u_2 , u_5 的颜色染给 u_3 . 那么接下来 u_1 和 u_4 也显然可以染好. 如果 $\phi(u_0) = \phi(v)$, 那么显然可以按 u_4, u_3, u_2, u_1 的顺序将染色延

拓到 G 上. 如果 $\phi(u_5) = \phi(w)$, 那么显然可以按 u_1, u_2, u_3, u_4 的顺序将染色延拓到 G 上.

情况 2: 路径 p 在一个面的边界上, 并且边 u_1u_2 关联一个三角形 $[u_2u_1v]$.

令 u_0 和 w 分别表示 u_1 和 u_3 的于结构外的邻居. 通过转换, 我们可以选择图 G , 使得图 G 的边 u_3w 以及与点 u_1, u_2 相关联的边都为正的. 接着我们从 G 中删除路径 p 的所有顶点并且将点 u_0 和点 w 进行粘点. 这样从 (D, σ) 得到一个新的 S_3 -标号平面图, 记作 (D', σ') .

首先, 验证上述图的操作不会产生新的为 k -圈 ($k \leq 10$), 故 $D' \in G$. 否则, k -圈对应到图 D 中是一条 k -路径, 并且它与路径 $u_0u_1u_2u_3w$ 一起组成了一个 $(k+4)$ -圈, 我们令这个圈为 C , 和情况1的验证过程一样, C 是一个好的分离圈, 这是矛盾的. 同样和情况 1 相似地, 我们可以推导出 u_0 和 w 不能同时都为图 G 的外点, 并且我们的操作不会导致两个外点相邻接. 这说明染色 ϕ_0 在 D' 中仍正常.

接着, 验证 U 在 D' 中也是好圈. 反证, 令 H 是 D' 中的 U 的一个爪型. 由于 D 没有爪型, 容易推出 u_0, w 和爪型有关. 那么由爪型的定义, 其中一个点, 不妨令该点为 u_0 , u_0 有两个邻点 $\{u', u''\}$ 在 $V(U)$ 上, 而点 w 则有一个邻点 $w', w' \in V(U)$. 由于 $|V(U)| \leq 14$, 那么 u', u'', w' 将 $V(U)$ 分成了三条路径, 其中从 u_0 至少有一条以 w' 为端点的路径其长度至多为8. 上述图操作将产生一个新的9-圈, 矛盾. 因此我们可以假设 $w \in V(U)$ 而 $u_0 \notin V(U)$, 那么点 u_0 可能就有一个邻点 u' , 并且 u' 有两个邻点 $\{u_x, u_y\}$ 在 $V(U)$ 上. 同上, 我们可以找到一个新的9-圈, 矛盾.

由于 G 的极小性, 染色 ϕ_0 可以延拓到 (G', σ') , 并通过如下染色进一步延拓到 (G, σ) : 记 ϕ 为 G' 得到的染色. 我们知道 u_3 不可以染颜色 $\phi(u_0)$, 若 $\phi(v) \neq \phi(u_0)$, 那么我们可以将 u_0 的颜色染到 u_2 , 接下来 u_1 也可以染好. 若 $\phi(v) = \phi(u_0)$, 那么我们可以按顺序将 u_3, u_2, u_1 的顺序将染色延拓到 G 上.

4. 图 G 的权转移

我们将 $(3, 3, 3)$ -面表示为坏三角形; 3-面恰好包含两个3-内点, 我们将它记作次三角形; 3-面只有一个3-内点, 我们将它记作普通三角形. 其他的3-面记作好的三角形.

下面, 我们令 V, E 和 F 分别为 G 的顶点,边和面的集合. 对于每个 $x \in V \cup F$, x 的初始权值 $ch(x)$ 定义如下:

$$ch(x) = \begin{cases} 2d(x) - 6, & \text{若 } x \in V; \\ d(x) - 6, & \text{若 } x \in F \setminus \{f_0\}; \\ d(x) + 6, & \text{若 } x = f_0. \end{cases} \tag{1}$$

利用等式 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f)$ 以及欧拉公式 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$, 我们可以得到

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch(x) = 0.$$

接着, 我们将对所有 $x \in V(G) \cup F(G)$ 的元素设定适当的权转移规则进行权转移来得到一个最终权值 $ch^*(x)$ 并且我们有 $ch^*(x) > 0$. 由于在权转移的过程中总的权值是不会改变的, 这个转权的结果

与我们总的初始权值是矛盾的.

根据以下规则在 $V \cup F$ 的元素之间进行转权:

R1. f_0 转出 $\frac{10}{7}$ 个权到每个 f_0 上的点 v .

R2. 对于 6^+ -面 f , 其中 $f \neq f_0$, f 转出 $\frac{d(f)-6}{d(f)}$ 个权到每个面上的点.

R3. 令 L 为 14^- -面 f 的边界上的一个串, 其中 $f \neq f_0$. 如果点 u 是一个邻接 L 的点, 那么 u 转出 $\frac{42-3d(f)}{14d(f)}$ 个权到每个 L 的点上.

R4. 令 u 为坏的三角形上的一个顶点, v 为 u 在三角形外的一个邻点, v 转出 $\frac{1}{2}$ 个权到 u .

R5. (1) B -点转出 $\frac{35}{22}$ 个权到每个相关的次三角形上, 否则转出 $\frac{29}{22}$ 个权到每个其他类的三角形上.

(2) D -, C -点转出 2 个权到每个相关的次三角形上. 或者转出 $\frac{35}{22}$ 个权到每个普通三角形上, 否则转出 1 个权到每个其他类的三角形上(上述三角形不包括特殊三角形).

(3) D_1 -点转出 $\frac{57}{44}$ 个权到每一个特殊三角形上, 其中该特殊三角形有一个邻接到坏的三角形的三度内点, 否则转出 $\frac{19}{14}$ 个权到每个特殊三角形上.

在权转移之后, 我们总是把内 3-点的所有权值转到与之相关联的三角形上. 对于每个 $x \in V \cup F$, 我们记 $ch^*(x)$ 为其经过转权后的最终权值.

性质 4.1 对所有内部的 3-面 f , $ch^*(f) \geq 0$.

证明: 首先, 我们假设 $[uvw]$ 是一个坏的三角形. 如果 $[uvw]$ 与其他 3-面不邻接, 那么 $[uvw]$ 可能与 8-面相邻, 否则, $[uvw]$ 只能和 11^+ -面相邻. 由 R4 和 R2, 我们有 $ch^*(f) \geq ch(x) + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$.

如果 $[uvw]$ 是一个次三角形并且 $d(w) \geq 4$, 那么通过引理 3.9, 我们知道 $\{u, v\}$ 不与坏三角形相邻. 我们考虑 w 可能是一个 B -点的情况, 那么由于图 G 不含有 10-面, 所以 $[uvw]$ 与至少两个 11^+ -面相关. 通过 R2 和 R5(1), 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot (\frac{5}{11} + \frac{1}{4}) + \frac{35}{22} = -3 + \frac{31}{22} + \frac{35}{22} = 0$. 如果 w 是一个 C -点或者 D -点, 那么由 R5(2), 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 0$.

如果 $[uvw]$ 是一个普通三角形, 那么也就是说, 我们可以假设 $d(u) \geq 4$, $d(w) \geq 4$. 我们知道 v 可能与坏三角形相邻接, 如果 u 或者 w 是 B -点, 那么 v 和 11^+ -面是相关的. 如果 u, w 都是 B -点, 那么由 R2, R4 和 R5(1), 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{11} + 2 \cdot \frac{29}{22} = -3 - \frac{1}{2} + \frac{39}{11} = \frac{1}{22}$. 如果 u 是 C -点, w 是一个 B -点, 并且 v 邻接一个坏三角形, 我们可以推断出 v 与两个 11^+ -面相关, 那么 $ch^*(f) \geq ch(f) - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{11} + \frac{29}{22} + \frac{35}{22} = -3 - \frac{1}{2} + \frac{10}{11} + \frac{64}{22} > 0$. 如果 v 不与坏三角形相邻接, 此时 v 可能只和一个 11^+ -面有关, 那么我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + (\frac{1}{4} + \frac{5}{11}) + \frac{29}{22} + \frac{35}{22} > 0$. 因此, 我们可以假设 u, w 都是 C -点, 如果 v 与坏三角形相邻接, 那么我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot \frac{5}{11} + \frac{35}{22} + \frac{35}{22} - \frac{1}{2} > 0$. 如果 v 不与坏三角形相邻接, 那么我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{35}{22} + \frac{35}{22} > 0$.

如果 $[uvw]$ 是一个好的三角形, 那么由 R4, R5(2), 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 3 \cdot 1 = 0$.

性质 4.2 所有的 B -, C -点 v , $ch^*(v) \geq 0$.

证明: 设 v 是一个 B -点, 那么由引理 3.8, v 最多与一个次三角形相关, 因此由 R2 和 R5(1), $ch^*(v) \geq ch(v) + 2 \cdot \frac{5}{11} - \frac{35}{22} - \frac{29}{22} = 0$.

接着我们令 v 是一个 C -点. 如果 $d(v) = 3$, 那么根据定义, v 不包含在内部的三角形中. 因此, v 可能和三个 6^+ -面相关. 根据引理3.9, v 最多邻接一个坏的三角形. 如果 v 与坏的三角形相邻接, 由图 $G \in G$, 那么我们可以推断出 v 可能与两个 8^+ -面以及一个 6^+ -面相关, 因此由 $R2$ 和 $R4$, 我们有 $ch^*(v) \geq ch(v) + 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} = 0$. 如果 v 不与坏三角形相邻接, 那么 v 可能与三个 6^+ -面相关, 因此, $ch^*(v) \geq ch(v) + 3 \cdot 0 = 0$. 如果 v 包含于一个特殊三角形中, 则根据 $R2$, $R5(2)$, 我们有 $ch^*(v) \geq ch(v) + 2 \cdot \frac{1}{4} > 0$ 或者 $ch^*(v) \geq ch(v) + 2 \cdot \frac{5}{11} - \frac{1}{2} > 0$.

如果 $d(v) \geq 4$, 那么我们令 x 为包含了点 v 的三角形数目, y 为和 v 相邻接的坏的三角形数目. 我们知道 $x \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 并且 $y \leq d(v) - 2x$. 如果 v 与一个坏三角形相邻接, 那么 v 至少和两个 8^+ -面相关, 否则可能和两个 6^+ -面相关. 因此, 我们不妨考虑 x 个相关的三角形都是次三角形的情况, 此时三角形所需要的权值就是最多的. 由 $R2$ 和 $R5(2)$, 我们有 $ch^*(v) \geq ch(v) - x \cdot 2 - y \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \cdot d(v) - 6 - \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$. 如果 $d(v) \geq 6$, 那么通过计算我们有 $ch^*(v) > 0$.

我们仍然需要去验证 $4 \leq d(v) \leq 5$ 时权值的情况. 如果 $d(v) = 4$, 由于 v 是 C -点, 那么根据 C -点的定义, v 最多和一个三角形相关. 当 $x = 1, y = 2$ 时, 那么 v 与三个 11^+ -面相关; 当 $x = 1, y = 1$ 时, 那么 v 与一个 11^+ -面以及两个 8^+ -面相关; 当 $x = 1, y = 0$ 时, 那么与两个 8^+ -面以及一个 6^+ -面相关; 此外, 我们还需要考虑到 $x = 0, y \leq 4$ 的情况. 如上述所有情况, 我们有 $ch^*(x) \geq \{\frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, 0\}$. 当 $d(v) = 5$, 和度为四的点的判断类似, 它很容易证明 $ch^*(v) \geq 0$, 我们忽略了这部分的证明.

性质 4.3 令 v 为边界 f_0 上的一个点. 那么 $ch^*(v) \geq 0$.

证明: 如果 $d(v) = 2$, 那么由 $R1, R2$ 和 $R3$, $ch^*(v) \geq ch(v) + \frac{10}{7} + \frac{d(f)-6}{d(f)} + 2 \cdot \frac{42-3d(f)}{14d(f)} = 0$.

我们假设 $d(v) = 3$ 并且设与点 v 相关的面 f , 其中 $f \neq f_0$. 如果 $d(f) = 6$, 那么由引理3.6, 我们知道 f 最多只有一个二度点, 则由 $R2$ 和 $R3$, v 转 $\frac{42-3d(f)}{14d(f)} = \frac{2}{7}$ 个权到 f 的二度点上. 如果 v 是一个 D -点并且 $d(f) = 8$, 那么 v 转至少 $\frac{9}{28} - \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ 个权到 f 的二度点上. 如果 v 是一个 D -点并且 $d(f) = 11$, 那么 v 得到至少 $\frac{5}{11} - 4 \cdot \frac{42-3 \cdot 11}{154} = \frac{17}{77}$ 个权.

情况1: 当点 v 与一个 6 -面相关.

由于图 G 没有 7 -、 10 -圈, 因此 v 不包含于三角形里, 也不与三角形相邻接, 而且, v 最多只属于一个 6 -圈. 通过上面的分析, 我们有 $ch^*(v) \geq ch(v) + \frac{10}{7} - \frac{1}{14} - \frac{2}{7} = \frac{15}{14}$.

情况2: 当 v 是一个 D_1 -点.

因为 v 是三角形的一个点, 所以 v 只可能和 8^+ -圈相关. 由 $R1, R5(3)$ 以及上面的分析, 我们有 $ch^*(v) \geq ch(v) + \frac{10}{7} - \frac{1}{14} - \frac{19}{14} = 0$ 或者 $ch^*(v) \geq ch(v) + \frac{10}{7} + \frac{17}{77} - \frac{57}{44} > 0$.

如果 $d(v) \geq 4$, 那么我们可以假设 v 与 x 个三角形相关并且邻接 y 个坏的三角形. 我们可以推断出 $x \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 并且 $y \leq d(v) - 2x$. 由 $R1, R2$ 和 $R5$, 当 $d(v) \geq 5$, x 个三角形为次三角形时, 我们有 $ch^*(v) \geq 2d(v) - 6 - x \cdot 2 - y \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{7} > 0$. 如果 $d(v) = 4$, 那么根据权转移规则, 我们知道 v 与次三角形相关时损失最多的权值. 因此, $ch^*(v) \geq ch(v) - 2 + \frac{10}{7} - 2 \cdot \frac{1}{14} > 0$.

性质 4.4 对于所有的与 f_0 相关联的三角形, $ch^*(f) \geq 0$.

证明: 令 $[uvw]$ 为一个特殊三角形.

如果 $[uvw]$ 的点 u 是一个三度内点, 并且 u 不与三角形相邻接. 那么由 $R2, R5$, 我们有 $ch^*(f) \geq$

$$ch(f) + 2 \cdot \frac{19}{14} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -3 + \frac{19}{7} + \frac{1}{2} = \frac{3}{14} > 0.$$

我们可以假设 u 邻接一个坏的三角形. 那么由 $R2, R4$ 和 $R5(3)$, 我们得到了 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot \frac{57}{44} + 2 \cdot \frac{5}{11} - \frac{1}{2} = -3 + \frac{57}{22} + \frac{10}{11} - \frac{1}{2} = 0$.

令 $[uvw]$ 为一个只含有确切一个外点的三角形.

如果 $[uvw]$ 是一个次三角形, 那么由引理 3.9 我们知道 $[uvw]$ 的内点不可能邻接坏三角形, 否则我们可以在 G 中找到一条好路, 所以由 $R2, R5(2)$ 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$. 如果 $[uvw]$ 是普通三角形, 那么由定义我们知道 $[uvw]$ 有两个 4^+ -点. 若 $[uvw]$ 邻接到一个坏三角形, 由 $R2, R4, R5$ 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot \frac{35}{22} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{11} > 0$. 若 $[uvw]$ 不邻接到一个坏三角形, 由 $R2, R5$ 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 2 \cdot \frac{35}{22} + 2 \cdot \frac{1}{4} > 0$. 若 $[uvw]$ 是一个好三角形, 由 $R5$ 我们有 $ch^*(f) \geq ch(f) + 1 + 1 + 1 = 0$.

性质 4.5 对于所有的 4^+ -面 f , $ch^*(f) \geq 0$.

证明: 对于 $f \neq f_0$, 因为 G 不含有 $4-, 5-, 7-, 10-$ 圈, 所以 f 至少为 6^+ -面, 由 $R2$, 易知 $ch^*(f) \geq 0$. 当 $f = f_0$ 时, 由 $R1$ 可知 $ch^*(f) \geq ch(f) - \frac{10}{7} \cdot d(f) \geq 0$.

综上所述, 我们来验证 $ch^*(x) > 0$. 我们知道图 G 的边界上至少有一个 3^+ -点 v , 并且由性质4.3的证明过程中可以得出 v 必须是一个 D_1 -点并且 v 在一个8-圈上. 我们令与 v 有关的三角形为 $[uvw]$, 其中 u 是 G 的一个内点. (注意 $[uvw]$ 中必有一个内点, 否则图 G 会有弦存在, 这与引理3.7是矛盾的.) 由于三角形与一个8-圈相邻, 所以 u 不可能是 B -点. 即是说 u 是一个 C -点. 又由性质4.2的证明过程中, 我们知道 $d(u) = 4$ 或者 $d(u) = 5$. 对于这两种情况同样由于三角形邻接了一个8-圈的缘故, 我们可以得出 $ch^*(u) > 0$. 这样我们结合以上性质所得结论 $\sum_{x \in V \cup F} ch^*(x) \geq 0$ 可以得出图 G 最终权值之和大于零, 证毕.

我们对列表染色的一些已有结论进行平面图的 DP -染色上的推广. H. Zhang [8]在2012年时证明了不含有 $\{4, 5, 7, 10\}$ 长的圈的平面图是3-可选的, 这篇文章中利用了极小反例的性质以及特别地引入了爪型的概念作为归纳条件推断出了图的一些结构, 并且利用了权转移的方法对图进行分析论证, 证明了不含有 $\{4, 5, 7, 10\}$ 长的圈的平面图是 DP -3-可染的. 此外, 对于列表染色的图的研究, Y. Wang, H. Lu 和 M. Chen [9]于2010年证明了不含有 $\{4, 5, 8, 9\}$ 长的圈的平面图是3-可选的, 是否这个结果能推广 DP -3-可染的, 这个问题如今还没答案, 我们可能需要考虑一些新的归纳条件去验证.

参考文献

- [1] Grötzsch, H. (1959) Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Math.-Naturwissenschaftliche Reihe*, **8**, 109-120.
- [2] Cohen-Addad, V., Hebdige, M., Král, D., Li, Z. and Salgado, E. (2017) Steinberg's Conjecture Is False. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **122**, 452-456.
<https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.07.006>

-
- [3] Dvořák, Z. and Postle, L. (2018) Correspondence Coloring and Its Application to List-Coloring Planar Graphs without Cycles of Lengths 4 to 8. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **129**, 38-54. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.09.001>
- [4] Liu, R., Loeb, S., Rolek, M., Yin, Y. and Yu, G. (2019) DP-3-Coloring of Planar Graphs without 4, 9-Cycles and Cycles of Two Lengths from 6, 7, 8. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 695-705. <https://doi.org/10.1007/s00373-019-02025-2>
- [5] Liu, R., Loeb, S., Yin, Y. and Yu, G. (2019) DP-3-Coloring of Some Planar Graphs. *Discrete Mathematics*, **342**, 178-189. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.09.025>
- [6] Lv, J. (2022) Planar Graphs without Cycles of Length from 4 to 7 and Intersecting Triangles Are DP-3-Colorable. *Graphs and Combinatorics*, **38**, Article No. 8. <https://doi.org/10.1007/s00373-021-02407-5>
- [7] Jin, L., Wong, T. and Zhu, X. (2021) Colouring of S-Labelled Planar Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **92**, Article ID: 103198. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2020.103198>
- [8] Zhang, H. (2012) A Sufficient Condition for a Toroidal Graph to Be 3-Choosable. *Ars Combinatoria*, **105**, 193-203.
- [9] Wang, Y., Lu, H. and Chen, M. (2010) Planar Graphs without Cycles of Length 4, 5, 8 or 9 Are 3-Choosable. *Discrete Mathematics*, **310**, 147-158. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.08.005>